IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2009-2010

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

N.B. Divers additifs et correctifs pourront être apportés aux résumés ci-après, en fonction notamment des observations qui seront faites sur leur contenu et leur organisation.

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2009-2010

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 1: lundi 31 août 2009

Programme de la séance. 1. Problématique et fonctionnement du Séminaire // 2. Forum des questions // 3. Observation & analyse

1. Problématique et fonctionnement du Séminaire

1.1. Le document de présentation de la formation et de sa validation comporte les précisions suivantes.

> 3.1. La rubrique Problématique et fonctionnement, comporte trois sous-rubriques, intitulées respectivement Le programme d'études, Questions de la semaine et Faisons le point.
>
> – La sous-rubrique Le programme d'études a pour objet de préciser les questions à étudier (elle prend place éventuellement dans le cadre des séances d'explicitation). Le programme du Séminaire inclut notamment quatre questions qui traversent tous les dispositifs de formation : évaluation, gestion de la diversité, éducation à la citoyenneté et travail en équipe.
>
> – La sous-rubrique Questions de la semaine requiert de chaque participant au Séminaire, chaque semaine ouvrable, qu'il consigne par écrit – au démarrage de la séance de GFP du mardi matin – une difficulté rencontrée dans le cadre de sa formation au métier de professeur de mathématiques, y compris bien sûr dans les stages de terrain, c'est-à-dire à l'occasion des enseignements qu'il assure ou auxquels il est associé. Les questions ainsi formulées sont regardées, sauf exception, comme des questions qui se posent à la profession à travers l'un de ses nouveaux membres, et non comme l'affaire personnelle de tel ou tel. Leur étude éventuelle dans le cadre de la formation concerne donc tout professionnel de l'enseignement des mathématiques, et pas seulement celui qui, ayant porté témoignage de la difficulté rencontrée, aura ainsi contribué au développement de la profession que cette année de formation doit promouvoir. Le contenu de ces questions sera présenté la semaine suivante dans la rubrique Question de la semaine du Séminaire de façon à dégager les problèmes de la profession rencontrés et soumis à l'étude par la classe.
>
> – La sous-rubrique Faisons le point permet de faire un bilan de tout ou partie du travail réalisé au cours des séances précédentes ainsi que des difficultés sur lesquelles un travail complémentaire apparaît utile ou nécessaire.

1.2. Le ***programme d'études*** se dessinera peu à peu, en relation étroite avec la rubrique des ***Questions de la semaine*** : *a priori*, il inclut en effet ***toute question professionnelle*** (en un sens très large de l'expression) qui peut se poser à un professeur de mathématiques, débutant ou non.

1.3. Pour commencer de repérer ce qui fait le « territoire » du professeur de mathématiques, territoire où vont se poser les questions que nous étudierons, nous nous référerons aux dix compétences professionnelles des maîtres explicitées dans le *Cahier des charges de la* *formation des maîtres en institut universitaire de formation des maîtres* publié au Bulletin Officiel n°1 du 4 janvier 2007. Nous les mettrons en relation avec un texte toujours en vigueur (il date de 1997) présentant la ***Mission du professeur exerçant en collège, en lycée d'enseignement général et technologique ou en lycée professionnel*** : on trouvera ces textes sur la partie ***Mathématiques*** du site de l'IUFM, sous la rubrique ***Documents / 2nd degré*** (http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/fi/pcl2/2A.TXT/2009-2010/documents_10.html).

a) Le texte sur la mission du professeur indique que celle-ci « et la responsabilité qu'elle implique se situent dans le triple cadre du ***système éducatif***, des ***classes*** qui lui sont confiées et de son ***établissement*** d'exercice ». Il propose donc une description en ***trois volets*** des exigences qui s'imposent au professeur : ***Exercer sa responsabilité au sein du système éducatif*** ; ***Exercer sa responsabilité dans la classe*** ; ***Exercer sa responsabilité dans l'établissement***. Dans le discours par lequel il présentait le cahier des charges de la formation des maîtres en décembre 2006, le ministre de l'éducation nationale d'alors, Gilles de Robien, présentait les dix compétences professionnelles des maîtres en trois ensembles : « Les deux premières compétences énoncent ***ce qui est requis de tout enseignant***, quels que soient sa discipline et son niveau d'enseignement, à savoir : agir de façon éthique et responsable ; maîtriser la langue française » ; « Les six compétences suivantes touchent à ***l'enseignement de la discipline dans le contexte de la classe***. Il faut que le jeune professeur sache : maîtriser sa ou ses disciplines, tout en ayant une bonne culture générale ; concevoir et mettre en œuvre son enseignement ; gérer la classe ; prendre en compte la diversité des élèves ; les évaluer ; maîtriser les technologies de l'information et de la communication » ; « Les deux dernières compétences concernent ***le rapport du professeur avec le contexte plus général de son enseignement*** : tout d'abord, il doit savoir travailler en équipe avec tous les membres de la communauté éducative : ses collègues bien sûr, mais aussi les parents et les associations péri scolaires ; ensuite, il doit savoir entretenir un rapport vivant et évolutif avec son champ disciplinaire : il doit savoir se former et innover tout au long de son parcours professionnel ». Le cœur du travail du professeur a ainsi peu varié, et c'est dans la présentation du travail extérieur à la classe, mais en relation avec elle bien entendu, qu'il semble y avoir quelques évolutions. Voyons cela.

1.4. On examinera d'abord le premier ensemble de compétences. On notera au préalable que les dix compétences sont présentées suivant le même schéma : une description suivie de trois rubriques : connaissances, capacités et attitudes.

Agir en fonctionnaire de l'État et de façon éthique et responsable

Tout professeur contribue à la formation sociale et civique des élèves. En tant qu'agent de l'État, il fait preuve de conscience professionnelle et suit des principes déontologiques : il respecte et fait respecter la personne de chaque élève, il est attentif au projet de chacun ; il respecte et fait respecter la liberté d'opinion ; il est attentif à développer une attitude d'objectivité ; il connaît et fait respecter les principes de la laïcité, notamment la neutralité ; il veille à la confidentialité de certaines informations concernant les élèves et leurs familles.

Il exerce sa liberté et sa responsabilité pédagogique dans le cadre des obligations réglementaires et des textes officiels ; il connaît les droits des fonctionnaires et en respecte les devoirs.

L'éthique et la responsabilité du professeur fondent son exemplarité et son autorité dans la classe et dans l'établissement.

Connaissances

Le professeur connaît :

– les valeurs de la République et les textes qui les fondent : liberté, égalité, fraternité ; laïcité ; refus de toutes les discriminations ; mixité ; égalité entre les hommes et les femmes ;

– les institutions (État et collectivités territoriales) qui définissent et mettent en œuvre la politique éducative de la nation ;

– les mécanismes économiques et les règles qui organisent le monde du travail et de l'entreprise ;

– la politique éducative de la France, les grands traits de son histoire et ses enjeux actuels (stratégiques, politiques, économiques, sociaux) en comparaison avec d'autres pays européens ;

– les grands principes du droit de la fonction publique et le code de l'éducation : les lois et textes réglementaires en relation avec la profession exercée, les textes relatifs à la sécurité des élèves (obligations de surveillance par exemple) et à la sûreté (obligation de signalement par exemple) ;

– le système éducatif, ses acteurs et les dispositifs spécifiques (éducation prioritaire, etc.) ;

– la convention internationale des droits de l'enfant ;

– ses droits et recours face à une situation de menace ou de violence ;

– l'organisation administrative et budgétaire des écoles et des établissements publics locaux d'enseignement ;

– les règles de fonctionnement de l'école ou de l'établissement (règlement intérieur, aspects budgétaires et juridiques) ;

– les caractéristiques et les indicateurs de l'école ou de l'établissement d'exercice ;

– le projet de l'école ou de l'établissement d'exercice ;

– le rôle des différents conseils (conseil d'école, conseil des maîtres, conseil de cycle, d'une part, conseil d'administration, conseil pédagogique, conseil de classe, conseil de discipline, d'autre part).

Capacités

Le professeur est capable :

– d'utiliser ses connaissances sur l'évolution et le fonctionnement du service public d'éducation nationale pour recourir aux ressources offertes ;

– de se situer dans la hiérarchie de l'institution scolaire ;

– de participer à la vie de l'école ou de l'établissement ;

– de repérer les signes traduisant des difficultés spécifiques des élèves dans le domaine de la santé, des comportements à risques, de la grande pauvreté ou de la maltraitance ;

– de contribuer, en coopérant avec des partenaires internes ou externes à l'institution, à la résolution des difficultés spécifiques des élèves ;

– de se faire respecter et d'utiliser la sanction avec discernement et dans le respect du droit.

Attitudes

Agir de façon éthique et responsable conduit le professeur :

– à faire comprendre et partager les valeurs de la République ;

– à intégrer, dans l'exercice de sa fonction, ses connaissances sur les institutions, sur l'État (son organisation et son budget), sur ses devoirs de fonctionnaire ;

– à respecter dans sa pratique quotidienne les règles de déontologie liées à l'exercice du métier de professeur dans le cadre du service public d'éducation nationale ;

– à respecter les élèves et leurs parents ;

– à respecter et faire respecter le règlement intérieur, les chartes d'usage des ressources et des espaces communs ;

– à collaborer à la réalisation d'actions de partenariat engagées entre l'établissement et son environnement économique, social et culturel ;

– à prendre en compte la dimension civique de son enseignement.

Maîtriser la langue française pour enseigner et communiquer

Dans son usage de la langue française, tant à l'écrit qu'à l'oral, le professeur doit être exemplaire quelle que soit sa discipline. Il est attentif à la qualité de la langue chez ses élèves. Qu'il présente des connaissances, fournisse des explications ou donne du travail, il s'exprime avec clarté et précision, en tenant compte du niveau de ses élèves. Il sait décrire et expliquer simplement son enseignement à la diversité de ses interlocuteurs, en particulier les parents.

Connaissances

Tout professeur possède les connaissances attendues d'un diplômé de l'enseignement supérieur, dans la maîtrise de la langue écrite et orale (vocabulaire, grammaire, conjugaison, ponctuation, orthographe).

Le professeur des écoles connaît en outre :

– les mécanismes d'apprentissage du langage en maternelle et le développement des capacités d'expression orale tout au long de la scolarité primaire ;

– les mécanismes d'apprentissage de la lecture et ses obstacles ;

– les méthodes d'enseignement de la lecture et de l'écriture ;

– les règles fondamentales de l'orthographe et de la grammaire.

Capacités

Le professeur est capable :

– de repérer les obstacles à la lecture, les déficiences du langage oral et écrit en identifiant les difficultés que peuvent rencontrer les élèves ;

– de construire des séquences d'enseignement qui visent des objectifs de développement de l'expression orale et écrite des élèves ;

– de communiquer avec clarté et précision et dans un langage adapté à l'écrit comme à l'oral :

– avec les élèves, au cours des apprentissages (transmission des connaissances, organisation du travail en classe et du travail personnel à fournir...) ;

– avec les parents, au cours des échanges personnalisés ou collectifs.

Attitudes

Le souci d'amener les élèves à maîtriser la langue conduit le professeur :

– à intégrer dans les différentes situations professionnelles l'objectif de maîtrise de la langue orale et écrite par les élèves ;

– à veiller dans toutes les situations d'enseignement ou éducatives au niveau de langue des élèves, à l'écrit et à l'oral.

Commentaire 1 – Des notations relatives à la première compétence sont présentes dans la ***description de la mission du professeur***, de façon certes moins détaillée comme en témoigne par exemple les deux extraits suivants extraits respectivement du premier et du troisième volet du texte.

Le professeur doit être à même de mesurer les enjeux sociaux de l'éducation et de son action au sein du système. Il doit également connaître les textes essentiels concernant l'organisation du service public de l'éducation, ses évolutions et son fonctionnement. Il pourra ainsi se comporter en acteur du système éducatif et favoriser son adaptation en participant à la conception et la mise en œuvre d'innovations, de nouveaux dispositifs, de nouveaux programmes et diplômes.

(...)

Il connaît l'importance du règlement intérieur de l'établissement et sait en faire comprendre le sens à ses élèves. Il est capable de s'y référer à bon escient. De même, il connaît et sait faire respecter les règles générales de sécurité dans l'établissement.

Commentaire 2 – La description détaillée des compétences fait une différence entre des ***connaissances*** que le professeur doit posséder (par exemple « les valeurs de la République et les textes qui les fondent : liberté, égalité, fraternité ; laïcité ; refus de toutes les discriminations ; mixité ; égalité entre les hommes et les femmes » ou encore « – les règles de fonctionnement de l'école ou de l'établissement (règlement intérieur, aspects budgétaires et juridiques) ») ; des capacités qui sont des ***types de tâches*** que le professeur doit être capable d'accomplir en mobilisant notamment les connaissances citées (par exemple « se faire respecter et utiliser la sanction avec discernement et dans le respect du droit ») ; des attitudes, qui sont à peu de chose près des ***pratiques*** que l'on doit observer dans l'activité du professeur et qui témoignent que les connaissances et capacités sont acquises (par exemple, « à respecter dans sa pratique quotidienne les règles de déontologie liées à l'exercice du métier de professeur dans le cadre du service public d'éducation nationale »).

Commentaire 3 – Pour être en accord avec les prescriptions précédentes, le professeur doit donc se tenir informé de « la ***politique éducative*** de la France, les grands traits de son histoire et ses ***enjeux*** actuels (stratégiques, politiques, économiques, sociaux) en comparaison avec d'autres pays européens ». Dans ce contexte, les professionnels de l'enseignement doivent par exemple prendre connaissance de la ***circulaire de rentrée*** qui, chaque année, prépare la rentrée scolaire. On trouvera sur le site Internet de l'IUFM, sous la rubrique déjà indiquée plus haut et sous le titre ***Rentrée 2009***, la circulaire concernant la présente rentrée. »). ☝

Commentaire 4 – La maîtrise de la langue était également mentionnée dans le texte de la mission des professeurs comme en témoigne les extraits suivants du deuxième volet.

> Quelle que soit la discipline qu'il enseigne, il a une responsabilité dans l'acquisition de la maîtrise orale et écrite de la langue française et dans le développement des capacités d'expression et de communication des élèves.
>
> Il sait choisir le registre de langue approprié ; ses modalités d'intervention et de communication sont ajustées en fonction des activités proposées et de la réceptivité des élèves.

On notera qu'elle constitue également un des objectifs du concours de recrutement du CAPES, et notamment des épreuves orales :

> Ces épreuves visent enfin à évaluer les capacités du candidat dans le domaine de l'expression orale : qualité de l'élocution et de la langue, précision et clarté, gestion du tableau, aptitude au dialogue au cours des entretiens. Étant donné la nature de la profession d'enseignant, ces capacités sont d'une importance capitale. (BO du 1er janvier 2004)

Commentaire 5 – L'orthographe à utiliser peut être l'ancienne orthographe ou l'orthographe rectifiée. On notera cependant que le programme de 2008 de l'école primaire et les programmes de français du collège publiés au BO en 2008 portent l'indication de ce que l'orthographe rectifiée est la référence. Pour de plus amples informations sur ces questions, on pourra consulter les sites www.renouvo.org et http://www.orthographe-recommandee.info/vous.htm.

Venons-en maintenant au deuxième ensemble de compétences, qui constitue – on l'a dit – le cœur du travail du professeur.

> **Maîtriser les disciplines et avoir une bonne culture générale**
>
> Une bonne maîtrise des savoirs enseignés est la condition nécessaire de l'enseignement. Le professeur a une connaissance approfondie et élargie de sa ou de ses disciplines et une maîtrise des questions inscrites aux programmes. Il connaît les composantes du socle commun de connaissances et de compétences, les repères annuels de sa mise en œuvre, ses paliers et ses modalités d'évaluation. Il aide les élèves à acquérir les compétences exigées en veillant à la cohérence de son projet avec celui que portent les autres enseignements.
>
> Il possède aussi une solide culture générale qui lui permet de contribuer à la construction d'une culture commune des élèves. Il pratique au moins une langue vivante étrangère.
>
> *Connaissances*
>
> Le professeur des écoles connaît :
>
> – les objectifs de l'école primaire et du collège ;
>
> – les concepts et notions, les démarches et les méthodes dans chacun des champs disciplinaires enseignés à l'école primaire.
>
> Le professeur des lycées et collèges :
>
> – connaît les objectifs de l'école primaire, du collège et du lycée ;
>
> – maîtrise l'ensemble des connaissances dans sa ou ses disciplines et élargit sa culture aux disciplines

connexes ;

– situe sa ou ses disciplines, à travers son histoire, ses enjeux épistémologiques, ses problèmes didactiques et les débats qui la traversent.

Capacités

Le professeur des écoles est capable :

– d'organiser les divers enseignements en les articulant entre eux dans le cadre de la polyvalence ;

– de profiter de la polyvalence pour construire les apprentissages fondamentaux ;

– d'insérer dans les apprentissages les exercices spécifiques et systématiques pour développer les automatismes (lecture, écriture, calcul, grammaire, orthographe, éducation physique, etc.).

Le professeur du second degré est capable d'organiser l'enseignement de sa discipline en cohérence avec les autres enseignements.

Attitudes

La maîtrise scientifique et disciplinaire du professeur le conduit à :

– une attitude de rigueur scientifique ;

– à participer à la construction d'une culture commune des élèves.

Concevoir et mettre en œuvre son enseignement

Le professeur est un spécialiste de l'enseignement de sa ou de ses disciplines, c'est-à-dire qu'il est capable d'assurer, sur la durée d'une année scolaire, l'apprentissage effectif de ses élèves dans le cadre d'un enseignement collectif. Pour cela, il maîtrise la didactique de sa ou de ses disciplines, et il est capable de mettre en œuvre des approches pluridisciplinaires ; il connaît les processus d'apprentissage et les obstacles que peuvent rencontrer les élèves et la manière d'y remédier ; il est capable d'élaborer des programmations et de répartir les apprentissages dans le temps. Il sait prendre en compte ce qui a été réalisé précédemment.

Le professeur peut être appelé à participer aux actions de formation continue des adultes et aux formations par apprentissage et être formé en conséquence.

Connaissances

Le professeur connaît :

– les objectifs à atteindre pour un niveau donné, dans le cadre de son enseignement ou de son domaine d'activité ;

– les programmes d'enseignement et documents d'accompagnement qui le concernent à tous les niveaux d'enseignement des premier et second degrés ;

– les fondements de la psychologie de l'enfant, de l'adolescent et du jeune adulte, les processus d'apprentissage des élèves et les obstacles possibles à ces processus ;

– les différents supports et les outils (tableau, manuels, documents...) nécessaires à la conception et à la mise en œuvre des apprentissages.

Capacités

Le professeur est capable :

– de définir des objectifs d'apprentissage à partir des références des textes officiels ;

– de raisonner en termes de compétences, c'est-à-dire déterminer les étapes nécessaires à l'acquisition progressive des connaissances, des capacités et des attitudes prescrites à partir des acquis et des besoins identifiés en mettant en œuvre :

– une progression et une programmation sur l'année et sur le cycle ;

– une progression différenciée selon les niveaux des élèves ;

– de s'appuyer sur ses connaissances des processus d'apprentissage des élèves et de la psychologie de l'enfant, de l'adolescent et du jeune adulte ;

– de prendre en compte les résultats des évaluations dans la construction d'une progression pédagogique ;

– d'intégrer dans son enseignement la prévention des risques professionnels.

Attitudes

Le professeur est conduit :

– à développer des approches pluridisciplinaires et transversales fondées sur les convergences et les complémentarités entre les disciplines :

– il construit des activités permettant d'acquérir la même compétence par le biais de plusieurs disciplines ;

– il met sa discipline au service de projets ou dispositifs pluridisciplinaires ;

– à apprécier la qualité des documents pédagogiques (manuels scolaires et livres du professeur associés, ressources documentaires, logiciels d'enseignement...).

Organiser le travail de la classe

Le professeur sait faire progresser une classe aussi bien dans la maîtrise des connaissances, des capacités et des attitudes que dans le respect des règles de la vie en société ; ses exigences portent sur les comportements et il fait en sorte que les élèves attachent de la valeur au travail personnel et collectif.

Connaissances

Le professeur maîtrise des connaissances relatives à la gestion des groupes et des conflits.

Capacités

Le professeur est capable :

– de prendre en charge un groupe ou une classe, de faire face aux conflits, de développer la participation et la coopération entre élèves ;

– d'organiser l'espace de la classe et le temps scolaire en fonction des activités prévues ;

– d'organiser les différents moments d'une séquence ;

– d'adapter les formes d'interventions et de communication aux types de situations et d'activités prévues (postures, place, interventions, vérification des consignes, etc.).

Attitudes

Dans toute situation d'enseignement, le professeur veille à instaurer un cadre de travail permettant l'exercice serein des activités.

Prendre en compte la diversité des élèves

Le professeur met en œuvre les valeurs de la mixité, qu'il s'agisse du respect mutuel ou de l'égalité entre tous les élèves. Il sait différencier son enseignement en fonction des besoins et des facultés des élèves, afin que chaque élève progresse. Il prend en compte les différents rythmes d'apprentissage, accompagne chaque élève, y compris les élèves à besoins particuliers. Il sait faire appel aux partenaires de l'école en tant que de besoin.

Il connaît les mécanismes de l'apprentissage dont la connaissance a été récemment renouvelée, notamment par les apports de la psychologie cognitive. Il amène chaque élève à porter un regard positif sur l'autre et sur les différences dans le respect des valeurs et des règles communes républicaines.

Connaissances

Le professeur connaît :

– les éléments de sociologie et de psychologie lui permettant de tenir compte, dans le cadre de son enseignement, de la diversité des élèves et de leurs cultures ;

– les dispositifs éducatifs de la prise en charge de la difficulté scolaire et des élèves en situation de handicap.

Capacités

Le professeur est capable :

– de prendre en compte les rythmes d'apprentissage des élèves ;

– de déterminer, à partir des besoins identifiés, les étapes nécessaires à l'acquisition progressive des savoirs et des savoir-faire prescrits ;

– de mettre en œuvre des dispositifs pédagogiques visant à adapter la progression à la diversité des élèves (pédagogie différenciée, programme personnalisé de réussite éducative) ;

– de participer à la conception d'un projet individualisé de scolarisation pour les élèves à besoins particuliers et les élèves handicapés.

Attitudes

Le professeur veille :

– à préserver l'égalité et l'équité entre élèves ;

– à ce que chaque élève porte un regard positif sur lui-même et sur l'autre.

Évaluer les élèves

Le professeur sait évaluer la progression des apprentissages et le degré d'acquisition des compétences atteint par les élèves. Il utilise le résultat des évaluations pour adapter son enseignement aux progrès des élèves. Il fait comprendre aux élèves les principes d'évaluation et développe leurs capacités à évaluer leurs propres productions. Il communique et explique aux parents les résultats attendus et les résultats obtenus.

Connaissances

Le professeur connaît les différentes évaluations qu'il peut être amené à pratiquer (diagnostique, formative, sommative, certificative).

Capacités

Le professeur est capable :

– de comprendre les fonctions de l'évaluation ;

– de concevoir des évaluations aux différents moments de l'apprentissage, c'est-à-dire :

– définir le niveau d'exigence de l'évaluation ;

– adapter le support et le questionnement en référence aux objectifs et au type d'évaluation que l'on souhaite mener ;

– expliciter les consignes, guider les élèves dans la préparation de l'évaluation ;

– expliciter les critères de notation ;

– analyser les résultats constatés et déterminer les causes des erreurs ;

– concevoir des activités de remédiation et de consolidation des acquis (exercices d'entraînement, exercices de mémorisation oraux ou écrits, activités d'aide, de soutien et d'approfondissement, etc.) ;

– de développer les compétences des élèves dans le domaine de l'autoévaluation ;

– de pratiquer l'évaluation certificative (examens, contrôle en cours de formation, compétences linguistiques incluses dans le cadre européen commun de référence pour les langues...).

Attitudes

Le professeur pratique l'évaluation dans le cadre d'une relation claire et de confiance et pour cela :

– il mesure ses appréciations ;

– il valorise l'exercice et le travail personnel des élèves ;

– il veille à ce que chaque élève soit conscient de ses progrès, du travail et des efforts qu'il doit produire.

Maîtriser les technologies de l'information et de la communication

Tout professeur est concerné par l'usage des outils propres à ces technologies et leur intégration dans les pratiques pédagogiques. Au sortir de sa formation professionnelle il doit avoir les compétences d'usage et de maîtrise raisonnée des technologies de l'information et de la communication dans sa pratique professionnelle.

Les connaissances et les capacités attendues sont celles du certificat informatique et internet de niveau 2 "enseignant", requis en fin de formation professionnelle. Il est intégré au dossier de compétences du professeur stagiaire.

Connaissances

Le professeur maîtrise :

– les connaissances explicitées dans le référentiel du C2I de niveau 2 "enseignant" ;

– les droits et devoirs liés aux usages des TIC.

Capacités

Le professeur est capable de :

– concevoir, préparer et mettre en œuvre des contenus d'enseignement et des situations d'apprentissage ;

– participer à l'éducation aux droits et devoirs liés aux usages des technologies de l'information et de la communication ;

– s'impliquer dans l'éducation aux risques encourus dans l'utilisation des réseaux numériques ouverts sur l'internet ;

– utiliser les TIC et les outils de formation ouverte et à distance pour actualiser ses connaissances ;

– travailler en réseau avec les outils du travail collaboratif.

Attitudes

Le professeur observe une attitude :

– critique vis-à-vis de l'information disponible ;

– réfléchie et responsable dans l'utilisation des outils interactifs exigée des élèves.

Il actualise ses connaissances et compétences au cours de son exercice professionnel.

Commentaire 6 – La compétence principale est la compétences ***Concevoir et mettre en œuvre son enseignement*** , les autres permettant de la réaliser : ainsi, par exemple, pour concevoir son enseignement, faut-il ***Maîtriser les disciplines et avoir une bonne culture générale, organiser le travail de la classe, Prendre en compte la diversité des élèves***, et ***Maîtriser les technologies de l'information et de la communication*** ; ou encore pour mettre en œuvre son enseignement a-t-on à ***évaluer les élèves***, à ***agir en fonctionnaire de l'état de façon éthique et responsable*** (notamment en respectant le programme), etc.

Commentaire 7 – On notera qu'une préparation sérieuse des épreuves du concours du CAPES doit assurer la maîtrise de certains aspects de ces compétences. On indiquera par exemple que « les épreuves orales visent d'abord à évaluer la capacité à concevoir, mettre en forme et analyser une séquence d'enseignement sur un thème donné » (BO du 1er janvier 2004).

Commentaire 8 – On notera encore que, comme il est habituel dans ce type de description, le travail d'identification des connaissances, capacités et attitudes n'est pas complet – loin s'en faut – et non fonctionnel. Par exemple, on attend dans une des compétences citées que le professeur soit capable d'organiser l'espace de la classe et le temps scolaire en fonction des activités prévues ; ou encore d'organiser les différents moments d'une séquence, sans pour autant citer des connaissances pertinentes qui permettent que le professeur s'en rende capable : certaines figurent bien sûr dans d'autres compétences, puisqu'on a vu qu'elles n'étaient pas indépendantes (par exemple, l'évaluation est un moment d'une séquence) mais pas toutes. ***Un des buts premiers du Séminaire est d'apporter et de travailler les principales connaissances permettant au professeur de se rendre capable d'accomplir les types de tâches explicités dans le cahier des charges***.

Commentaire 9 – Le deuxième volet du texte sur la mission du professeur, intitulé ***Exercer sa responsabilité dans la classe***, est lui-même subdivisé en trois grands ensembles d'exigences professionnelles : le professeur doit ***connaître sa discipline***, ***savoir construire des situations d'enseignement et d'apprentissage***, et ***savoir conduire sa classe***. Il comprend, de façon synthétique, les six compétences précédentes. Il porte cependant davantage la trace d'une articulation des compétences ou de certaines « manières de faire ». On peut lire par exemple :

Pour chaque séquence, il définit, dans le cadre de sa progression, le (ou les) objectif(s) à atteindre, sélectionne les contenus d'enseignement, prévoit des démarches et situations variées favorables à l'apprentissage, adaptées aux objectifs qu'il s'est fixés et à la diversité de ses élèves.

Il prévoit la succession des différents moments d'une séquence et en particulier l'alternance des temps de recherche, de tri et de synthèse d'informations en utilisant, de manière appropriée, les différents supports, outils et techniques qu'il a choisis.

Venons-en au troisième et dernier ensemble de compétences.

Travailler en équipe et coopérer avec les parents et les partenaires de l'école

Le professeur participe à la vie de l'école ou de l'établissement. Il contribue également à la vie de l'institution scolaire à l'échelle de la circonscription du premier degré, du département, de l'académie ou même à celle du territoire national en participant à la formation initiale et continue des professeurs.

Il travaille avec les équipes éducatives de l'école et de ses classes ainsi qu'avec des enseignants de sa ou de ses disciplines. Le conseil des maîtres à l'école, le conseil pédagogique au collège ou au lycée constituent des instruments privilégiés du travail en équipe.

Le professeur coopère avec les parents et les partenaires de l'école.

Il aide l'élève à construire son projet d'orientation.

Connaissances

Le professeur connaît :

– le rôle et la fonction des associations de parents d'élèves ;

– les partenaires et les interlocuteurs extérieurs à l'école avec lesquels il est amené à travailler ;

– pour ce qui le concerne, les conventions et protocoles liant le ministère de l'éducation nationale à d'autres ministères ou organismes ;

– les dispositifs d'aide à l'insertion des élèves ;

– les procédures d'orientation et les différentes voies dans lesquelles les élèves peuvent s'engager.

Capacités

Le professeur est capable :

– d'inscrire sa pratique professionnelle dans l'action collective de l'école ou de l'établissement, notamment :

– dans le domaine de la programmation des enseignements ;

– dans le domaine de l'évaluation (supports et échelles d'évaluation harmonisés, livrets scolaires, bulletins trimestriels...) ;

– dans le domaine de l'orientation ;

– dans le domaine de l'aide et de l'insertion des élèves, en collaboration avec les autres personnels (professeurs principaux, conseillers principaux d'éducation, enseignants du réseau d'aide spécialisée aux élèves en difficulté (RASED), personnels d'orientation et du secteur médico-social...) ;

– dans le domaine de l'éducation artistique et culturelle par la connaissance des principaux partenaires (professionnels et établissements relevant du ministère chargé de la culture, collectivités territoriales, associations) ;

– dans le domaine des partenariats éducatifs avec les services de l'État (culture, emploi, justice, police, environnement et développement durable, défense...) ;

– de communiquer avec les parents :

– en contribuant à l'établissement d'un dialogue constructif dans le but de les informer sur les objectifs de son enseignement ou de son activité, de rendre compte des évaluations dans un langage adapté, d'examiner les résultats, les aptitudes de leurs enfants, les difficultés constatées et les possibilités d'y remédier ;

– en mobilisant ses connaissances dans le domaine de l'orientation pour aider l'élève et ses parents dans l'élaboration d'un projet professionnel ;

– de contribuer, en coopérant avec des partenaires internes ou externes à l'institution, à la résolution des difficultés spécifiques des élèves dans le domaine de la santé, des comportements à risques et de la grande pauvreté ou de la maltraitance ;

– d'utiliser les possibilités offertes par les services éducatifs installés auprès des musées et autres institutions culturelles, notamment dans le cadre de l'éducation artistique et culturelle ;

– de favoriser l'engagement des parents dans la vie de l'établissement comme dans la valorisation des savoirs ;

– de s'impliquer dans des tâches de formation.

Attitudes

Le professeur observe, dans l'exercice de son activité professionnelle, une attitude favorisant le travail collectif, le dialogue avec les parents et la dimension partenariale.

Se former et innover

Le professeur met à jour ses connaissances disciplinaires, didactiques et pédagogiques, il sait faire appel à ceux qui sont susceptibles de lui apporter aide ou conseil dans l'exercice de son métier. Il est capable de faire une analyse critique de son travail et de modifier, le cas échéant, ses pratiques d'enseignement.

Connaissances

Le professeur connaît l'état de la recherche :

– dans sa discipline ;

– dans le domaine de la didactique, de la pédagogie et de la transmission de savoirs (processus d'apprentissage, didactique des disciplines, utilisation des technologie de l'information et de la communication...).

Le professeur connaît la politique éducative de la France.

Capacités

Le professeur est capable de tirer parti des apports de la recherche et des innovations pédagogiques pour actualiser ses connaissances et les exploiter dans sa pratique quotidienne.

Attitudes

Le professeur fait preuve de curiosité intellectuelle et sait remettre son enseignement et ses méthodes en question. Il s'inscrit dans une logique de formation professionnelle tout au long de la vie.

1.5. La rubrique ***Faisons le point*** n'a pas véritablement lieu d'être aujourd'hui : elle n'existera d'ailleurs que de temps en temps, lorsqu'il y aura matière à… faire le point !

a) En référence au travail de la journée de rentrée, on peut rappeler ici la diffusion de la notice intitulée ***Première rentrée des classes***.

b) Comme tous les documents qui seront diffusés et étudiés, cette notice appelait – ***et appelle !*** – un examen attentif, scrupuleux de la part de chacun : les difficultés qu'on peut y trouver peuvent bien entendu faire l'objet de « questions de la semaine » (voir *infra*), ce qui conduira alors le Séminaire à revenir sur l'étude de la notice.

1.6. Passons à la rubrique des ***Questions de la semaine*** (qui, à partir de la séance prochaine du Séminaire, ouvrira chaque séance).

a) On a vu que le programme de travail du séminaire découlera pour une part essentielle de ces questions.

• Les questions de la semaine permettent à chacun, chaque semaine, de s'exprimer en s'interrogeant et en interrogeant.

• Toute question posée est consultable par chacun des participants sur le site Internet de l'IUFM : cette consultation suppose un mot de passe qui ne doit pas être diffusé à l'extérieur de la promotion.

• Mise ainsi par écrit – et rendue publique ***à l'intérieur du Séminaire*** –, une « question de la semaine » devient *ipso facto* un ***problème*** posé devant le Séminaire, même si les dynamiques en cours conduisent à différer le travail collectif sur tel ou tel de ces problèmes.

• C'est par les questions de la semaine que passe une part fondamentale de l'apport des participants au travail du Séminaire, notamment sous la forme de « remontées du terrain », qu'il s'agisse du stage en responsabilité ou des autres stages : les prendre au sérieux est une dimension du respect que chacun doit porter à la formation, aux formateurs et aux formés. On notera à cet égard que ce dispositif qui existe depuis une dizaine d'années dans le cadre du Séminaire répond clairement à l'objectif de formation en alternance explicité dans le cahier des charges de la formation des maîtres, puisqu'il permet l'articulation entre les besoins exprimés par les élèves professeurs et les apports du Séminaire.

« Des savoirs théoriques déconnectés de la pratique sont inefficaces dans une formation professionnelle et, symétriquement, les situations rencontrées sur le terrain par les professeurs stagiaires ne sont pleinement formatrices que si elles sont analysées à l'aide d'outils conceptuels et des apports de la recherche universitaire. (...) La formation en IUFM doit être en prise sur la réalité scolaire et dispensée en fonction des situations professionnelles rencontrées par les professeurs ».

b) Chacun prend donc le mardi matin un temps de réflexion pour procéder à un examen des difficultés principales qu'il a pu rencontrer jusqu'ici, puis en sélectionne une ou deux qu'il rédige soigneusement, de façon concise, mais clairement explicite.

En séminaire, le mardi après-midi, on examine quels problèmes ont été portés devant le Séminaire la semaine précédente. Nous inaugurons ce travail ici à partir des questions qui ont été posées lors de la journée de rentrée.

Une préoccupation essentielle est d'abord la ***programmation de l'étude***. Voici les questions concernées.

1. Quel doit être le rythme idéal des DS, DM et contrôles ? (Y a-t-il une quantité minimum imposée par trimestre ? Laquelle ?) (0)
2. En moyenne, combien d'interrogations de cours doit-on faire en un trimestre ? (0)
3. Comment doit-on organiser « le bilan » de la classe c'est-à-dire les devoirs à la maison et les devoirs surveillés (fréquence : rythme, difficulté) ? (0)
4. Quelle périodicité pour les contrôles, évaluations... ? (0)
5. Y a-t-il un nombre de notes à avoir pendant un trimestre (minimum, maximum) ? (0)
6. Quelle doivent-être les durées d'un cours, d'un DS, d'un DM pour une classe de seconde ? (2de, 0)
7. Est-il conseillé de compléter le mode de notation par devoir (maison / en classe) par des notes régulières et ne concernant qu'une partie des élèves (oral, relevé « aléatoire » de quelques exercices rédigés à la maison) pour inciter à un travail régulier et une participation active ? (0)
8. Si l'on choisit de faire un mini-contrôle hebdomadaire des connaissances (10 min), est-il préférable de corriger immédiatement à l'oral ou de ramasser les copies pour les corriger individuellement ? (0)
9. Est-ce une bonne idée de prévoir des contrôles « surprise » ou non, tout au long de l'année ? (0)
10. Comment contraindre les élèves à fournir un travail personnel (devoirs à la maison, ...) ? (0)
11. Comment déterminer quelles sont les parties du programme sur lesquelles on doit insister ? (les parties importantes) (0)
12. Doit-on baser notre enseignement sur les manuels scolaires imposés par les établissements de manière exclusive ou peut-on chercher ailleurs nos sources, dans la mesure où l'on respecte le programme ? (0)
13. La notion de fonction (étude qualitative) est abordée dans les nouveaux programmes en classe de 3^{e}. Cette notion est aussi dans le nouveau programme de seconde. Doit-on reprendre entièrement la notion en

repartant de zéro ou peut-on aller plus rapidement sur les choses « simples » ? (0)
14. Lors de la préparation d'un test d'entrée, quelle importance doit-on/peut-on accorder aux notions ne relevant pas du socle commun (collège) ?
N.B. La question est peu pertinente en ces temps de rentrée, mais elle pourra être soulevée en temps voulu...(0)
15. Que faut-il vraiment transcrire dans le cahier de texte de la classe ? (0)
16. Quels documents sont à remplir en début et en fin de cours ? (0)

On peut remarquer, sans anticiper sur le forum, que la programmation concerne des ***unités temporelles diverses***, allant d'une séance d'une heure à une année, en passant par une séquence ou une semaine. Dans ce cadre la question des révisions est abordée indirectement, comme en témoignent les questions 13 et 14.

Cette thématique est reliée, plus ou moins directement, à la question de l'***organisation et*** de la ***gestion de l'étude*** :

1. Que faut-il faire lorsque les élèves n'écoutent plus le professeur ? (0)
2. Que faire si on se rend compte que depuis quelques séances les élèves ne suivent plus ? (0)
3. Gestion du matériel : Doit-on imposer aux élèves d'apporter systématiquement tout le matériel (au sens large : manuel, compas, rapporteur, calculatrice, …) pour être sûr de l'avoir à disposition ? Quitte à devenir plus souple ensuite si les élèves suivent les consignes au cas par cas. Sinon je crains qu'un « oubli » ponctuel devienne systématique. (0)
4. Les élèves sont-ils obligés d'acheter une calculatrice ? Sinon, leur sont-elles prêtées ? Peut-on exiger la calculatrice à un devoir ? (2^{de}, 0)
5. a) Comment être rigoureux afin qu'il puisse avoir un cahier bien tenu ? Faut-il noter en prélevant leur cahier ? b) Quelles sont les calculatrices à conseiller pour une classe de seconde ? (0)

Un deuxième centre d'intérêt est constitué de la ***structure ternaire de l'étude***.

1. Au sujet de la structure ternaire de l'étude : c'est chaque rubrique « Activités, Synthèse, exercices » qui est partagée selon les différents domaines ou le contraire, chaque domaine partagé suivant chacune des trois rubriques précédentes, ou est-ce indifférent du moment que le partage y est ? (0)
2. Est-il obligatoire de prendre une activité pour chaque thème ? (0)
3. Les AER peuvent-elles être inspirées par le contexte historique lié à l'utilisation ou la découverte d'une notion ou d'un résultat au programme ? (0)
4. La didactique de l'enseignement des mathématiques peut-elle être multiforme ? Comprendre, apprendre, appliquer est-il le seul schéma de structuration (ternaire) ? (0)

Une troisième préoccupation, plus massive, concerne la question de ***la discipline,*** de ***l'autorité et des sanctions.***

1. Y a-t-il des « stratégies » à adopter lors de « conflits » avec un élève ou bien lorsque la classe est trop bruyante ? (0)
2. Quelles sont les méthodes (les moyens) dont on dispose pour gérer/canaliser un élève particulièrement

perturbateur, nuisible au bon déroulement du cours ? Peut-on, en extrême limite, l'exclure du cours, quitte à outrager le droit à l'éducation pour tous ?Priver un élève de cours au bénéfice de trente autres ? (0)

3. Quel type de sanctions est-il conseillé de brandir aux élèves pour une efficacité satisfaisante ? (0)

4. a) « Entre les murs » fiction ou réalité ? Le prof est-il absolument seul face à une situation d'échec scolaire / indiscipline massive ?

Plus pratiquement...

b) Est-ce une bonne politique d'imposer le placement des élèves en classe (par exemple, pour séparer les éléments turbulents ou pour aider à retenir les noms) au risque de paraître arbitraire ? (0)

5. Comment :

gérer une bagarre en cours ?

une insulte gratuite entre élèves ou entre élève professeur ?

un refus d'aller au tableau ? (0)

6. Comment sanctionner un élève sans le pénaliser et en lui donnant envie de (re)travailler ? (0)

7. Faut-il réagir directement si un élève pose des problèmes de discipline ? (0)

Ce qu'il convient de faire lors de la première séance est une quatrième difficulté au centre des préoccupations d'une bonne partie de la promotion :

1. Est-ce bien de demander aux élèves une petite fiche à la rentrée sur laquelle seraient indiqués leurs objectifs professionnels ou d'autres informations ? (0)

2. Est-il utile de demander sur la fiche de renseignements les coordonnées, professions des parents etc. ou bien cela nous sera fourni par l'administration ? (0)

3. a) Peut-on (Doit-on) faire une mini-évaluation du niveau de la classe lors de la première (ou deuxième) séance ?

b) Doit-on énumérer toutes les sanctions que l'on donnera en cas de bavardages, copiages, insolence, oubli de matériel, travail non fait... ? (0)

4. Comment recevoir les élèves lors de la première heure de cours ? (0)

5. a) Doit-on leur faire peur le premier jour ?

b) Peut-on faire un test surprise le premier jour (afin d'évaluer leur niveau) ? (0)

6. Comment se présenter aux élèves le jour de la première séance ? Doit-on faire preuve de plus d'autorité que par la suite ? Etc. (0)

7. Faut-il faire une petite interrogation dès le premier cours (non notée) pour évaluer le niveau de la classe ? (0)

8. Doit-on, lors du premier cours, dire aux élèves (et pourquoi pas expliquer) que l'on est stagiaire ? (0)

9. Faut-il expliquer aux élèves mon statut de professeur stagiaire ? (0)

10. Peut-on, pendant la première séance, ne pas commencer le programme pour expliquer le fonctionnement de l'année et surtout les règles concernant la discipline ? (0)

11. Que faire lors de la première rencontre avec les élèves ? Dois-je dire que je suis stagiaire ou ne rien dire à ce sujet (simplement qu'il y aura de temps en temps quelqu'un au fond de la classe) ? (2de, 0)

12. En classe de 4^{e}, peut-on écrire les règles de vie avec les élèves lors de la première séance, en les guidant vers des règles que l'on aura établies au préalable ? (0)

13. Lors de la première séance avec les élèves, doit-on leur faire remplir une fiche : nom, prénom, profession des parents, etc. ? (0)

14. Lors du premier cours, est-il conseillé de demander aux élèves de remplir un papier avec des informations les concernant ? Ou peut-on demander au professeur principal de nous communiquer les siens ? (2^{de}, 0)

Seules quelques questions échappent à ces thématiques : elles abordent notamment l'hétérogénéité supposée de la classe ou encore les dispositifs d'aide à l'étude (ATP au collège).

2. Forum des questions

Lorsqu'une question de la profession se pose, une réponse digne d'un professionnel de l'enseignement ne peut – sous peine de devenir rapidement inutilisable – consister seulement en un ***Oui*** ou un ***Non***, ou, selon le cas, en l'indication d'une ***recette*** : un tel élément de réponse doit apparaître ***justifié***, ce qui suppose en dernier ressort une ***« théorie de l'enseignement »***. Une réponse est donc une réalité ***qui se construit***, et qui se construit en général ***contre*** des réponses qu'il faut d'abord ***déconstruire***, ce travail de ***déconstruction-reconstruction*** demandant souvent ***un temps incompressible***. Pour progresser véritablement, il faut par conséquent apprendre à vivre avec des ***questions ouvertes*** – au cours de cette année de formation, et ***tout au long de sa carrière***.

Nous débuterons le travail d'élaboration de réponses par des questions relatives à la programmation de l'étude.

2.1. Programmer l'étude

Plusieurs des questions de la rentrée, on l'a déjà noté, portent sur la programmation de l'étude. On en reproduit à nouveau la plupart ci-après.

1. Quel doit être le rythme idéal des DS, DM et contrôles ? (Y a-t-il une quantité minimum imposée par trimestre ? Laquelle ?) (0)
2. En moyenne, combien d'interrogations de cours doit-on faire en un trimestre ? (0)
3. Comment doit-on organiser « le bilan » de la classe c'est-à-dire les devoirs à la maison et les devoirs surveillés (fréquence : rythme, difficulté) ? (0)
4. Quelle périodicité pour les contrôles, évaluations... ? (0)
6. Quelle doivent-être les durées d'un cours, d'un DS, d'un DM pour une classe de seconde ? (2^{de}, 0)
8. Si l'on choisit de faire un mini-contrôle hebdomadaire des connaissances (10 min), est-il préférable de corriger immédiatement à l'oral ou de ramasser les copies pour les corriger individuellement ? (0)
9. Est-ce une bonne idée de prévoir des contrôles « surprise » ou non, tout au long de l'année ? (0)
12. Doit-on baser notre enseignement sur les manuels scolaires imposés par les établissements de manière exclusive ou peut-on chercher ailleurs nos sources, dans la mesure où l'on respecte le programme ? (0)
13. La notion de fonction (étude qualitative) est abordée dans les nouveaux programmes en classe de 3^e. Cette notion est aussi dans le nouveau programme de seconde. Doit-on reprendre entièrement la notion en repartant de zéro ou peut-on aller plus rapidement sur les choses « simples » ? (0)

1. Nous aborderons ici en premier lieu la question des devoirs. On trouve d'abord des indications dans le « Préambule pour le collège ». Dans le paragraphe 4.9. L'évaluation, les auteurs écrivent :

L'évaluation sommative, en mathématiques, est réalisée sous trois formes complémentaires :

- des interrogations écrites courtes dont le but est de vérifier qu'une notion ou une méthode sont correctement assimilées ;
- des devoirs de contrôle courts et peu nombreux qui permettent de vérifier, de façon plus synthétique, la capacité des élèves à utiliser leurs acquis, à la suite d'une phase d'apprentissage ;
- certains devoirs de contrôle peuvent être remplacés par un bilan trimestriel qui est l'occasion de faire le point sur les acquis des élèves relatifs à une longue période d'étude.

Commentaires oraux

Le paragraphe 4.8. Le travail personnel des élèves donne des indications supplémentaires :

En étude ou à la maison, ce type de travail est nécessaire non seulement pour affermir les connaissances de base et les réinvestir dans des exemples simples mais aussi pour en élargir le champ de fonctionnement et susciter ainsi de l'intérêt pour l'activité mathématique. Il contribue aussi à habituer l'élève à l'indispensable régularité d'un travail autonome, complémentaire de celui réalisé avec le professeur.
Il peut prendre diverses formes :
• résolution d'exercices d'entraînement, combinée avec l'étude de la leçon pour asseoir les connaissances ;
• travaux individuels de rédaction pour développer les capacités d'expression écrite et la maîtrise de la langue ;
• résolution de problèmes variés (exercices de synthèse, énigmes, jeux mathématiques...) pour mettre en œuvre des démarches heuristiques en temps non limité ;
• construction d'objets géométriques divers (frises, pavages, solides,...) en utilisant ou non l'informatique ;
• lectures ou recherches documentaires, en particulier sur l'histoire de la discipline ou plus généralement des sciences pour enrichir les connaissances ;
• constitution de dossiers sur un thème donné.
Pour ces travaux en dehors de la classe, il convient de favoriser l'accès des élèves aux ordinateurs de l'établissement qui doivent être munis des logiciels adéquats.
La correction individuelle du travail d'un élève est une façon d'en apprécier la qualité et de permettre à son auteur de l'améliorer, donc de progresser.

Commentaires oraux

2. Nous examinerons ensuite un texte de l'IGEN de mathématiques, déjà un peu ancien (mars 1997) mais toujours utile, qui fait le point sur les objectifs des devoirs et en tire quelques conséquences sur la mise en œuvre de ces dispositifs. Nous le commenterons au fur et à mesure de sa lecture. Les surlignements sont des ajouts des auteurs du Séminaire.

Les travaux écrits des élèves en mathématiques au collège et au lycée
IGEN – Groupe de mathématiques

I. Rappel des objectifs

Les programmes de mathématiques du lycée et du collège insistent sur le rôle important des travaux individuels de rédaction. Ainsi, dans les programmes de collège peut-on lire :
« Le travail personnel des élèves en classe, en études ou à la maison est essentiel à leur formation. Il a des fonctions diversifiées :

– la résolution d'exercices d'entraînement, combinée avec l'étude du cours, permet aux élèves d'affermir leurs connaissances de base et de les mettre en œuvre sur des exemples simples ;

– les travaux individuels de rédaction sont nécessaires au développement des capacités d'expression écrite et de la maîtrise de la langue ;

– les devoirs de contrôle, courts et peu nombreux, permettent de vérifier les acquis des élèves ».

Dans les programmes du lycée, concernant l'organisation du travail personnel des élèves, on trouve les précisions suivantes :

« Les travaux proposés en dehors du temps d'enseignement, à la maison ou au lycée, jouent un rôle primordial ; ils ont des fonctions diversifiées :

– la résolution d'exercices d'entraînement, combinée avec l'étude du cours, permet aux élèves d'affermir leurs connaissances de base et d'évaluer leur capacité à les mettre en œuvre sur des exemples simples ;

– l'étude de situations plus complexes, sous forme de préparation d'activités en classe ou de problèmes à résoudre et à rédiger, alimente le travail de recherche, individuel ou en équipe, et permet aux élèves d'évaluer leur capacité à mobiliser leurs connaissances dans des secteurs variés ;

– les travaux individuels de rédaction (solution d'un problème, mise au point d'exercices étudiées en classe, rapport de synthèse sur un thème d'étude, analyse critique d'un texte…) visent essentiellement à développer les capacités de mise au point d'un raisonnement et d'expression écrite ; vu l'importance de ces objectifs, ces travaux de rédaction doivent être fréquents, mais leur longueur doit rester raisonnable ;

– les devoirs de contrôle, peu nombreux, combinent des exercices d'application directe du cours (voire des questions de cours), des problèmes plus synthétiques, comportant des questions enchaînées de difficulté progressive et permettant aux élèves de vérifier leurs résultats… ».

II. Les travaux écrits en dehors de la classe

Il convient dans ce domaine de distinguer les exercices d'entraînement et les travaux individuels de rédaction :

– les exercices d'entraînement, dont la résolution, en étude où à la maison, est assortie d'une rédaction sur un cahier spécialisé et d'une correction au tableau, font partie intégrante de l'apprentissage. En tant que tels, ils doivent, en règle générale, accompagner toutes les séances de mathématiques ;

– les travaux individuels de rédaction (et notamment les « devoirs à la maison »), dont les fonctions sont multiples (voir I) peuvent et doivent prendre des formes variées (résolution individuelle, ou en petits groupes, d'un problème comportant éventuellement des questions ouvertes et aboutissant à une rédaction individuelle, compte rendu et synthèse d'une séance de travaux dirigés, recherche d'exemples, constitution d'un dossier sur un thème donné, mise au point et rédaction de solutions d'exercices dont l'étude a été engagée en classe, …).

Ils font l'objet d'une rédaction individuelle sur copie, d'une correction détaillée des copies par le professeur, et d'un rapport de correction destiné notamment à rectifier les erreurs les plus courantes et à dégager les méthodes essentielles.

À tous les niveaux d'enseignement, le rôle de ces travaux est très important :

– pour développer le goût de la recherche ;

– pour concourir à la maîtrise de la langue française et au développement des capacités de communication ;

– pour encourager le travail en équipe ;

– pour gérer l'hétérogénéité des élèves et valoriser leur volonté de progression, compte tenu de la diversité des capacités et des motivations de chacun.

L'importance des travaux individuels de rédaction étant capitale pour la formation des élèves, notamment dans la perspective de la poursuite d'études, leur fréquence doit être élevée. Ainsi, hors les semaines où figure un devoir de contrôle (voir III), la présence d'un travail hebdomadaire de rédaction en temps libre est la règle dans les classes scientifiques (1^{re} et terminale S, 1^{re} et terminale L et ES comportant une option ou un enseignement de spécialité en mathématiques). Cette fréquence constitue une solide base de principe dans toutes les classes mais peut éventuellement être aménagée en fonction de la section et du niveau d'enseignement concernés (par exemple dans les classes de lycée technologique à horaire chargé). En fait, c'est certainement la longueur et la difficulté des devoirs qu'il convient d'adapter afin d'obtenir un équilibre raisonnable, en fonction du niveau d'enseignement. Dans ce domaine, il vaut mieux faire « souvent et court » que « rarement et long ». Il s'agit en effet de donner aux élèves l'habitude de ces travaux, et de leur faire prendre conscience du caractère essentiel de ceux-ci en montrant notamment que la recherche et la résolution d'un problème sont inséparables de la mise au point et de la rédaction de la solution trouvée. À cet égard, la mise en œuvre de ces principes par l'ensemble des professeurs dès la classe de sixième et la manifestation constante de l'intérêt et de l'importance accordés à ce type de travaux sont des moyens forts pour accentuer cette prise de conscience.

III. L'évaluation en temps limité

Il convient de garder un rapport correct entre l'évaluation et la formation : c'est l'évaluation qui est au service de la formation, et non le contraire. En particulier, il ne faut pas négliger, par un choix judicieux des épreuves, le rôle formateur de l'évaluation.

Il convient de faire se côtoyer deux types d'épreuves écrites d'évaluation :

– les interrogations écrites courtes (10 à 20 min) dont le but est de vérifier qu'une notion, une méthode ou une démonstration est correctement assimilée. On peut en prévoir une par chapitre du cours (soit une par quinzaine en moyenne) ;

– les devoirs de contrôle (de 30 min en 6^{e} à 3 ou 4 h en terminale) sont peu fréquents (2 à 3 par trimestre) et doivent rester de difficulté et de longueur raisonnables. Ils ne doivent en aucun cas déborder du programme de la classe, ni faire appel à des notions ou des méthodes qui n'y sont pas étudiées.

IV. La correction des copies et la notation

Les objectifs de formation poursuivis à travers les travaux écrits (à la maison et en classe) doivent être communiqués et régulièrement rappelés aux élèves. C'est en rapport avec ces objectifs que la correction et la notation des copies doit prendre son sens : la clarté des raisonnements, la qualité de la rédaction et le soin apporté à la présentation jouent un rôle essentiel. Dans cette optique, il convient d'annoter les copies par des appréciations écrites, des conseils, des remarques constructives.

La pertinence du calibrage de la notation constitue un objectif important : il convient d'éviter tant la sur-notation, génératrice d'illusion, que la sous-notation, génératrice de découragement.

2. Une partie des questions trouve ainsi des éléments de réponses. Ainsi « on doit faire » entre 2 et 3 contrôles par trimestre [un de ces contrôles pouvant être remplacé par un bilan trimestriel], un devoir à la maison toutes les semaines (hors semaine de contrôle) et il faut donc donner davantage de DM que de DS. Les DM doivent être fréquents mais courts et la durée des DS doit être adapté à la classe. Ces derniers doivent rester de difficulté et de longueur raisonnables. Ils ne doivent en aucun cas déborder du programme de la classe, ni faire appel à des notions ou des méthodes qui n'y sont pas étudiées. Ils doivent être complétés par au moins une interrogation écrite courte (10 à 20 min) par chapitre. On notera que le texte insiste sur la correction des copies et leur annotation. Il précise que les travaux écrits en dehors de la classe doivent faire l'objet « d'un rapport de correction destiné notamment à rectifier les erreurs les plus courantes et à dégager les méthodes essentielles ».

3. À propos du calibrage des DS, le texte signale « Ils ne doivent en aucun cas déborder du programme de la classe, ni faire appel à des notions ou des méthodes qui n'y sont pas étudiées. » C'est cela qui permet de calibrer aussi bien du point de vue du temps que de la difficulté les énoncés des DS.

4. On ne trouve aucune mention de « contrôle surprise » : les contrôles et les interrogations courtes doivent être annoncés, ne serait-ce que pour tenir compte de la diversité des rythmes d'apprentissage dans la classe. On ajoutera que cette pratique de « contrôle surprise » est très contestable du point de vue éthique : elle relève en effet d'une forme de « tyrannie », au sens où le professeur lui-même (et non le rôle qu'il a à tenir dans l'institution) s'impose d'une manière absolue, sans qu'il y ait un gain pour l'avancée de l'étude.

5. Nous en viendrons maintenant à la question de la reprise de l'étude, soulevée notamment par la question 13. que nous reproduisons ci-dessous.

13. La notion de fonction (étude qualitative) est abordée dans les nouveaux programmes en classe de 3^e. Cette notion est aussi dans le nouveau programme de seconde. Doit-on reprendre entièrement la notion en repartant de zéro ou peut-on aller plus rapidement sur les choses « simples » ? (0)

C'est un point essentiel : nous l'avons dit dès la journée de rentrée, il faut éviter les révisions systématiques, ce qui est noté dès le préambule du programme de collège.

Il est nécessaire d'entretenir les capacités développées dans les classes antérieures, indispensables à la poursuite des apprentissages et à la maîtrise du socle commun par tous les élèves. Cet entretien doit être assuré non pas des révisions systématiques mais par des activités appropriées. (...) L'enseignant prend en compte les connaissances antérieures des élèves : mise en valeur des point forts et repérage des difficultés de chaque élève à partir d'évaluations diagnostiques. Ainsi l'enseignement peut-il être organisé au plus près des besoins des élèves en tenant compte du fait que tout apprentissage s'inscrit nécessairement dans la durée et s'appuie sur les échanges qui peuvent s'instaurer dans la classe. Il convient de faire fonctionner les notions et « outils » mathématiques étudiés au cours des années précédentes dans de nouvelles situations, autrement qu'en reprise ayant un caractère de révision.

Il convient donc d'abord pour le professeur d'examiner ce qui a dû être étudié l'année précédente en examinant le programme de la classe antérieure et le ou les documents d'accompagnement ; puis ce qui doit être étudié dans la classe et enfin de déterminer où passe la frontière entre ce qui doit être connu et ce qui doit être nouvellement étudié. On fera ce travail ici à propos de la notion de fonction en seconde.

Voici d'abord ce qui figurait au programme de la classe de 3e en vigueur en 2007-2008

L'un des objectifs est de faire émerger progressivement, sur des exemples, la notion de fonction en tant que processus faisant correspondre, à un nombre, un autre nombre. Les exemples mettant en jeu des fonctions sont issus de situations concrètes ou de thèmes interdisciplinaires. Les fonctions linéaires et affines apparaissent alors comme des exemples particuliers de tels processus. L'utilisation des expressions « est fonction de » ou « varie en fonction de », amorcée dans les classes précédentes, est poursuivie *et est associée à l'introduction de la notation f(x)*. L'usage du tableur grapheur contribue aussi à la mise en place du concept, dans ses aspects numériques comme dans ses aspects graphiques. La notion d'équation de droite n'est pas au programme de la classe de troisième.

Connaissances	Capacités	Exemples d'activités, commentaires	Commentaires spécifiques pour le socle
Dans les trois premières colonnes, une phrase ou une partie de phrase en italiques désigne une connaissance, une capacité ou une activité qui n'est pas exigible dans le socle.			
1.1. Notion de fonction	*- Déterminer l'image*	*Les activités prennent appui sur des*	

[Thèmes de convergence]	*d'un nombre par une fonction déterminée par une courbe, un tableau de données ou une formule.* [SVT, Histoire, Géographie, Physique…]	*situations simples issues, entre autres, de la géométrie (variation d'aires, de volumes), de la physique ou de problèmes de la vie courante. L'idée de variable est alors dégagée et rapprochée de celle de paramètre en SVT et de variable d'état en Physique. Toute définition générale de la notion de fonction et la notion d'ensemble de définition sont hors programme.* *La notion d'antécédent est introduite (et le terme antécédent utilisé), par lecture directe dans un tableau ou sur une représentation graphique. La détermination d'un antécédent à partir de l'expression algébrique d'une fonction n'est exigible que dans le cas des fonctions linéaires ou affines ce qui n'interdit pas de la solliciter dans d'autres cas. Le caractère exact des calculs quand la fonction est définie par une « formule » et le caractère approché de toute lecture graphique (sauf indication complémentaire) sont évoqués et distingués.* *La notation $x \mapsto f(x)$ est utilisée. Un travail est conduit sur le rôle différent joué par les parenthèses dans la notation f(x) de l'image de x et dans les expressions algébriques comme par exemple 1,5 (x - 2).*	

Connaissances	Capacités	Exemples d'activités, commentaires	Commentaires spécifiques pour le socle
Dans les trois premières colonnes, une phrase ou une partie de phrase en italiques désigne une connaissance, une capacité ou une activité qui n'est pas exigible dans le socle.			
1.2. Fonction linéaire, fonction affine. Proportionnalité *Fonction linéaire*	*- Déterminer par le calcul l'image d'un nombre donné et l'antécédent d'un nombre donné.* *- Déterminer l'expression algébrique d'une*	En classe de troisième, il s'agit de compléter l'étude de la proportionnalité par une synthèse d'un apprentissage commencé à l'école primaire. *La notion de fonction linéaire offre un modèle mathématique pour le traitement des situations qui relèvent de la proportionnalité et contribue à cette synthèse. Dans cet esprit, la définition d'une fonction linéaire de coefficient a s'appuie sur l'étude des*	Il est attendu des élèves dans le cadre du socle commun qu'ils sachent émettre une hypothèse de proportionnalité dans une situation issue de la vie courante ou d'une autre discipline. La capacité « utiliser, dans le plan muni d'un repère, la caractérisation de la proportionnalité par l'alignement de points avec l'origine », non exigible en classe de quatrième, le devient en classe de

	fonction linéaire à partir de la donnée d'un nombre non nul et de son image. *- Représenter graphiquement une fonction linéaire.* *- Lire sur la représentation graphique d'une fonction linéaire l'image d'un nombre donné et l'antécédent d'un nombre donné.* [SVT, Physique…]	*situations de proportionnalité rencontrées dans les classes précédentes.* L'utilisation de tableaux de proportionnalité permet de mettre en place le fait que le processus de correspondance est décrit par une formulation du type « je multiplie par *a* ». *Cette formulation est reliée à* $x \mapsto ax$. Pour des pourcentages d'augmentation ou de diminution, le fait que, par exemple, augmenter de 5 % c'est multiplier par 1,05 et diminuer de 5 % c'est multiplier par 0,95 est établi. *Certains traitements des situations de proportionnalité utilisés dans les classes précédentes sont reliés aux propriétés d'additivité et d'homogénéité de la fonction linéaire.* *Le théorème de Thalès permet d'établir que les points dont les coordonnées sont obtenues à l'aide d'une fonction linéaire sont sur une droite passant par l'origine du repère. L'enseignant peut en établir la preuve sur un exemple, la propriété étant admise dans le cas général. La relation* $y = ax$ *entre les coordonnées* (x,y) *d'un point M est caractéristique de son appartenance à la droite représentative de la fonction linéaire* $x \mapsto ax$. *Le nombre a est appelé coefficient directeur de la droite : c'est le nombre qui indique la direction de la droite, ce qui peut être constaté, à partir de différentes valeurs de ce coefficient.* *L'interprétation graphique du coefficient directeur est donnée et utilisée, notamment, pour lire graphiquement le coefficient d'une fonction linéaire représentée par une droite.*	troisième. La modélisation par une fonction linéaire ne relève pas du socle commun.

Connaissances	**Capacités**	**Exemples d'activités, commentaires**	**Commentaires spécifiques pour le socle**
Dans les trois premières colonnes, une phrase ou une partie de phrase en italiques désigne une connaissance, une capacité ou une activité qui n'est pas exigible dans le socle.			
Fonction affine [Thèmes de convergence]	*- Déterminer par le calcul l'image d'un nombre donné et l'antécédent d'un nombre donné.* *- Déterminer une*	*Parmi les situations qui ne relèvent pas de la proportionnalité, certaines sont cependant modélisables par une fonction dont la représentation graphique est une droite. Cette remarque peut constituer un point de départ à l'étude des fonctions affines. Pour ces fonctions, la*	

	fonction affine à partir de la donnée de deux nombres et de leurs images. *- Représenter graphiquement une fonction affine.* *- Lire sur la représentation graphique d'une fonction affine l'image d'un nombre donné et l'antécédent d'un nombre donné.*	*proportionnalité des accroissements de x et y est mise en évidence.* *Le processus de correspondance x* ↦ *ax + b est associé à son expression verbalisée : « je multiplie par a puis j'ajoute b », ce qui permet de noter qu'une fonction linéaire est une fonction affine particulière.* *La recherche de l'image ou de l'antécédent d'un nombre permet de donner du sens au calcul littéral et à la résolution des équations.* *La relation y = ax + b entre les coordonnées (x,y) d'un point M est caractéristique de son appartenance à la droite représentative de la fonction x* ↦ *ax + b.* *Les termes de coefficient directeur et d'ordonnée à l'origine sont introduits et chacun d'eux est expliqué : lien avec la direction de la droite, ordonnée du point d'abscisse nulle. L'interprétation graphique du coefficient directeur est utilisée aussi bien pour lire graphiquement le coefficient a d'une fonction affine représentée par une droite que pour tracer une droite, représentative d'une fonction affine, connaissant un de ses points et son coefficient a.* *Le problème de la détermination d'une fonction affine (ou linéaire) associée à une droite donnée dans un repère est intéressant comme contrepoint des études précédentes. Pour déterminer la fonction affine associée à une droite donnée dans un repère, les élèves sont entraînés à travailler soit numériquement soit en exploitant directement la représentation graphique.*	

Voici maintenant le programme de seconde :

1. Fonctions

L'objectif est de rendre les élèves capables d'étudier :

• un problème se ramenant à une équation du type $f(x) = k$ et de le résoudre dans le cas où la fonction est donnée (définie par une courbe, un tableau de données, une formule) et aussi lorsque toute autonomie est laissée pour associer au problème divers aspects d'une fonction ;

• un problème d'optimisation ou un problème du type $f(x) > k$ et de le résoudre, selon les cas, en exploitant les potentialités de logiciels, graphiquement ou algébriquement, toute autonomie pouvant être laissée pour associer au problème une fonction.

Les situations proposées dans ce cadre sont issues de domaines très variés : géométrie plane ou dans l'espace, biologie, économie, physique, actualité etc. Les logiciels mis à la disposition des élèves (tableur, traceur de courbes, logiciels de géométrie dynamique, de calcul numérique, de calcul formel, etc.) peuvent être utilement exploités.

Par ailleurs, la résolution de problèmes vise aussi à progresser dans la maîtrise du calcul algébrique et à approfondir la connaissance des différents types de nombres, en particulier pour la distinction d'un nombre de ses valeurs approchées.

Il s’agit également d’apprendre aux élèves à distinguer la courbe représentative d’une fonction des dessins obtenus avec un traceur de courbe ou comme représentation de quelques données. Autrement dit, il s’agit de faire comprendre que des dessins peuvent suffire pour répondre de façon satisfaisante à un problème concret mais qu’ils ne suffisent pas à démontrer des propriétés de la fonction.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Fonctions Image, antécédent, courbe représentative.	• Traduire le lien entre deux quantités par une formule. Pour une fonction définie par une courbe, un tableau de données ou une formule : • identifier la variable et, éventuellement, l’ensemble de définition ; • déterminer l’image d’un nombre ; • rechercher des antécédents d’un nombre.	Les fonctions abordées sont généralement des fonctions numériques d’une variable réelle pour lesquelles l’ensemble de définition est donné. Quelques exemples de fonctions définies sur un ensemble fini ou sur **N**, voire de fonctions de deux variables (aire en fonction des dimensions) sont à donner.
Étude qualitative de fonctions Fonction croissante, fonction décroissante ; maximum, minimum d’une fonction sur un intervalle.	• Décrire, avec un vocabulaire adapté ou un tableau de variations, le comportement d’une fonction définie par une courbe. • Dessiner une représentation graphique compatible avec un tableau de variations. Lorsque le sens de variation est donné, par une phrase ou un tableau de variations : • comparer les images de deux nombres d’un intervalle ; • déterminer tous les nombres dont l’image est supérieure (ou inférieure) à une image donnée.	Les élèves doivent distinguer les courbes pour lesquelles l’information sur les variations est exhaustive, de celles obtenues sur un écran graphique. Les définitions formelles d’une fonction croissante, d’une fonction décroissante, sont progressivement dégagées. Leur maîtrise est un objectif de fin d’année. ◇ Même si les logiciels traceurs de courbes permettent d’obtenir rapidement la représentation graphique d’une fonction définie par une formule algébrique, il est intéressant, notamment pour les fonctions définies par morceaux, de faire écrire aux élèves un algorithme de tracé de courbe.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Expressions algébriques Transformations d'expressions algébriques en vue d'une résolution de problème.	• Associer à un problème une expression algébrique. • Identifier la forme la plus adéquate (développée, factorisée) d'une expression en vue de la résolution du problème donné. • Développer, factoriser des expressions polynomiales simples ; transformer des expressions rationnelles simples.	Les activités de calcul nécessitent une certaine maîtrise technique et doivent être l'occasion de raisonner. Les élèves apprennent à développer des stratégies s'appuyant sur l'observation de courbes, l'anticipation et l'intelligence du calcul. Le cas échéant, cela s'accompagne d'une mobilisation éclairée et pertinente des logiciels de calcul formel.
Équations Résolution graphique et algébrique d'équations.	• Mettre un problème en équation. • Résoudre une équation se ramenant au premier degré. ◇ Encadrer une racine d'une équation grâce à un algorithme de dichotomie.	Pour un même problème, combiner résolution graphique et contrôle algébrique. Utiliser, en particulier, les représentations graphiques données sur écran par une calculatrice, un logiciel.
Fonctions de référence Fonctions linéaires et fonctions affines Variations de la fonction carré, de la fonction inverse.	• Donner le sens de variation d'une fonction affine. • Donner le tableau de signes de $ax+b$ pour des valeurs numériques données de a et b. • Connaître les variations des fonctions carré et inverse. • Représenter graphiquement les fonctions carré et inverse.	On fait le lien entre le signe de $ax+b$, le sens de variation de la fonction et sa courbe représentative. Exemples de non-linéarité. En particulier, faire remarquer que les fonctions carré et inverse ne sont pas linéaires.
Études de fonctions Fonctions polynômes de degré 2. Fonctions homographiques.	• Connaître les variations des fonctions polynômes de degré 2 (monotonie, extremum) et la propriété de symétrie de leurs courbes. • Identifier l'ensemble de définition d'une fonction homographique.	Les résultats concernant les variations des fonctions polynômes de degré 2 (monotonie, extremum) et la propriété de symétrie de leurs courbes sont donnés en classe et connus des élèves, mais peuvent être partiellement ou totalement admis. Savoir mettre sous forme canonique un polynôme de degré 2 n'est pas un attendu du programme. Hormis le cas de la fonction inverse, la connaissance générale des variations d'une fonction homographique et sa mise sous forme réduite ne sont pas des attendus du programme.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Inéquations Résolution graphique et algébrique d'inéquations.	• Modéliser un problème par une inéquation. • Résoudre graphiquement des inéquations de la forme : $f(x) < k$; $f(x) < g(x)$. • Résoudre une inéquation à partir de l'étude du signe d'une expression produit ou quotient de facteurs du premier degré. • Résoudre algébriquement les inéquations nécessaires à la résolution d'un problème.	Pour un même problème, il s'agit de : • combiner les apports de l'utilisation d'un graphique et d'une résolution algébrique, • mettre en relief les limites de l'information donnée par une représentation graphique. Les fonctions utilisables sont les fonctions polynômes de degré 2 ou homographiques.
Trigonométrie « Enroulement de la droite numérique » sur le cercle trigonométrique et définition du sinus et du cosinus d'un nombre réel.	• On fait le lien avec les valeurs des sinus et cosinus des angles de $0°$, $30°$, $45°$, $60°$, $90°$.	On fait le lien avec la trigonométrie du triangle rectangle vue au collège. La notion de radian n'est pas exigible.

Commentaires développés oralement : on a mis en évidence que si la notion de fonction et d'image, et de façon plus limitée celle d'antécédent, ont été travaillées dans le cadre du programme de troisième, le sens de variation des fonctions relève clairement du programme de seconde, y compris en ce qui concerne les fonctions linéaires et affines.

On complétera ce travail en explorant les ouvrages de la classe de 3e et l'épreuve du brevet 2009, ce que nous laissons au lecteur le soin de faire. Il reste ensuite à bâtir, à la lumière de ce travail, une « évaluation diagnostique », qui prendra la forme d'un ***test d'entrée*** dans l'étude du thème. Nous y reviendrons la semaine prochaine.

NB : nous avons brièvement développé à l'oral la question du test d'entrée dans l'étude d'un thème. Prévu un peu avant le début de l'étude du thème, il doit permettre de faire le point sur ce que les élèves savent effectivement relativement aux besoins de l'étude à mener. D'une durée de 15 à 20 minutes, il doit porter sur un petit nombre de spécimens de types de problèmes d'une difficulté graduée, sans partir de la difficulté la plus faible. Il peut être noté mais son poids dans la série des notes attribuées à l'élève doit être limité.

2.2. Structure ternaire

Certaines questions ont trait, on l'a vu, à la ***structure ternaire*** de l'étude On les cite à nouveau ci-après.

1. Au sujet de la structure ternaire de l'étude : c'est chaque rubrique « Activités, Synthèse, exercices » qui est partagée selon les différents domaines ou le contraire, chaque domaine partagé suivant chacune des trois rubriques précédentes, ou est-ce indifférent du moment que le partage y est ? (Anne-Marie Jacob, 0)
2. Est-il obligatoire de prendre une activité pour chaque thème ? (Mourad Elad, 0)
3. Les AER peuvent-elles être inspirées par le contexte historique lié à l'utilisation ou la découverte d'une notion ou d'un résultat au programme ? (Rémi Blanquet, 0)
4. La didactique de l'enseignement des mathématiques peut-elle être multiforme ? Comprendre, apprendre, appliquer est-il le seul schéma de structuration (ternaire) ? (Patrick Raoux, 0)

1. On rappellera d'abord à ce propos un passage de la notice Première rentrée des classes :

> 3.3. À l'ancienne opposition binaire Cours / Exercices s'est ainsi substituée une structure ***ternaire***, Activités / Synthèses / Exercices (& problèmes), qui doit elle-même trouver une traduction appropriée dans l'organisation des ***traces écrites***. À nouveau, même dans les classes ayant adopté une organisation ternaire du travail mathématique – elles sont la majorité –, on trouve encore trop souvent une organisation ***binaire*** des traces écrites, incongruité qui diminue l'efficacité du travail effectué avec les élèves. En rupture avec cette tradition souvent mécaniquement poursuivie, mais en harmonie avec l'organisation de l'étude très généralement adoptée, les traces écrites doivent donc comporter les trois rubriques indiquées ci-dessus.

La « division des traces écrites » apparaît donc comme une condition essentielle de la mise en œuvre d'une organisation de l'étude ternaire demandée par les programmes. Mais la façon d'opérer cette division ternaire est laissée à l'appréciation du professeur. On notera cependant qu'au collège notamment, le domaine Grandeurs et mesures est en relation avec les trois autres domaines : il sera ainsi quelquefois malcommode de séparer ce qui relève de ce domaine. On peut donc préférer, sans en faire une règle dirimante, séparer AER/synthèse/Exercices & problèmes, les domaines apparaissant en fonction des travaux effectués, certaines AER notamment pouvant se situer à l'intersection de deux domaines.

2. À propos de cette structure ternaire et de la question des activités notamment, on citera ici l'introduction du programme de mathématiques du collège :

> La compréhension et l'appropriation des connaissances mathématiques reposent sur l'activité de chaque élève qui doit donc être privilégiée. Pour cela, et lorsque c'est possible, sont choisies des situations créant un problème dont la solution fait intervenir des « outils », c'est-à-dire des techniques ou des notions déjà acquises, afin d'aboutir à la découverte ou à l'assimilation de notions nouvelles. Lorsque celles-ci sont bien maîtrisées, elles fournissent à leur tour de nouveaux « outils », qui permettent un cheminement vers une connaissance meilleure ou différente. Ainsi, les connaissances peuvent prendre du sens pour l'élève à partir des questions qu'il se pose et des problèmes qu'il résout. Les situations choisies doivent :
>
> - prendre en compte les objectifs visés et une analyse préalable des savoirs en jeu, ainsi que les acquis et les conceptions initiales des élèves ;
> - permettre un démarrage possible pour tous les élèves, donc ne reposer que sur des consignes simples et n'exiger, au départ, que des connaissances solidement acquises par tous ;
> - créer rapidement un problème assez riche pour provoquer des conjectures ;
> - rendre possible la mise en jeu, puis la formulation des notions ou des procédures dont l'apprentissage est visé ;
> - fournir aux élèves, aussi souvent que possible, des occasions de contrôle de leurs résultats, tout en favorisant un nouvel enrichissement ; on y parvient, par exemple, en prévoyant divers cheminements qui permettent de fructueuses comparaisons.
>
> Si la résolution de problèmes permet de déboucher sur l'établissement de connaissances nouvelles, elle est également un moyen privilégié d'en élargir le sens et d'en assurer la maîtrise. Pour cela, les situations plus ouvertes, dans lesquelles les élèves doivent solliciter en autonomie les connaissances acquises, jouent un rôle important. Leur traitement nécessite initiative et imagination et peut être réalisé en faisant appel à différentes stratégies qui doivent être explicitées et confrontées, sans nécessairement que soit privilégiée l'une d'entre elles.
>
> L'utilisation d'outils logiciels est particulièrement importante et doit être privilégiée chaque fois qu'elle est une aide à l'imagination, à la formulation de conjectures ou au calcul. Cette utilisation se présente sous deux formes indispensables, notamment dans le cadre des compétences du socle commun : l'usage d'un vidéoprojecteur en classe et l'utilisation par les élèves d'ordinateurs « en fond de classe » ou en salle informatique.
>
> (...)
>
> Pour être efficaces, les connaissances doivent être identifiées, nommées et progressivement détachées de leur contexte d'apprentissage.
>
> D'une part, toute activité (qui peut s'étendre sur plusieurs séances) doit être complétée par une synthèse. Celle-ci doit porter sur les quelques notions mises en évidence (définitions, résultats, théorèmes et outils de base) que, désormais, les élèves doivent connaître et peuvent utiliser. Elle est aussi l'occasion de dégager les méthodes de résolution de problèmes qui mettent en œuvre ces notions. Il convient, en effet, de préciser à chaque étape de l'apprentissage quelles connaissances sont désormais en place et donc directement utilisables.
>
> D'autre part, il est nécessaire de proposer des situations d'étude dont le but est de coordonner des acquisitions diverses. Dans cette optique, l'enseignant réalise, avec les élèves, des synthèses plus globales, à l'issue d'une période d'étude et propose des problèmes dont la résolution nécessite l'utilisation de plusieurs connaissances. Le traitement de ces problèmes permet de souligner le sens, l'intérêt, la portée des connaissances mathématiques, que ce soit dans d'autres disciplines ou dans la vie quotidienne (pourcentages, échelles, représentations graphiques...). Certains problèmes peuvent prendre appui sur des éléments empruntés à l'histoire des mathématiques. Les moyens modernes de communication (informatique, banques de données, audiovisuel...) sont également utilisés chaque fois que leur usage est justifié.

Commentaires développés oralement

1. La structure ternaire de l'étude est une exigence des programmes.

2. L’histoire des mathématiques peut fournir des situations utiles, notamment en tant que $\mathcal{R}^{\Diamond}$, mais on se méfiera de la propension à considérer une situation historique sans la mettre à l’épreuve, notamment du point de vue de la satisfaction des caractéristiques énumérées par le programme ; toute situation historique, si « intéressante » soit-elle, n’est pas un bon moyen de faire émerger une organisation mathématique.
3. Il faut donc que chaque notion du programme émerge d’une activité, ce qui ne veut pas dire que chaque notion doit faire l’objet d’une activité : on soulignera à propos le passage suivant de la notice Première rentrée des classes :

> Par contraste, l’activité que l’on qualifiera ici d’***activité d’étude et de recherche*** (AER), qui doit laisser une large place à l’action et à la réflexion ***des élèves***, est ***le cœur de la vie mathématique de la classe***. C’est là, en effet, que se construisent les mathématiques que le professeur doit enseigner et que les élèves doivent apprendre : toute AER proposée à la classe doit ainsi provoquer l’émergence de notions et outils mathématiques visés et se situer au sein d’un ***parcours d’étude et de recherche*** (PER) qui lui donne un sens plus global tout en permettant l’articulation des mathématiques produites par l’AER aux mathématiques déjà construites.

On reviendra longuement sur ces aspects : il est essentiel à garder en tête pour le moment qu’il faut essayer de choisir des ***activités*** « à fort pouvoir générateur », ***qui font émerger de préférence plusieurs notions.***
4. Un commentaire sur la synthèse : comme l’indique le programme, il y a plusieurs niveaux de synthèse et il faut s’efforcer de faire exister ce que le programme appelle « des synthèses plus globales ». On ajoutera une notation que nous développerons dans ce séminaire : il y a souvent de nombreux avantages à différer les épisodes de synthèse de façon à pouvoir suffisamment coordonner les connaissances produites, tout en faisant cependant des bilans d’étapes réguliers permettant de « préciser (...) quelles connaissances sont désormais en place et donc directement utilisables ».

3. Le schéma décrit par les programmes et développé dans ce Séminaire peut se synthétiser par « faire émerger », « institutionnaliser », « se mettre en main », ce qui est à l’évidence assez différent de ce qui est annoncé par l’auteur de la dernière question, la différence principale résidant en ce fait que le savoir n’est pas quelque chose d’extérieur, d’intangible sur lequel on n’a pas grande prise mais quelque chose de plastique et avec lequel on interagit fortement.

La question de l’autorité et des sanctions sera abordée la semaine prochaine.

3. Observation & analyse

3.1. Questions d’enseignement

a) Même si ***toutes*** les questions professionnelles sont importantes, si les réponses qu’on leur donne peuvent se révéler cruciales, le ***cœur du métier*** de professeur de mathématiques est fait de questions du type suivant : « Comment concevoir et réaliser une séance de travaux dirigés, dans une classe de terminale ES, sur la notion d’événements indépendants ? » Cette dernière question pourra par exemple surgir à l’occasion du ***stage de pratique accompagnée***, dès lors que celui-ci se déroule au lycée et que le ***professeur d’accueil*** a en responsabilité une terminale ES. Pour le moment, nous nous en tiendrons à de semblables questions, mais à propos des classes de la 5^{e} à la 2de.

b) Nous nous arrêterons ici sur la question *Q* suivante : « Comment concevoir et réaliser une séance (ou une partie de séance), en classe entière, dans une 5^{e}, à propos des médianes ? »

• L'examen du programme de 5[e] fait apparaître, dans le ***domaine*** de la géométrie, un ***secteur*** d'études intitulé ***Figures planes***. (Ce domaine comporte deux autres secteurs d'études : ***Prismes droits, cylindres de révolution et Symétries***.) Ce secteur *Figures planes* comporte comme ***thème d'étude***, *Médianes et hauteurs d'un triangle.*

• Voici ce que le programme *stricto sensu* dit du thème de la médiane et des hauteurs [1] :

> **Connaissances**
> *Médianes et hauteurs d'un triangle.*
>
> **Capacités**
> *Connaître et utiliser la définition d'une médiane et d'une hauteur d'un triangle.*
>
> **Exemples d'activités, commentaires**
> *Ces notions sont à relier au travail sur l'aire d'un triangle (cf. § 4.3.). Des activités de construction ou l'usage d'un logiciel de géométrie permettent de mettre en évidence les propriétés de concours des médianes et des hauteurs d'un triangle. La démonstration de ces propriétés n'est pas envisageable en classe de Cinquième, mais possible en classe de Quatrième.*
>
> **Commentaires spécifiques sur le socle**
> La notion de hauteur d'un triangle ne fait pas partie du socle. Le calcul de l'aire d'un triangle ne peut être envisagé que dans le cas d'une décomposition donnée en triangles rectangles.

Voici ce que contient le « § 4.3. » auquel il est fait référence dans la citation ci-dessus à propos de la médiane :

> **Connaissances**
> **4.3. Aires**
> *Parallélogramme, triangle, disque.*
>
> **Capacités**
> *(...) Calculer l'aire d'un triangle connaissant un côté et la hauteur associée. (...)*
>
> **Exemples d'activités, commentaires**
> *(...) La formule de l'aire du triangle est déduite de celles de l'aire du parallélogramme, du triangle rectangle ou du rectangle.*
> *Le fait que chaque médiane d'un triangle le partage en deux triangles de même aire est démontré. (...)*

• En revanche, le programme est fort peu disert sur ***l'utilisation*** de ces notions que les élèves doivent apprendre à maîtriser… Dans la présentation du domaine de la Géométrie, on peut cependant lire :

> En classe de Cinquième, l'étude des figures planes se poursuit. Une deuxième transformation géométrique, la symétrie centrale, permet de réorganiser et de compléter les connaissances sur les figures, dont certaines propriétés peuvent être démontrées, mais, pour le socle commun, ces démonstrations ne sont pas exigibles. Le programme s'organise autour du parallélogramme et du triangle.
> (...)
> Les travaux de géométrie plane prennent toujours appui sur des figures dessinées, suivant les cas, à main levée, à l'aide des instruments de dessin et de mesure, ou dans un environnement informatique. Ils sont conduits en liaison étroite avec l'étude des autres rubriques. Les diverses activités de géométrie habituent les élèves à expérimenter et à conjecturer, et permettent progressivement de s'entraîner à des justifications *au moyen de*

1 . On notera que la notion d'aire, que le programme lie fortement à la notion de médiane d'un triangle, relève du domaine d'étude Grandeurs et mesure. On a ici un indice supplémentaire du fait que l'ordre de rédaction du programme n'est pas un ordre d'étude avec la classe.

courtes séquences déductives mettant en œuvre les outils du programme et ceux déjà acquis en classe de Sixième.

Une question surgit donc, essentielle : « À quoi servent la notion médiane et, surtout, la propriété de concours des médianes d'un triangle ? Doit-on nommer ce point de concours ? Quels en sont, du moins, les usages possibles, pertinents en classe de 5e pour étudier les configurations ? »

• Les professeurs ont ainsi à affronter un problème clé : déterminer des ***raisons d'être*** de la propriété de concours des médianes et du centre de gravité. L'enseignement doit en effet se bâtir sur une réponse à la question $Q^{\#}$ suivante : Pourquoi la propriété de concours des médianes d'un triangle a-t-elle attiré l'attention des mathématiciens, et pourquoi demande-t-on aujourd'hui encore aux élèves de la connaître – en vue de quels usages, de quelles utilisations ?

c) La réponse qui sera apportée à la question $Q^{\#}$ précédente commandera la réponse apportée à la question Q : la rencontre effective des élèves avec la propriété de concours des médianes d'un triangle et, éventuellement le centre de gravité, devra se faire dans une situation où cette propriété et cette notion apparaîtront ***utiles***, voire ***indispensables***, pour résoudre un ***problème*** (de géométrie) d'un certain ***type*** qui, lui-même, puisse être regardé comme l'une des raisons d'être, l'une des utilisations significatives du concours des médianes et du centre de gravité.

d) Mais quel type de problèmes ? Pour répondre, on peut examiner les réponses $R^{\lozenge}$ observables « autour de soi » – dans les ***archives du métier*** (au sens large) – à la question Q. C'est ce que l'on fera en allant voir, non un manuel par exemple, mais une observation effective dans une classe de 4e qui suivait le programme précédemment en vigueur.

Distribution et examen du compte-rendu de la séance : voir le fichier a_propos_des_medianes_dun_triangle.doc.

On analysera, dans un premier temps, l'épisode qui débute à peu près au milieu de la première page par :

On reprend la feuille d'activité de la veille pour y envisager l'activité 7 (voir ci-après). Il est 14 h 08. P : « Vous regardez l'activité 7, qui s'appelle Position du centre de gravité sur chacune des médianes. »...

Et qui se termine à peu près au milieu de la page 3 par :

P conclut : « On a réussi à reconstituer le triangle ABC en ayant juste le point G et le côté [AB]. » L'élève retourne à sa place.

Travail individuel ou en binôme

1. Que voit-on dans la séance observée des mathématiques étudiées ? (Quelles sont les mathématiques étudiées ?)
2. Que voit-on, dans la séance observée, à propos de la réponse à la question « À quoi servent la propriété de concours des médianes et le centre de gravité d'un triangle ? »

Les élèves professeurs rendent une réponse écrite par binômes.

Prochaine séance : Mardi 8 septembre 2008 de 14 h à 17 h 15

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2009-2010

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 2 : mardi 8 septembre 2009

***Programme de la séance**. 0. Questions de la semaine // 1. Observation & analyse // 2. Forum des questions*

0. Questions de la semaine

En dehors des deux thèmes majeurs que constituent la structure ternaire et la programmation de l'étude, présents la semaine dernière, des questions relatives à l'autorité sont à nouveau présentes cette semaine, comme en témoigne par exemple la question suivante :

> Quelles sont les diverses sanctions que l'on peut donner aux élèves qui sont turbulents ou qui n'ont pas fait le travail demandé ? (1)

Le thème de l'utilisation de l'informatique est également présent, sous des formes assez différentes, comme par exemple :

> J'aimerais avoir plus de renseignements sur le B2i en 3e. Est-ce au prof de math de le valider ? (Sophie Kerner, 1)
> Faut-il taper ses cours à l'ordinateur ? (1)

En dehors de la structure ternaire, l'organisation de l'étude préoccupe aussi la classe :

> Comment organiser les corrections des exercices donnés à la maison ? Faut-il prévoir un temps pour faire passer des élèves ou les corriger soi-même ? (1)
>
> Existe-t-il un procédé (écrit de préférence) permettant de faire travailler le calcul mental automatisé et réfléchi qui puisse vérifier les critères suivants : hebdomadaire, court, etc. ? (1)

Tout comme, mais dans une moindre mesure, la fabrication des organisations mathématiques à enseigner :

> (Niveau 4e) Comment démontrer la caractérisation graphique de la proportionnalité (dont le sens alignement $\Rightarrow$ situation de proportionnalité est au programme) ? (1)

1. Observation & analyse

Nous avons mis à l'étude la semaine dernière une question, *Q* : « À quoi servent la notion médiane et, surtout, la propriété de concours des médianes d'un triangle ? Doit-on nommer ce point de concours ? Quels en sont, du moins, les usages possibles, pertinents en classe de 5^e^ pour étudier les configurations ? »

Nous avions dit que la réponse à cette question était commandée par la détermination des ***raisons d'être*** de la propriété de concours des médianes et du centre de gravité. Pourquoi la propriété de concours des médianes d'un triangle a-t-elle attiré l'attention des mathématiciens, et pourquoi demande-t-on aujourd'hui encore aux élèves de la connaître – en vue de quels usages, de quelles utilisations ?

La rencontre effective des élèves avec la propriété de concours des médianes d'un triangle et, éventuellement le centre de gravité, devra se faire dans une situation où cette propriété et cette notion apparaîtront ***utiles***, voire ***indispensables***, pour résoudre un ***problème*** (de géométrie) d'un certain ***type*** qui, lui-même, puisse être regardé comme l'une des raisons d'être, l'une des utilisations significatives du concours des médianes et du centre de gravité.

Mais quel type de problèmes ? Pour répondre, on peut examiner les réponses $R^\Diamond$ observables « autour de soi » – dans les ***archives du métier*** (au sens large) – à la question Q. C'est ce que nous avons commencé à faire en allant voir, non un manuel par exemple, mais une observation effective dans une classe de 4^e^ qui suivait le programme précédemment en vigueur.

On avait débuté l'analyse de l'épisode qui débute à peu près au milieu de la première page par :
On reprend la feuille d'activité de la veille pour y envisager l'activité 7 (voir ci-après). Il est 14 h 08. P : « Vous regardez l'activité 7, qui s'appelle Position du centre de gravité sur chacune des médianes. »...

Et qui se termine à peu près au milieu de la page 3 par :
P conclut : « On a réussi à reconstituer le triangle ABC en ayant juste le point G et le côté [AB]. » L'élève retourne à sa place.

À travers les deux questions suivantes :

1. Que voit-on dans la séance observée des mathématiques étudiées ? (Quelles sont les mathématiques étudiées ?)
2. Que voit-on, dans la séance observée, à propos de la réponse à la question « À quoi servent la propriété de concours des médianes et le centre de gravité d'un triangle ? »

Les élèves professeurs ont rendu une réponse écrite par binômes. On examinera d'abord les réponses à la première question, que nous reproduisons ci-dessous.

1. On utilise un problème de construction pour élaborer le théorème du cours.

2. Dans la séance observée, on voit que le professeur utilise la structure ternaire puisqu'il sépare bien activité et cours (on suppose que les exos sont aussi à part, à la fin de la séance). Les élèves ont compris la proposition étudiée.

3. C'est une activité mathématique censée faire découvrir aux élèves quelques propriétés des médianes, mais la propriété principale est conjecturée mais non démontrée (propriété du centre de gravité sur les médianes).

4. Définition d'une médiane dans un triangle. Définition du centre de gravité (intersection des 3 médianes).

5. Les élèves étudient la position du centre de gravité sur les médianes d'un triangle.

6. Problème de construction dans le domaine de la géométrie qui s'appuie sur la position du centre de gravité sur une médiane. Calcul sur les grandeurs.

7. Position du centre de gravité sur les médianes.

8. Médianes dans le triangle :construction ; position du centre de gravité. Proportion / longueurs.

9. Mathématiques étudiées : Médianes: centre de gravité d'un triangle ; Milieu d'un segment ; Triangles quelconques ; Symétrie ; Construction à la règle et au compas. Émission d'une conjecture qu'on cherche à vérifier.

10. C'est une AER suivie d'une synthèse et d'un début d'exercice portant sur la géométrie du triangle, et plus particulièrement sur la position du centre de gravité sur les médianes.

11. Thème global : Les médianes. Propriété : position du centre de gravité sur les médianes.
Prérequis (séance précédente) : définition médianes et propriété de concours des médianes.
AER : Construction du sommet *C* d'un triangle *ABC* connaissant *A,B* et le centre de gravité *G.*

12. La notion de médiane d'un triangle ; la position du centre de gravité d'un triangle.

13. Mesure et grandeurs géométriques ; droites remarquables d'un triangle, en particulier les médianes. Construction géométrique. - Distinction, droite / segment.

14. Séance consacrée à la géométrie du triangle, en particulier la position du centre de gravité sur les médianes d'un triangle. Pour aboutir au théorème : le centre de gravité est situé aux deux tiers de chaque médiane à partir du sommet (préalablement comme une conjecture).

15. Étude de la position du centre de gravité d'un triangle sur chacune des médianes (médiane et point de concours déjà vus à la séance précédente).

16. On y voit les élèves utiliser deux notions pour en faire émerger une troisième :
   a) Définition d'une médiane issue d'un sommet ;
   b) Propriété de concours des médianes d'un triangle ;
Pour faire émerger la propriété : position du centre de gravité sur chacune des médianes.

17. Les élèves apprennent à positionner le centre de gravité sur chacune des médianes. Géométrie plane dans un triangle. Pendant la séance, les élèves tracent, mesurent les distances, conjecturent un résultat, commencent un exercice d'application.

18. Une définition d'une médiane d'un triangle comme outil pour faire émerger que le centre de gravité d'un triangle est situé aux deux tiers d'une médiane à partir du sommet.

19. On cherche à faire comprendre aux élèves, qui savent déjà ce qu'est le centre de gravité d'un triangle, la manière de construire le troisième sommet en connaissant le centre de gravité et les deux autres sommets. Cette activité permet de comprendre la position relative du centre de gravité sur chaque « segment de médiane ».

20. Les élèves étudient la géométrie plane et plus particulièrement la position du centre de gravité sur la médiane. L'activité vise à conjecturer un résultat à partir de deux exemples. L'activité mathématique mise en œuvre est de mesurer, comparer des longueurs de segments.

21. Médianes : - G est l'intersection des 3 médianes (le fait rappeler à la classe) ; Notion de symétrique (construction sous la direction de P).
Propriété : Le centre de gravité est aux 2/3 de la médiane en partant d'un sommet.

22. On étudie les médianes d'un triangle, plus particulièrement la position du centre de gravité sur une médiane par rapport au sommet.

23. Lors de cette séance, les élèves connaissent la définition et la construction d'une médiane. L'objet de l'activité étant de construire le 3^{e} sommet d'un triangle connaissant un côté et le centre de gravité, les élèves sont amenés à étudier la position du centre de gravité.

24. Objectif : construire le 3^{e} sommet d'un triangle. Pour cela il met en avant la position du centre de gravité

sur les médianes en le leur faisant conjecturer à partir de plusieurs dessins. Mise en avant d'une méthode mathématique : problème, dessins, conjecture puis éventuellement démonstration.

25. Rappel de la définition de la médiane dans un triangle. Propriété : concours des 3 médianes d'un triangle.
Définition : centre de gravité aux 2/3 de chaque médiane à partir du sommet. Utilisation du quadrillage pour déterminer un milieu.

26. Les mathématiques étudiées relèvent de la géométrie plane. Plus précisément :
Définition de la médiane (on rappelle juste la définition) ; Concours des médianes (de même juste rappel) ; Étude de la position du centre de gravité, unicité (juste signalé) ; construction d'un triangle à partir de son centre de gravité et de 2 sommets. Utilisation du symétrique (en exercice).

Travail collectif dirigé

On trouvera ci-dessous une brève synthèse des commentaires développés oralement.
Commentaire 1 – On notera d'abord que certaines réponses sont trop générales pour être informatives : on ne sait pas de quelle, voire quelles, propriété(s) des médianes il s'agit, ou encore de quel problème de construction, ou de quelle technique
Commentaire 2 – On voit ensuite apparaître massivement des notions mathématiques, des propriétés : « le concours des 3 médianes », « la définition du centre de gravité », « définition de la médiane dans un triangle », etc.
Commentaire 3 – Des réponses mettent également en évidence le type de problèmes qu'il s'agit d'étudier ou de résoudre : construire un sommet C d'un triangle dont on connait un côté [AB] et le centre de gravité.
Commentaire 4 – On observe également des tentatives plus ou moins abouties pour parler d'une technique de réalisation de certains types de problèmes : « construction de la médiane » ; « utilisation du quadrillage pour déterminer un milieu ».
Commentaire 5 – Un certain nombre de réponses comporte des notations qui relèvent de l'organisation de l'étude, nous y reviendrons ultérieurement.

On trouvera dans l'encadré ci-dessous des traces écrites de la mise en commun des réponses effectuée au tableau

Géométrie	Problème de construction : construire un sommet C d'un triangle ABC connaissant A, B, et le centre de gravité, G.	Manière de faire
Triangle		
Médianes	Positionner le centre de gravité sur chacune des médianes.	

Propriétés des médianes :

Propriété du centre de gravité sur les médianes : position de G aux deux tiers de chaque médiane à partir du sommet. — Conjecturée, non démontrée
Propriété de concours des médianes d'un triangle.

Définition d'une médiane d'un triangle ;
Définition du centre de gravité (intersection des trois médianes). — prérequis

Construction des médianes d'un triangle.

Milieu d’un segment [utilisation du quadrillage pour...] Unicité de G et de C. Construction à la règle et au compas. Calcul sur les grandeurs. Proportion / longueurs ; mesure.

Voici maintenant les réponses à la deuxième question :

1. La réponse est construite au fur et à mesure avec la participation de tous les élèves. Le professeur ne leur donne pas la réponse, les élèves doivent réfléchir par eux-même et participent activement.

2. Le point de concours des médianes n’est pas utilisé en soi, il sert seulement à conjecturer la position du centre de gravité sur les médianes.

3. Les élèves comprennent qu’il suffit de construire la médiane qui passe par *C* pour trouver le point *C*.

4. Grâce à la propriété de concours, on peut tracer les 3 médianes du triangle *ABC* en connaissant uniquement *A,B* et *G*. Grâce au centre de gravité, on peut de plus placer *C* sur la médiane que l’on a tracé.

5. Cela permet de construire un triangle à partir d’un côté et de son centre de gravité.

6. À reconstituer un triangle en connaissant seulement 2 points et le centre de gravité.

7. La propriété de concours des médianes permet de résoudre le problème: construire *C*

8. Ils servent à construire le 3^{e} sommet d’un triangle à partir des seules données d’un côté d’un triangle et de son centre de gravité.

9. Construction du centre de gravité à partir des médianes et réciproquement.

10. La motivation de l’utilité de la propriété est la (re)construction d’un triangle dont il manque un sommet mais dont on connaît le centre de gravité.

11. Cette propriété de concours permet de mettre en évidence une méthode de construction d’un sommet du triangle connaissant la position de deux autres sommets et du centre de gravité.

12. Dans la séance observée, la propriété de concours des médianes et le centre de gravité d’un triangle permettent aux élèves de construire le troisième sommet connaissant un côté et le centre de gravité.

13. Le concours des médianes ? Reconstruction d’un triangle via un segment et le centre de gravité. Ce qui permet de mesurer l’emplacement particulier du centre de gravité et qui, de ce fait, paraît ne pas dépendre de l’exemple étudié.

Établir par l’expérience la position « métrique » du centre de gravité et généraliser sous forme de conjecture ce fait, à tous les triangles.

14. Permet de résoudre le problème initial (relevé par un élève) : « Il faudrait qu’on sache où se trouve le centre de gravité ».

15. Le centre de gravité et sa position servent, à partir d’un côté, à retrouver le troisième sommet.

16. La propriété de point de concours des médianes sert à tracer les médianes.

La propriété du centre de gravité d’un triangle sert à construire le 3^{e} sommet d’un triangle lorsque seuls 2 points et le centre de gravité sont donnés.

17. Le professeur fait apparaître la propriété de concours des médianes progressivement à travers une activité, ce qui permet aux élèves de s’apercevoir qu’une seule médiane aurait suffit pour trouver le point *C*.

18. Dans la partie de la séance observée, la propriété de concours des médianes et le centre de gravité d’un d’un triangle servent à retrouver le 3^{e} sommet d’un triangle connaissant les deux autres et son centre de gravité.

19. Cette propriété de concours permet de construire le triangle lorsque l’on a 2 sommets et le centre de gravité.

20. On voit apparaître la propriété de concours lorsque le professeur fait vérifier la propriété avec les deux autres côtés. Un élève réagit à ce propos en disant qu’il suffisait de tracer une seule médiane.

21. À quoi sert la propriété du concours des médianes ? Cela sert à rien ou presque. On se sert du fait que *G* se situe aux 2/3 de la médiane, cela étant vérifié expérimentalement.

22. La propriété [la position du centre de gravité sur une médiane par rapport au sommet] sert, ici, à tracer le sommet d'un triangle à partir d'un coté et du centre de gravité.

La propriété de concours, ici, ne sert pas. On se sert seulement de la propriété conjecturée sur la position du centre de gravité.

23. La propriété de concours des médianes et le centre de gravité servent dans cette séance à construire le 3^e sommet d'un triangle connaissant un côté et le centre de gravité.

24. La propriété de concours des médianes et le centre de gravité d'un triangle permettent ici de construire le 3^e sommet d'un triangle connaissant ses 2 autres sommets et le centre de gravité.

L'activité met en avant l'une des utilisations des propriétés.

25. Raison d'être de la notion de médiane et de centre de gravité : déterminer le 3^e sommet d'un triangle en connaissant 2 sommets et le centre de gravité d'un triangle.

26. En ce qui concerne le centre de gravité, à travers l'activité, il sert à pouvoir construire le troisième sommet d'un triangle à partir des 2 autres. Ceci fait apparaître l'utilité de la position du centre de gravité. La propriété de concours des médianes permet de dire que 2 médianes suffisent pour déterminer le centre de gravité.

Travail collectif dirigé

La plupart des réponses comprennent l'idée essentielle : « La propriété de concours des médianes et le centre de gravité d'un triangle permettent ici de construire le 3^e sommet d'un triangle connaissant ses deux autres sommets et le centre de gravité », même si, comme le font remarquer certains, l'ingrédient essentiel du travail est la position du centre de gravité sur les médianes.

On voit ainsi apparaître, à travers les réponses citées, trois ingrédients pertinents permettant d'***analyser les mathématiques étudiées*** dans la séance.

Des ***types de tâches*** qu'il s'agit accomplir :

Ici c'est le type de tâches T qui est proposé à l'étude :

T : Sur une feuille où on a tracé un triangle ABC, le sommet C a été effacé et il ne reste qu'un côté [AB] et le centre de gravité, G ; construire à la règle et au compas le sommet C.

Une ***technique*** relative à ce type de tâches T émerge et est mise en œuvre dans la séance :

τ : 1) on construit la médiane issue de C, qui est la droite passant par G et le milieu de [AB], C' ;
2) On place ensuite C de façon à ce que l'on ait 2C'G = GC.

Elle est produite, justifiée, principalement par les ***éléments technologiques*** suivants :

θ_γ. Le centre de gravité d'un triangle se situe au deux tiers de chaque médiane en partant du sommet.

θ_μ. Les trois médianes d'une triangle sont concourantes en un point, le centre de gravité du triangle.

La ***technologie*** « complète » $\boldsymbol{\theta}$ de τ doit comporter, bien entendu, une ***justification*** de la propriété clé, θ_γ.

• Ici, cette justification ne saurait être simplement invoquée, ainsi qu'on le fait quand on suppose la propriété utilisée « bien connue » et, en particulier, ***antérieurement justifiée*** – ce qui, en fin de 4^e, devrait par exemple être le cas des deux propriétés « les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu » et « dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un second côté, elle coupe le troisième en son milieu », la première ayant été justifiée en 5^e et la seconde en 4^e.

• La justification donnée dans la séance observée est de type ***expérimental*** (et non de type ***déductif***, ainsi qu'il en irait si la démonstration évoquée par P avait été effectuée). Bien que l'expérience graphique exigée soit, dans la séance observée, seulement effectuée sur deux exemplaires, le discours technologique qui en découle peut être restitué ainsi :

> L'expérience montre que, lorsqu'on trace un triangle ABC ainsi que ses médianes, le point de concours des médianes, G, se situe au deux tiers de chaque médiane à partir du sommet.

Il conviendra d'en ajouter un quatrième, la ***théorie*** Θ, qui est un discours qui produit, justifie et rend intelligible la technologie, et sur lequel nous reviendrons, pour obtenir un modèle permettant d'analyser l'activité mathématique : ***une praxéologie mathématique*** que l'on notera $[T_i / \tau_i / \theta_i / \Theta_i]_{i\in I}$. est en effet composée d'un ou de plusieurs ***types de tâches***, d'une ou plusieurs ***techniques*** permettant d'accomplir ce ou ces types de tâches, d'une ou plusieurs ***technologies*** qui justifient, produisent, rendent intelligibles les techniques et d'une voire des ***théories*** qui justifient, produisent, rendent intelligibles les technologies.

On notera que certains ingrédients mathématiques ne font pas partie de la praxéologie mathématique à mettre en place mais en permettent la mise en place : par exemple les éléments relatifs au milieu d'un segment sont connus et le travail de la classe s'appuie sur cette connaissance pour produire la praxéologie mathématique enjeu de l'étude. On y reviendra.

Pour clore, provisoirement, cette rubrique, on s'efforcera de répondre à la question suivante :

3. Que voit-on dans la séance observée de l'organisation de l'étude ? (Comment les mathématiques sont-elles étudiées ?) On s'efforcera de préciser les fonctions des différents épisodes.

Les élèves professeurs rendent une réponse écrite par binômes.

2. Forum des questions

À propos de structure ternaire

1. Comment adopter le système ternaire sachant que j'ai deux cahiers imposés et que je souhaite découper la partie cours en différentes parties ? (1)

2. Au sujet de l'organisation des cahiers / classeurs des élèves, pourquoi ne fait-on pas 4 intercalaires : AER, Synthèses, Exercices, DM/Contrôles et ne garde-t-on pas l'ordre chronologique à l'intérieur de chaque rubrique ? Est-il si important pour l'élève de séparer les domaines ? (Calcul / Géométrie...) (1)

3. Combien de temps doit durer une AER ? (Est-ce de l'ordre d'un quart d'heure ou plutôt d'une heure entière ?). (1)

4. Comment se déroule une AER ? (1)

5. Quel est le rôle que doit avoir le professeur lors des séances d'activité d'étude et de recherche (faire avec les élèves, laisser-faire, ...) ? (1)

6. Les élèves peuvent / doivent-ils préparer certaines activités (AER) à la maison ou bien ce travail de recherche doit-il être toujours fait en classe ? (1)
7. Est-ce une bonne idée d'utiliser un rétroprojecteur systématiquement pour le cours de seconde ? (I.e. En ayant préparé de façon manuscrite le cours sur transparents.) (1)

1. Plusieurs solutions peuvent être adoptées pour découper un cahier en plusieurs parties. La plus simple consiste sans doute à faire fabriquer des ***onglets*** qui permettront de s***éparer les différentes parties***, les onglets en question pouvant être fabriqués avec du papier rigidifié par du scotch. En supposant que les deux cahiers respectent les conditions de la liste des fournitures scolaires, soit que ce sont deux cahiers de 96 pages, et en se plaçant au collège, on mettra ***deux domaines par cahier*** et on pourra séparer soit selon les domaines puis AER, synthèse, exercices à l'intérieur de chaque domaine ; soit selon AER, synthèses, exercices puis, dans chaque partie, les deux domaines. Il convient bien entendu de répartir les quatre domaines selon les deux cahiers, en tenant compte du fait qu'ils n'ont pas le même poids dans le programme. Considérons ainsi le programme de la classe de 4^{e}. Le domaine Organisation et gestion de données, fonctions comporte quatre thèmes et quatre compétences, tandis que le domaine nombre et calculs comprend six thèmes qui se déclinent en 19 compétences ; le domaine Géométrie compte quant à lui 10 thèmes mais 14 compétences, tandis que le domaine Grandeurs et mesures comprend deux thèmes et trois compétences. On mettra donc les domaines Nombres et calculs et Géométrie dans deux cahiers différents, en leur allouant davantage de pages qu'aux autres thèmes : on peut se donner pour règle indicative par exemple de consacrer deux tiers des pages au thème Géométrie, en laissant davantage de pages pour la partie AER et pour la partie exercices que pour la partie synthèse.

2. Même si, comme on l'a dit la semaine dernière, la séparation des domaines peut ne pas être étanche, notamment du point de vue des activités – l'utilisation d'un classeur s'avérant de ce point de vue plus souple que celle de cahiers – il n'en reste pas moins que ***l'identification des domaines d'étude reste importante, spécialement à l'égard de la synthèse***. Il est essentiel de donner aux élèves une ***cartographie des domaines mathématiques étudiés***, des secteurs et de leurs thèmes parce que c'est cela qui est ***pertinent pour l'abord des problèmes***. Lorsque, en effet, on s'affronte à un problème, la première chose à repérer est le type de tâches dont il constitue un spécimen, type de tâches qu'il s'agira de placer ensuite dans un domaine, puis un secteur qui donnera les outils pertinents pour résoudre le problème. Cela ne va nullement de soi, et ce travail doit être effectué dans la classe sous la direction du professeur, comme en témoigne l'extrait suivant d'un compte rendu d'observation en classe de seconde :

P renvoie à sa place l'élève qui était au tableau. Puis il annonce un autre exercice : « Ce sera une activité… » Il distribue l'énoncé (ci-après) et enjoint : « Vous commencez par lire l'énoncé. »

Un paysan possède un terrain qui a pour forme un triangle rectangle ABC, rectangle en A, avec AB = 4 km et AC = 3 km. Une nouvelle loi oblige notre paysan à travailler dans un champ de forme rectangulaire. Comme le paysan a construit sa grange contenant ses machines en A, il souhaite que A appartienne au champ. Enfin, pour des raisons économiques évidentes, notre paysan souhaite que son champ ait l'aire la plus grande possible. Pouvez-vous l'aider ?

Bruissements divers. P précise que le contrôle prévu n'aura pas lieu le lendemain, mais la semaine suivante. L'élève arrivée en retard demande si elle a été appelée en AI : réponse négative. Les élèves lisent l'énoncé, certains posent des questions à ce propos. P : « Est-ce que tout le monde a lu l'énoncé ? » Réponse positive ! Il est 15 h 23. P : « Donc… »

Une élève intervient : « M’sieur ! Ça a rien à voir avec les fonctions, ça ! » P réagit : « Ben si, justement, on va voir… »

Commentaires oraux

On ajoutera que, dans la perspective de ce travail de « cartographie » des domaines mathématiques, ***des synthèses se situant au niveau du secteur, voire du domaine, sont nécessaires***, ce que le programme de collège explicite ainsi :

> (...) [I]l est nécessaire de proposer des situations d’étude dont le but est de coordonner des acquisitions diverses. Dans cette optique, l’enseignant réalise, avec les élèves, des synthèses plus globales, à l’issue d’une période d’étude et propose des problèmes dont la résolution nécessite l’utilisation de plusieurs connaissances.

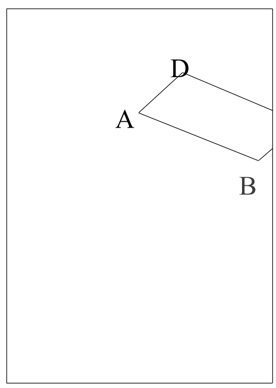
3. La durée d’une AER dépend de sa taille, bien entendu, mais aussi de la qualité de sa préparation par le professeur et de la technique qu’il utilise dans la conduite de l’AER : on ne va donc pas pouvoir donner une indication horaire précise. On peut cependant quand même indiquer qu’une AER qui dure un quart d’heure est très généralement une AER « ratée », soit parce qu’elle est de trop petite taille, soit parce que le professeur, par sa direction d’étude, a « tué » le travail à effectuer par les élèves, soit encore que l’OM qui devait émerger était déjà connue des élèves. Pour une AER dont l’objet est l’***émergence d’une OM locale***, il est possible voire conseillé que la durée excède une heure, et on notera que cela est prévu par le programme :

> D’une part, toute activité (qui peut s’étendre sur plusieurs séances) doit être complétée par une synthèse.

Dans l’ensemble, à titre indicatif toujours, le nombre d’heures allouées aux AER constitue à peu près la moitié des heures attribuées à l’étude d’un thème (voir *infra*).

4. Nous avons observé, par l’intermédiaire du CR d’observation en cours d’étude, une réponse apportée par un élève professeur de l’année 2004-2005 à la question 4, et à la question 5 aussi d’ailleurs. Nous examinerons la semaine prochaine une autre réponse à ces questions, apportée cette fois par un élève-professeur de l’année 2005-2006, en examinant un extrait vidéo d’une séance en classe de 5^{e} portant sur le parallélogramme dont nous reproduisons une partie du compte rendu ci-dessous (la partie qui sera visionnée est surlignée).

P : « Bon, on passe à l’activité n° 2. Vous pouvez ranger vos exercices. » Un élève distribue la feuille de travail. Une élève s’enquiert de la place à lui donner : « C’est après l’activité 2 ? » P : « Oui… » Puis un élève lit l’énoncé (voir la figure ci-après) : « Le sommet C du parallélogramme ABCD est sorti des limites de la feuille. Tracer la partie visible de la droite (AC). »



En écho, P écrit :

<u>Question</u> : tracer (AC) ?

Elle demande ce que sont, ici, les données. Un élève, sollicité, répond : « ABCD est un parallélogramme. » P : « Tout le monde voit ? » Puis : « Qu'est-ce qu'il faut pour tracer une droite ? » Une élève : « Une droite ? Un compas, un crayon, une gomme. » P : « Laissez de côté les instruments de géométrie. » Un élève intervient, sans succès ; puis une élève trouve : « Des points ! », s'écrit-elle. P : « Combien ? » L'élève : « Deux ! » « Tout le monde est d'accord ? » « Oui… » « Par quels points passe la droite ? » « A et C » « C, on ne peut pas s'en servir. Comment faire ? » P relance : « Qu'est-ce qu'il faudrait faire ? » Après quelques essais infructueux, la classe dégage la réponse attendue : il faudrait avoir un autre point. P écrit :

> Activité 2
> Pour tracer (AC), il faut 2 points
> Ici, on n'en a qu'un : le point A
> Il faudrait trouver un autre point

P : « Ce point, il faudrait qu'il soit comment ? » Elle interroge une élève, qui répond : « Sur la droite (AC). » P approuve et écrit :

> Il faudrait trouver un autre point
> qui est sur (AC)

Un débat s'ensuit à propos de ce deuxième point : il faut qu'il soit sur la feuille, souligne P, « sinon ça n'a aucun intérêt ». Elle écrit :

> qui est sur (AC), et sur
> la feuille

P : « Comment on pourrait trouver ce deuxième point ?… Cherchez. Et après on partagera ensemble ce qu'on a fait ! »

Il est 11 h 32. Les élèves travaillent en silence. P circule lentement. Peu à peu des élèves se manifestent auprès de P. Un élève dit à voix basse : « Ça y est, j'ai trouvé ! J'ai trouvé ! »
P s'adresse bientôt à la classe : « Bon, on va partager les solutions. » Elle sollicite un élève : « Explique-nous ce que tu as fait. » L'élève a… ajouté une feuille pour tracer le parallélogramme. Une élève, interrogée, va droit au but : « On trace le segment [DB], on prend le milieu, on le nomme, et après on trace (AI), si I est le milieu… » Plusieurs ont trouvé cette solution. Une élève a fait comme le premier élève interrogé. Un autre élève parle de l'angle . P : « Mais où le tracer l'angle ? » Un élève encore propose une tentative qui n'aboutit pas. Un autre veut faire la symétrie par rapport à (AD). P indique qu'on verra cette idée demain : pour le moment, on examine la solution par le milieu de [DB]. Après un court dialogue à ce sujet, P écrit :

> Les diagonales [AC] et [DB] se coupent,
> en un point O

P : « Il se balade sur le segment ? Il est où ? » « Au milieu », répond une voix. Un autre élève intervient ; il a compris la solution, mais il semble qu'il veuille « placer le point C », à partir de A et O. P fait reformuler le problème : il s'agit de tracer la droite (AC), pas le point C. Un élève encore parle de « trouver où est le point C ». P : « Est-ce que c'est ça le problème ? » Des élèves en chœur : « Non ! » Mais certains semblent avoir un peu de mal à l'entendre.

P : « Je vous propose d'expérimenter à l'ordinateur pour voir si on a bien les diagonales qui se coupent en leur milieu. »

Ces questions et, notamment, celle du rôle du professeur dans l'AER, constituent des questions vives sur lesquelles nous travaillerons à nouveau dans les séances ultérieures du séminaire.

5. Compte tenu de la nature du travail de l'AER, il va de soi que ***les élèves ont besoin d'être dirigés dans l'étude*** et que le travail ne saurait donc s'accomplir qu'en présence du professeur et sous sa direction. Il n'en reste pas moins que certains ***travaux*** utiles à l'accomplissement du travail peuvent être ***donnés en autonomie***, notamment la ***réalisation d'une expérience graphique ou numérique***. Par exemple, dans la séance en cours d'analyse, la professeure aurait pu interrompre le travail une

fois dégagée la question de la position de G sur les médianes et la nature du travail à effectuer pour étudier cette question, et laisser aux élèves à faire hors classe le tracé d'un triangle de leur choix, des médianes et d'examiner la position du point G sur ces médianes (ce qui, répétons-le, suppose qu'ait émergé au préalable dans la classe – et été dévolué aux élèves – ce qu'il s'agit de faire pour examiner la position du point G). La professeure aurait également pu, à l'issue de la séance précédente qui avait vu l'émergence de la propriété de concours des médianes, demander comme travail hors classe le tracé de deux triangles et de leurs médianes, ces triangles pouvant alors être sollicités dans l'activité pour étudier la position du point G sur les médianes. On peut bien entendu donner également à élaborer hors classe un bilan de l'AER effectuée en classe, préparatoire à la synthèse, comme l'indique la notice « Première rentrée des classes ».

6. La dernière question révèle d'abord une difficulté, classique en début d'année mais qu'il faut dépasser au plus vite, à entendre qu'il ne s'agit pas de « faire cours » mais de ***construire avec les élèves*** une organisation mathématique figurant au programme. Le fait que les élèves soient étroitement associés au processus d'étude implique que l'on ne peut pas complètement déterminer à l'avance ce qui sera inscrit dans les traces écrites des élèves, y compris dans le cadre de la ***synthèse***. En effet, celle-ci ***doit*** également ***résulter du travail des élèves***, et il s'agit notamment de leur faire formuler les propriétés et les définitions, les techniques et les types de tâches qui doivent y figurer. Le professeur doit bien entendu préparer une synthèse, mais la synthèse réalisée s'écartera quelque peu de la synthèse prévue parce que la formulation sera légèrement différente, parce que les élèves ressentiront le besoin d'y faire figurer telle remarque ou telle technique que le professeur jugeait, a priori, déjà connues. Un rétroprojecteur peut néanmoins s'avérer fort utile pour garder la trace des mises en commun effectuées, et notamment du recueil des données, que l'on peut ensuite taper et mettre dans le cahier de textes, pour projeter au tableau un quadrillage utile pour les représentations graphiques si le tableau de la classe n'a pas une partie quadrillée, pour mettre à la vue de tous l'énoncé d'une AER, ou des exercices, etc.

Sur la programmation de l'étude

1. Comment savoir le temps à consacrer par thème et chapitre dans la progression ? (1)
2. Combien de temps doit-on consacrer à un chapitre de cours ? (1)
3. Est-il préférable de préparer les cours longtemps à l'avance, au risque de ne pouvoir tenir sa feuille de route ou s'organiser au fur et à mesure ? (1)
4. Lorsqu'on a deux classes du même niveau, est-il judicieux de suivre une progression simultanée dans les deux classes ? Étant entendu qu'on doit varier les énoncés des devoirs et moduler les contenus selon les niveaux des élèves dans chaque classe. Ou vaut-il mieux profiter d'un décalage de temps pour modifier la praxéologie selon les réactions de la première classe ? (1)
5. Dans quelle mesure doit-on alterner les différents domaines afin que ce ne soit pas trop monotone pour les élèves ? (1)
6. Dans une séance, a-t-on le temps de faire l'activité, d'écrire la synthèse au tableau et de résoudre ensemble un exercice d'application pour que les élèves aient ensuite tous les éléments nécessaires pour résoudre les exercices à faire à la maison ? (1)
7. Peut-on mettre en place dès les premiers cours une activité sur un thème nouveau (pour les élèves) suivi d'une petite synthèse à la fin du cours ? (1)

1. Pour le temps à allouer à chaque thème ou « chapitre », on peut partir d'une équirépartition des thèmes du programme. En reprenant l'exemple de la classe de 4^{e}, il y a au total 22 thèmes à répartir sur à peu près 30 semaines, soit 1,36 semaine par thème ou encore 1,36 * 3,5 h = 4,75 heures par thème... Bien évidemment, on pondérera cet horaire indicatif par l'importance relative des thèmes :

le thème sur la notation scientifique par exemple se verra accorder une dotation horaire moindre que celui des puissances d'exposant entier relatif, auquel d'ailleurs le professeur a tout intérêt à le lier fortement, voire duquel il sera une composante (comme c'est le cas par exemple dans la plupart des ouvrages de mathématiques pour la classe de 4^{e}). On pourra procéder à une arithmétique du même type à propos des chapitres : tel manuel pour la classe de 5^{e} comprend ainsi 14 chapitres à répartir sur 30 semaines, ce qui donne donc 3 h 30 * 30/14 = 7,5 heures par chapitre, etc.

2. Il est clair que, surtout quand on débute, les préparations « à long terme » sont appelées à être reprises, révisées voire complètement rebâties. Il est cependant important de prévoir à l'avance au moins la programmation des thèmes sur l'année (même si cette programmation est appelée à être régulièrement reprise, retouchée et quelquefois substantiellement modifiée) et d'avoir quelques thèmes d'avance. Cela est bien entendu un peu difficile en ce début d'année mais il faut dès maintenant préparer les deux prochains thèmes de la programmation, de façon notamment à ce que le travail avec le maître de stage puisse porter ses fruits.

3. Lorsqu'on a deux classes de même niveau, il semble raisonnable de faire avancer, autant que faire se peut les deux classes du même pas. Cela n'empêche pas d'utiliser les enseignements de ce qui se déroule dans une classe pour développer un peu la préparation, notamment à l'égard de ce qui relève de la gestion de la séance, avant de la mettre en place dans la classe suivante, mais la modifier substantiellement semble peu réaliste compte tenu du temps généralement disponible entre deux séances. (Développement oral)

4. Il est effectivement utile d'alterner les domaines, pas tant pour rompre la monotonie que pour ***améliorer la gestion de la diversité des élèves*** : les élèves sont quelquefois plus à l'aise dans un domaine que dans un autre et la variation des domaines permet d'équilibrer les efforts demandés. C'est, en grande partie, cette même exigence de gestion de la diversité qui fait que l'on s'efforcera, dès le mois de novembre, de mener deux thèmes de front relatifs à deux domaines distincts, de façon à ce que deux domaines différents soient présents dans le devoir de contrôle.

Les deux points suivants n'ont pas été étudiés en séance faute de temps.
5. La séance en cours d'analyse montre qu'il est effectivement possible de faire « tout cela » dans une même séance. Elle montre aussi que cela se fait au prix d'une captation par le professeur du *topos* des élèves (soit le lieu où ils agissent en autonomie). Il faut donc prévoir des types de travaux à faire hors classe qui se distinguent des « exercices d'application ». On rappellera à cet égard un extrait du texte de l'IGEN que nous citions la semaine dernière :

> les travaux individuels de rédaction (et notamment les « devoirs à la maison »), dont les fonctions sont multiples (voir I) peuvent et doivent prendre des formes variées (résolution individuelle, ou en petits groupes, d'un problème comportant éventuellement des questions ouvertes et aboutissant à une rédaction individuelle, compte rendu et synthèse d'une séance de travaux dirigés, recherche d'exemples, constitution d'un dossier sur un thème donné, mise au point et rédaction de solutions d'exercices dont l'étude a été engagée en classe, …).

Lorsque l'on mène de front deux thèmes, on a en principe dépassé les principales difficultés du premier thème lorsque l'on aborde le second et on peut donc donner en outre, dans le travail hors classe, des exercices sur le premier thème.

6. Il faut mettre en place, dès les premières séances, la structure ternaire AER, synthèse, exercices et effectivement débuter par une AER sur un thème nouveau. Il va de soi que les premières AER seront (très) imparfaites et qu'il faudra travailler à les améliorer avec le secours de la formation mais c'est comme cela qu'une technique pour élaborer une AER pourra se forger. La synthèse à la

fin de l'AER n'est pas un passage obligé : ce qui l'est, en revanche, c'est un bilan d'étape ou un bilan intermédiaire, qui fasse le point sur ce qui a émergé dans le travail collectif, dont on a dit plus haut que l'on peut le donner comme travail hors classe. Ces bilans serviront à préparer la synthèse, que l'on a généralement avantage à différer de façon à l'établir à partir des bilans d'étape quand une bonne partie de l'organisation mathématique en jeu de l'étude aura émergée : cela permet notamment de ménager une place suffisante aux élèves dans le travail de synthèse.

On reprendra le travail amorcé la semaine dernière à propos de la reprise de l'étude du thème des fonctions en seconde lors de la troisième séance du Séminaire.

Autorité & discipline

a) Plusieurs questions, on l'a vu, soulèvent le problème de l'autorité du professeur : on les reproduit ci-dessous.

1. Comment motiver un élève ? (0) 2. Comment sanctionner un élève sans le pénaliser et en lui donnant envie de (re)travailler ? (0) 3. Y a-t-il des « stratégies » à adopter lors de « conflits » avec un élève ou bien lorsque la classe est trop bruyante ? (0) 4. Quelles sont les méthodes (les moyens) dont on dispose pour gérer/canaliser un élève particulièrement perturbateur, nuisible au bon déroulement du cours ? Peut-on, en extrême limite, l'exclure du cours, quitte à outrager le droit à l'éducation pour tous ?Priver un élève de cours au bénéfice de trente autres ? (0) 5. Quel type de sanctions est-il conseillé de brandir aux élèves pour une efficacité satisfaisante ? (0) 6. Comment : - gérer une bagarre en cours ? -une insulte gratuite entre élèves ou entre élève professeur ? - un refus d'aller au tableau ? (0) 7. « Entre les murs » fiction ou réalité ? Le prof est-il absolument seul face à une situation d'échec scolaire / indiscipline massive ? (0) Est-ce une bonne politique d'imposer le placement des élèves en classe (par exemple, pour séparer les éléments turbulents ou pour aider à retenir les noms) au risque de paraître arbitraire ? (0) 8. Faut-il réagir directement si un élève pose des problèmes de discipline ? (0) 9. Quelles sont les diverses sanctions que l'on peut donner aux élèves qui sont turbulents ou qui n'ont pas fait le travail demandé ? (1) 10. Quelle sanction peut-on donner à un élève qui oublie trop souvent son matériel de cours ? (1) 11. Quelles mesures prendre face à des problèmes de discipline d'un élève ? (I.e. les punitions intelligentes et pas vexantes.) (1) 12. Faut-il faire signer les DM, DS, punitions ? (1)

b) Comme il en ira quasiment toujours, on apporte ci-après quelques ***matériaux pour bâtir une réponse*** – cette « réponse », elle, étant à construire concrètement dans l'organisation du travail de la classe considérée.

1. Le premier geste à faire est de se procurer et d'étudier le ***règlement intérieur*** de l'établissement. Celui-ci participe à définir les règles de vie et de travail dans l'établissement. Il doit évidemment être compatible avec la loi de la République. Mais il précise la manière par laquelle cette loi s'actualise dans le cadre d'un Établissement Public Local d'Enseignement (EPLE).

2. Ce règlement intérieur est spécifique, dans une certaine mesure, de l'établissement, et il est cadré par des principes généraux que l'on trouve dans un texte paru au ***Bulletin Officiel (BO) de l'Éducation Nationale spécial nº 8 du 13 juillet 2000*** complété (et partiellement modifié) par un texte paru au ***BO n°39 du 28 octobre 2004***.

3. Voici, à titre d'indication, le plan de ce texte :

LE RÈGLEMENT INTÉRIEUR DANS LES EPLE (BO Spécial N°8 du 13 juillet 2000)
PRÉAMBULE
I – L'OBJET DU RÈGLEMENT INTÉRIEUR
II – LE CONTENU DU RÈGLEMENT INTÉRIEUR
2.1 Les principes qui régissent le service public d'éducation
2.2 Les règles de vie dans l'établissement
L'organisation et le fonctionnement de l'établissement
L'organisation de la vie scolaire et des études
La sécurité
2.3 L'exercice des droits et obligations des élèves
2.3.1 Les modalités d'exercice de ces droits
2.3.2 Les obligations
L'obligation d'assiduité
Les modalités de contrôle des absences et des retards
Le respect d'autrui et du cadre de vie
Le devoir de n'user d'aucune violence
2.4 La discipline : sanctions et punitions
2.5 La réintégration de l'élève
2.6 Le suivi des sanctions
2.7 Situations particulières
Les élèves majeurs
La conduite à tenir en cas d'incident aux entrées et aux sorties
L'internat
Les stages
III – ÉLABORATION ET MODIFICATIONS DU RÈGLEMENT INTERIEUR
3.1 Élaboration et révision
3.2 Information et diffusion

4. Cette réglementation précise doit attirer votre attention sur le fait que les règles de vie et de travail ne sauraient être simplement ***édictées unilatéralement par le professeur***, comme si elles procédaient de sa libre décision, c'est-à-dire de son ***arbitraire*** : la plupart des règles utiles ne sont en fait la création ni du professeur ni *a fortiori* des élèves, mais émanent d'une communauté ***plus large***, et doivent donc être, non pas créées *ex nihilo*, mais ***reconnues*** et ***mises en place*** dans la classe par le professeur agissant en coopération avec les élèves. L'exemple de la note zéro que certains seraient tentés d'attribuer à l'élève pour un devoir non fait est ici éclairant : il existe en France une jurisprudence constante des tribunaux administratifs et du Conseil d'État ***qui s'oppose à une telle pratique***. Ainsi un inspecteur ne peut-il assigner une note défavorable à un professeur qui se dérobe à l'inspection. Une prestation non rendue, qui constitue une rupture de contrat et doit donc être sanctionnée, on le verra, ne peut l'être par une évaluation dépréciative, vu que, cette prestation n'existant pas, elle ne saurait être évaluée en bien ou en mal. Sauf à tomber dans ce qu'on peut appeler, de manière un peu emphatique, la « tyrannie », en usurpant une fonction qui n'est pas la sienne, le professeur ***n'est pas libre de fixer à volonté*** les règles qui façonneront la vie de la classe.

5. On voit que les sources de la loi qui règle la vie dans l'établissement sont multiples et c'est dans le règlement intérieur que ces principes sont mis en œuvre et précisés. Ainsi, le texte ci-dessus indique :

« Le règlement intérieur permet la régulation de la vie de l'établissement et des rapports entre ses différents acteurs. Chacun des membres doit être convaincu à la fois de l'intangibilité de ses dispositions et de la nécessité d'adhérer à des règles préalablement définies de manière collective. »

6. À titre d'exemples des obligations des élèves, citons le passage suivant du texte cité ci-dessus :

« L'obligation d'assiduité consiste à participer au travail scolaire, à respecter les horaires d'enseignement, ainsi que le contenu des programmes et les modalités de contrôle des connaissances. Un élève ne peut en aucun cas refuser d'étudier certaines parties du programme de sa classe, ni se dispenser de l'assistance à certains cours, sauf cas de force majeure ou autorisation exceptionnelle. »

Ce passage s'appuie lui-même sur le décret n° 85 924 du 30 août 1985, qui indique notamment :

« Les élèves doivent accomplir les travaux écrits et oraux qui leur sont demandés par les enseignants, respecter le contenu des programmes et se soumettre aux modalités de contrôle des connaissances qui leur sont imposées. Les élèves ne peuvent se soustraire aux contrôles et examens de santé organisés à leur intention. Le règlement intérieur de l'établissement détermine les modalités d'application du présent article. »

On voit ainsi que, en exigeant que les élèves soient présents lors des contrôles qu'il organise et fassent les travaux qu'il leur assigne, le professeur ***ne s'autorise pas de lui-même***, mais d'une règle de niveau supérieur, ***qu'il ne peut pas davantage abolir***. Comme tout détenteur d'autorité, il n'est en conséquence ***pas libre de sanctionner ou de ne pas sanctionner***, par exemple, l'élève qui n'a pas rendu son devoir. En particulier, ce n'est pas parce que tel professeur est du genre à ne pas se laisser faire qu'il sanctionnera l'élève fautif à cet égard ! C'est pour une tout autre raison, indépendante de sa « personnalité » : parce qu'il existe un contrat auquel ***lui comme l'élève*** ont souscrit en devenant sujets de l'institution scolaire, et que, en l'espèce, ce contrat précise ***en toutes lettres*** que l'élève s'engage à « accomplir les travaux écrits et oraux qui [lui] sont demandés par les enseignants ». Par là l'élève échappe à l'arbitraire, à la fantaisie, à la « tyrannie » éventuelle de ***ce*** professeur, pour ne dépendre que de la loi commune, celle de la ***res publica***, loi explicite, révisable, démocratiquement contrôlable. « Je vous sanctionne pour ce devoir non rendu », dira le professeur-tyran, ***« parce que je le veux »***. « Je vous sanctionne pour ce devoir non rendu », dit le professeur de l'État de droit, ***« parce que je le dois***, et je le dois parce que ***la société*** dont je suis le servant en a décidé ainsi ». C'est évidemment ce professeur-là que l'on s'efforcera de devenir.

7. Il est à noter que la mise en place des règles de vie et de travail ne saurait se faire ***en une fois***, une fois pour toutes. De telles règles, en effet, doivent être ***motivées***, et, pour beaucoup d'entre elles, cela ne saurait guère se faire ***qu'en situation***, au fur et à mesure que la classe rencontrera les situations dont la bonne gestion appellent de telles règles. La chose vaut pour le règlement intérieur lui-même, qui, bien que prenant la forme d'un texte rédigé par avance, ne saurait être appréhendé d'un seul coup. Elle vaut plus encore, à l'évidence, pour les règles qui gouvernent tel ou tel genre d'activités « disciplinaires », mathématiques ici. Les règles relatives à ***l'expérimentation en géométrie***, par exemple, ne sauraient être énoncées, ni même conçues, en ***dehors d'un travail de la classe sur cette notion même***.

8. À cet égard, une remarque doit être faite touchant le mot de ***discipline***, qui, dans le vocabulaire usuel de l'école, semble polysémique, puisqu'il désigne à la fois ***les règles de bonne conduite scolaire*** et la ***matière étudiée***. Le *Dictionnaire historique de la langue française* indique à ce propos :

« Discipline [...] est emprunté (1080) au latin *disciplina*, dérivé de *discipulus* [...] qui signifie "action d'apprendre, de s'instruire", et par suite "enseignement, doctrine, méthode", "éducation" et "formation militaire" ; enfin, par extension, le mot désigne les principes, les règles de vie. »

On notera donc précieusement que l'usage de nommer « discipline » les règles prévalant en une institution donnée ***dérive*** du sens qui nous conduit à parler de « discipline mathématique », de « discipline philosophique », etc., ***et non l'inverse***. Il y a ainsi continuité entre ***les*** disciplines scolaires (le français, les mathématiques, etc.) et ***la*** discipline qu'il convient de définir, de respecter et de faire respecter dans la classe et dans l'établissement. D'une certaine manière, ***les deux sont indissociables*** : il faut éduquer à ***la*** discipline afin de pouvoir instruire dans ***les*** disciplines scolaires.

9. L'autorité de faire respecter une discipline, des règles de vie et de travail, bref, ce qu'on appelle un ***nomos***, c'est d'abord, non l'autorité de qui doit assumer cette charge, ***mais l'autorité de ce*** **nomos** ***lui-même***. Et il est très différent, du point du ***sens*** de la situation vécue par la classe, d'imposer aux élèves, telle obligation (ou même déjà de croire et de laisser croire qu'on la leur impose de son propre mouvement, cette obligation ne paraissant reposer alors que sur l'autorité propre du professeur, et donc peut-être sur son arbitraire), ou, par contraste, de s'autoriser du règlement intérieur ou de tel autre texte réglementaire. Pour cette raison, la question de ***l'âge*** du professeur n'a guère de pertinence : pas plus que le jeune gendarme ne s'autorise de lui-même pour faire reproche au monsieur d'âge mûr de telle infraction au code de la route, de même le professeur ne tire pas de lui-même l'injonction qu'il formule à l'adresse de l'élève parfois à peine plus jeune que lui. (D'autant que, aux yeux d'élèves de lycée, même un « jeune professeur », qu'il distingue certes des « vieux » de l'établissement, n'appartient plus depuis plusieurs années à son univers d'âge…)

Les moyens dont le professeur dispose pour faire respecter cette loi seront étudiés la semaine prochaine.

Prochaine séance : le mardi 15 septembre 2009

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2009-2010

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 3 : mardi 15 septembre 2009

Programme de la séance. *0. Questions de la semaine // 1. Observation & analyse // 2. Forum des questions*

0. Questions de la semaine

Cette semaine, de nombreuses questions encore sur l'***organisation de l'étude*** et, spécialement, la ***structure ternaire*** (voir *infra*).

Le thème de la ***fabrication des organisations mathématiques*** est représenté ; par exemple :

Au sujet de la notion de vecteur en seconde. Le programme de seconde introduit les vecteurs par les translations. Peut-on tout de même faire le lien avec la définition utilisant le sens, direction et longueur ? (2de, 2)

Un thème commence à apparaître, celui des ***élèves à besoins particuliers*** ; par exemple :

Il y a un élève dyslexique dans ma classe. Puis-je remplacer son tiers temps par une note majorée (la meilleure solution selon moi) ? un devoir plus court ? De plus, est-il nécessaire d'obtenir un certificat médical ? (4^e + 3^e d'insertion, 2)

tout comme celui de la ***responsabilité du professeur*** :

Sommes-nous couverts si on met un élève en retenue durant notre cours avec une autre classe ? (4^e & 6^e, 2)

1. Observation & analyse

1.1. Praxéologie mathématique

Nous avons mis en place la semaine dernière un modèle permettant l'analyse de l'activité mathématique selon quatre composantes :

Des ***types de tâches*** mathématiques qu'il s'agit accomplir ; dans la séance, c'est le type de tâches T qui est proposé à l'étude :

T : Sur une feuille où on a tracé un triangle ABC, le sommet C a été effacé et il ne reste qu'un côté [AB] et le centre de gravité, G ; construire à la règle et au compas le sommet C.

Des ***techniques*** (manières de faire) qui permettent d'accomplir les types de tâches ; la technique relative au type de tâches T qui émerge dans la séance peut s'analyser de la façon suivante :

τ : 1) on construit la médiane issue de C, qui est la droite passant par G et le milieu de [AB], C' ;
2) On place ensuite C de façon à ce que l'on ait 2C'G = GC.

Une ou plusieurs ***technologies***, discours qui justifient, produisent, rendent intelligibles les techniques ; dans la séance observée, la technologie relative à [T / τ] peut s'exprimer de la façon suivante :

> θ : L'expérience montre que, lorsqu'on trace un triangle ainsi que ses médianes, le point de concours de celles-ci, G, le centre de gravité du triangle, se situe au deux tiers de chaque médiane en partant du sommet.
>
> Elle repose sur les éléments technologiques suivants :

θ_γ. Le centre de gravité d'un triangle se situe au deux tiers de chaque médiane en partant du sommet.

θ_μ. Les trois médianes d'un triangle sont concourantes en un point, le centre de gravité du triangle.

La ***technologie*** « complète » $\boldsymbol{\theta}$ de τ doit comporter, bien entendu, une ***justification*** des propriétés clés, θ_γ et θ_μ.

Une ***théorie***, voire plusieurs, discours qui justifie, produit, rend intelligible la ou les technologies ; dans la séance observée ainsi, la théorie contiendra au moins un élément ***théorique*** notable, sur lequel on reviendra au fil du temps :

> Θ : une expérience graphique qui met en évidence une certaine propriété géométrique « élémentaire » permet de conclure 1) que cette propriété est ***vraie*** dans l'espace sensible, et 2) que cette propriété est ***déductible*** dans la « théorie géométrique disponible », même si l'on ne dispose pas d'une déduction explicite.

Un autre élément théorique sur lequel repose le travail effectué est le fait que par deux points passent une droite et une seule.

On notera que la ou les théorie(s) constitue(nt) souvent un horizon de l'activité mathématique observée, ce qui ne veut pas dire que l'on doive s'affranchir de l'analyser.

Un tel ensemble $[T_i / \tau_i / \theta_i / \Theta_i]_{i\in I}$., on l'a dit, constitue ce que l'on appellera une ***praxéologie***, mathématique ici car le type de tâches dont il est question relève des mathématiques, mais on parlera tout aussi bien de praxéologie physique, historique, orthographique, athlétique, ou encore culinaire, informatique, de ménage, de bricolage, etc. ou encore ***didactique*** lorsque le ***type de tâches*** envisagé est un type de tâches **d'*étude ou de direction d'étude.***

Le bloc formé des types de tâches et des techniques, $[T_i / \tau_i]_{i\in I}$., modélise ce que l'on nomme ordinairement la ***pratique***, le ***savoir-faire***, tandis que le bloc formé de la technologie et de la théorie, $[\theta_i / \Theta_i]_{i\in I}$., modélise ce que l'on désigne souvent par ***théorie*** ou ***savoir.*** On utilisera encore la dénomination ***organisation mathématique*** (**OM**). L'intérêt de ce modèle par rapport aux modèles binaires savoirs / savoir-faire ou théorie / pratique, c'est d'abord de ***permettre de parler***, et donc de ***penser***, le cœur de l'activité que constituent les ***techniques*** (développé oralement) ; ensuite de mettre en évidence que les techniques relatives aux types de tâches sont ***dépendantes du savoir*** dont on dispose.

1.2. Praxéologie didactique

L'objet du travail est de constituer une réponse à la question suivante :

Q_π : Comment mettre en place une organisation mathématique donnée ? Ou encore comment diriger l'étude d'une OM donnée ?

Nous partirons pour cela des réponses apportées la semaine dernière à la question suivante, posée à propos de l'observation sur les médianes en 4e.

Que voit-on dans la séance observée de l'organisation de l'étude ? (Comment les mathématiques sont-elles étudiées ?) On s'efforcera de préciser les fonctions des différents épisodes.

26 réponses ont été rendues (voir le fichier sur Espar), et nous les examinerons collectivement pour dégager les éléments proposés dans ces réponses propres à constituer des ingrédients d'une technique relative à Q_π. Dans cette perspective chaque élève professeur se voit remettre une feuille comportant 4 à 5 des réponses obtenues, l'ensemble des 26 réponses étant représentées sur ces feuilles.

Travail collectif dirigé

On trouvera ci-dessous les traces écrites du travail réalisé collectivement.

Remise en mémoire d'une notion nécessaire à l'AER. (V. AR&AW)
Réactivation des acquis antérieurs indispensables à la poursuite de l'activité.
Propriété de concours des médianes ; définition de la médiane. (IV. LA)
Rappel du travail effectué la veille.(I. SB & FA)
Rappel des connaissances vues à la séance précédente → prérequis pour l'activité.(I. SDM & AL)
etc.

Énoncé du thème de l'AER. Phase de réflexion individuelle « je vous laisse réfléchir ». (I. SDM & AL)
Énoncé du problème.(II. BG & TT)
Lecture de l'énoncé et commentaire par le professeur (solution unique), qui veut vérifier que les élèves aient bien compris l'activité. (VI. JPB & MH)
Elle est divisée en plusieurs étapes : Présentation des l'activité et des problèmes. (IV. JA & GBR)
Les élèves prennent connaissance du sujet :
Construire le 3e sommet d'un triangle connaissant les 2 autres sommets et le centre de gravité du triangle.
De 2 façons : - lecture de l'énoncé (par un élève) ;
- visualisation sur une figure (par le professeur, au tableau).(I. PAR & RB)

Fonctions : que les élèves s'imprègnent du sujet ; être sûr que tous le monde ait compris le problème.

Travail de réflexion et de recherche collective ; fonction : Créer une force de proposition (III. FG)
Phase d'étude et de recherche : (32 minutes)
a) phase de recherche interrompue par l'intervention d'un élève (individuelle)
b) phase de recherche collective (envoi d'un élève au tableau)
c) phase de reformulation du travail : proposée par l'élève, par le professeur.
d) phase d'évitement par le professeur d'un nouveau type de problème mathématique.

étude du deuxième type de problème : position du centre de gravité
e) phase de recherche collective.
f) phase de recherche individuelle, le professeur passe dans les rangs pour aider. (III. LA)
Le professeur alterne les moments de recherche et de discussions.(V. ER *et al.*)
Il laisse les élèves s'exprimer et exposer leurs idées tout en les guidant.
But : Rendre les élèves actifs.(II. AM & SC)
Questionnement des élèves : analyse de différentes réponses par l'ensemble de la classe guidée par le professeur. (V. AR&AW)

Fonction : faire émerger un manque ; les faire se sentir concernés ; acquérir une démarche mathématique ;

Un élève fait une proposition au tableau. (III. FG)
Une élève a une idée. Le professeur l'envoie au tableau pour développer son idée.
Fonction : Laisser l'élève se tromper, l'erreur est constructive. (VI. LM & EO)
P envoie un élève au tableau.
But : Faire avancer le travail de groupe pour que tous les élèves soient au même point. (II. AM & SC)

Remarque : Le fait qu'un élève passe au tableau, ça enclenche la recherche collective.

Fonction : proposition d'une technique qui n'aboutit pas. Permet de garder des traces écrites.

On le voit à travers le travail effectué ci-dessus, analyser l'organisation didactique mise en jeu n'est pas une affaire simple. Elle gagne à prendre appui sur quelques questions simples, auxquelles on s'efforce d'apporter réponse : ces questions et les réponses correspondantes ont trait à ce qu'on nomme les ***moments de l'étude*** ou ***moments didactiques***, qui sont des fonctions à réaliser pour que le processus d'étude soit complet. Nous avons identifié précédemment un moment où on rencontre le problème posé, et ainsi l'OM par l'intermédiaire du type de tâches enjeu de l'étude ; un moment où on fait émerger la technique.

Pour disposer d'une information de base sur la notion de « moment de l'étude », on examine maintenant un extrait des notes du Séminaire 2004-2005. On y désigne par ∂O l'organisation de l'étude relative à une organisation mathématique $O = [T_i / \tau_i / \theta / \Theta]_{i\in I}$. Les sigles OMP et OML désignent respectivement une organisation mathématique ***ponctuelle*** (constituée autour d'un seul type de tâches) et une organisation mathématique ***locale*** (constituée autour de plusieurs types de tâches et techniques, mais justifiée par un unique bloc technologico-théorique, qui peut cependant comporter plusieurs éléments technologiques).

❷ En dépit de sa complexité, on peut aborder la description et l'analyse d'une OD ∂O donnée, où $O = [T_i / \tau_i / \theta / \Theta]_{i\in I}$, en examinant la manière dont elle prend en charge certaines ***fonctions didactiques clés*** appelées ***moments de l'étude*** (ou moments ***didactiques***). Le mot de « moment » par lequel on désigne ces fonctions se justifie par le fait que, quelle que soit la manière d'opérer du professeur, ***il arrive forcément un moment où***… – où, par exemple, la classe, sous la direction du professeur, ***rencontre*** pour la première fois le type de tâches T_i.

❸ De manière précise, étant donné une organisation mathématique ***ponctuelle*** $O_i = [T_i / \tau_i / \theta_i / \Theta_i] \subset O$, où θ_i et Θ_i sont les parties de θ et Θ permettant de justifier le bloc $[T_i / \tau_i]$, on distingue 6 moments :

➔ le moment ***de la première rencontre*** avec T_i ;

➔ le moment ***exploratoire***, qui voit ***l'exploration*** du type de tâches T_i et ***l'émergence de la technique*** τ_i ;

➔ le moment ***technologico-théorique***, qui voit ***la création du bloc*** $[\theta_i / \Theta_i]$;

➔ le moment ***du travail*** de l'organisation mathématique créée, et en particulier ***du travail de la technique***, où ***l'on fait travailler*** les éléments de l'OMP élaborée pour s'assurer qu'ils « résistent » (et, le cas échéant, pour les améliorer), et où, en même temps, on ***travaille sa maîtrise*** de l'OMP considérée, et en particulier de

la technique τ_i ;
➔ le moment ***de l'institutionnalisation***, où l'on ***met en forme*** l'organisation mathématique construite $[T_i / \tau_i / \theta / \Theta]$, en précisant chacun de ses composants, et en l'amalgamant à l'organisation mathématique déjà institutionnalisée – que l'on peut noter, pour plus de clarté,
$\oplus_{j<i}[T_j / \tau_j / \theta_j / \Theta_j]_{j\in 1, j<i} = [T_j / \tau_j / \oplus_{j<i}\theta_j / \oplus_{j<i}\Theta_j]_{j<i}$;
➔ le moment ***de l'évaluation***, où l'on évalue sa ***maîtrise*** de l'organisation mathématique créée, mais aussi où l'on évalue ***cette organisation mathématique elle-même***.

Dans ce qui suit, on s'efforce de repérer les moments de l'étude réalisés (au moins partiellement) pendant la séance observée et la manière dont ils sont réalisés – quelles techniques didactiques sont mises en œuvre pour organiser et gérer la première rencontre avec $T_0 = T$, etc.

• On peut voir ainsi que, durant la partie de la séance considérée, l'activité de la classe relève successivement ou simultanément des ***trois premiers moments didactiques*** : moment ***de la première rencontre*** avec T ; moment de ***l'émergence de la technique*** τ (à propos d'un unique spécimen $t \in T$) ; moment ***technologique***, de ***création de*** θ_γ.

• Un épisode du moment ***du travail*** de l'organisation mathématique créée suivra un épisode du moment ***de l'institutionnalisation*** et le moment de ***l'évaluation est renvoyé à plus tard.***

Les types de tâches didactiques que nous avons identifiés dans le travail précédent vont intervenir dans l'élaboration de ***techniques de réalisation des moments de l'étude***.

Pour la semaine prochaine :
1. analyser la manière dont sont réalisés chacun des quatre « premiers » moments de l'étude présents dans la partie du compte rendu examiné ;
2. examiner la proposition faite par l'un des élèves professeurs de réaliser l'expérimentation « en cherchant C par dichotomie ».

2. Forum des questions

Nous débuterons ce forum par la considération de la question suivante, qui n'est pas sans lien avec le travail que nous venons de mener.

Comment observer une séance de cours efficacement ? (5^e et 4^e, 2)

On considère ici que cette question se pose dans le cadre du travail avec le maître de stage, et qu'on peut la reformuler de la façon suivante : comment tirer le plus de profit de l'observation des classes du maître de stage ? Elle est fortement liée à la problématisation du métier, que la rubrique des questions de la semaine notamment permet de travailler. Il faut en effet avoir au moins une question en tête pour recueillir des observables qui puissent constituer des $\mathcal{R}^\Diamond$ qu'il conviendra ensuite d'analyser – l'observation seule ne suffisant pas pour progresser – à l'aide des outils apportés par la formation. Il s'agit donc d'avoir identifié certains types de tâches qui sont problématiques et pour lesquels on cherche à développer une technique. On va observer la manière dont le maître de stage accomplit ces types de tâches en prenant des notes, puis analyser les réponses que l'on a ainsi recueillies en découpant au moins la technique que l'on voit mise en œuvre. On complètera l'observation en classe et son analyse par le travail avec le maître de stage, qui permettra de développer la réponse, notamment du point de vue de la technologie mais également de certaines étapes de la technique que l'on aura peut-être manquées, ou encore dans la formation à l'IUFM (le « ou » n'étant pas exclusif).

2.1. *Autorité et Discipline (suite)*

1. On a vu la dernière fois plusieurs points à retenir concernant ce thème :

a) C'est le règlement intérieur qui fixe la loi dans l'établissement. Il lui-même encadré par le texte de loi « **LE RÈGLEMENT INTÉRIEUR DANS LES EPLE** » **(BO Spécial N°8 du 13 juillet 2000).**

b) Ainsi, la loi n'est pas celle du professeur, les règles de la classe ne peuvent relever de son seul arbitraire.

c) Exiger la présence, la participation des élèves ne relève pas de la volonté du professeur. Il en est de même concernant le travail à effectuer. C'est un devoir des élèves, inscrit dans la loi.

d) L'autorité du professeur pour faire respecter les règles de vie vient d'abord de l'institution.

2. Depuis la dernière séance de nouvelles questions ont porté sur ce thème. On les reproduit ci-après :

Doit-on faire un plan de classe ou laisse-t-on les élèves se placer d'eux-mêmes ? (2)
En cas d'indiscipline générale quels sont les recours possibles ? On ne peut pas coller la classe entière. Les punitions collectives sont, si j'ai bien compris, à proscrire malgré ? (2)
J'ai des problèmes de discipline avec une classe, j'ai du mal à trouver les sanctions efficaces. Comment évaluer les sanctions ? (2)
J'ai un élève un peu spécial dans ma classe : d'une part, il se met constamment au premier rang, est volontaire pour passer au tableau et pour répondre aux questions que je pose ; d'autre part, il perturbe le cours en faisant des blagues, en discutant, en me provoquant, etc. Je n'ose pas le sanctionner de peur de casser son enthousiasme mathématique. Que faire ? (2)

3. Venons-en maintenant plus particulièrement aux moyens dont le professeur dispose pour faire respecter cette loi. Ces moyens sont eux aussi fixés par le règlement intérieur de l'établissement et s'appuient sur un texte paru au même B0 que le texte sur le règlement intérieur. En voici les titres :

ORGANISATION DES PROCÉDURES DISCIPLINAIRES DANS LES COLLÈGES, LES LYCÉES ET LES ÉTABLISSEMENTS RÉGIONAUX D'ENSEIGNEMENT ADAPTÉ (BO Spécial N°8 du 13 juillet 2000)
PRÉAMBULE
I – RAPPEL DES PRINCIPES GÉNÉRAUX DU DROIT
1.1 Principe de la légalité des sanctions et des procédures
1.2 Principe du contradictoire
1.3 Principe de la proportionnalité de la sanction
1.4 Principe de l'individualisation des sanctions
II – LES PUNITIONS SCOLAIRES ET LES SANCTIONS DISCIPLINAIRES
2.1 Conditions de mise en œuvre
2.2 Les punitions scolaires
2.3 Les sanctions disciplinaires
2.4 Les dispositifs alternatifs et d'accompagnement
2.4.1 Les commissions de vie scolaire
2.4.2 Les mesures de prévention, de réparation et d'accompagnement

On trouvera l'intégralité de ce texte dans les « Documents 2nd dégré » sous le titre

punitions_scolaires_et_sanctions_disciplinaires.doc

à l'adresse http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/fi/pcl2/2A.TXT/2007-2008/documents_08.html

Un résumé de l'ensemble de ce texte, sous la forme de ***12 fiches pratiques*** est disponible sur le site Eduscol, qui indique dans sa présentation :

12 fiches ont été élaborées pour répondre à un certain nombre d'interrogations relatives à la mise en œuvre des textes sur la discipline dans les collèges et les lycées.
Chacune a pour objet de :

- rappeler les données législatives et réglementaires ;
- répondre à des questionnements spécifiques ;
- préconiser des mesures pratiques de mise en œuvre.

Pour atteindre ces fiches, on fera les choix successifs suivants :
Sommaire / Vie des établissements et politique éducative / Procédures disciplinaires

Voici l'index de ces fiches :

Index des fiches pratiques

Principes généraux

fiche n°1	**Les punitions scolaires et les sanctions disciplinaires**
fiche n°2	**Le principe du contradictoire**
fiche n°3	**L'individualisation et la proportionnalité de la sanction**

Sanctions et punitions

fiche n°4	**Comment prononcer une sanction**
fiche n°5	**L'amnistie et l'effacement administratif des sanctions disciplinaires**
fiche n°6	**La réparation**
fiche n°7	**L'exclusion**

Domaine pédagogique	
fiche n°8	**Le dossier de l'élève**
fiche n°9	**Les mesures préventives et d'accompagnement**
Domaine institutionnel	
fiche n°10	**Le règlement particulier de l'internat et de la demi-pension**
fiche n°11	**Le conseil de discipline**
fiche n°12	**Le conseil de discipline départemental**

4. On examine ci-après un extrait du texte inscrit au BO, en mettant en évidence certains passages importants.

Dès le préambule, on trouve une explication à la nécessité de mettre les règlements intérieurs des établissements plus en phase avec les principes du droit :

Le respect des principes généraux du droit permet de conforter les pratiques démocratiques dans la mise en œuvre des sanctions et des punitions dans les établissements scolaires. Il permet d'éviter également, chez les élèves et parfois dans les familles, l'incompréhension et le sentiment d'injustice qui contribuent à fragiliser la notion même d'autorité, comme sa légitimité, et peuvent en conséquence générer des manifestations de violence.

I – Rappel des principes généraux du droit

Si la mise en œuvre de la procédure disciplinaire relève de l'organisation propre aux établissements scolaires, elle ne saurait en revanche ignorer les principes généraux du droit qui s'appliquent à toute procédure.

1.1 Principe de la légalité des sanctions et des procédures

Déterminer l'ensemble des mesures et des instances disciplinaires par voie réglementaire et fixer la liste des punitions scolaires et des sanctions disciplinaires dans le règlement intérieur de chaque établissement scolaire relèvent du principe de légalité des sanctions et des procédures. Inscrites dans un cadre légal, les sanctions ne sauraient s'appliquer de façon rétroactive et peuvent faire l'objet d'un recours administratif interne, et, pour celles qui ont pour effet d'interrompre de manière durable la scolarité de l'élève, d'un recours devant la juridiction administrative.

Le respect de ce principe général du droit met chacun en mesure de savoir ce qu'il risque lorsqu'il commet une transgression. C'est dans ces conditions seulement que l'adage « nul n'est censé ignorer la loi » peut trouver son application à l'école.

Il permet en outre de proscrire en matière de punition scolaire et de sanction disciplinaire les pratiques individuelles et marginales qui sont susceptibles de contredire le projet éducatif de l'établissement et de générer de l'incompréhension chez les élèves et leurs familles.

1.2. Principe du contradictoire

Avant toute décision à caractère disciplinaire, qu'elle émane du chef d'établissement ou du conseil de discipline, il est impératif d'instaurer un dialogue avec l'élève et d'entendre ses raisons ou arguments. La sanction doit se fonder sur des éléments de preuve qui peuvent faire l'objet d'une discussion entre les parties. La procédure contradictoire doit permettre à chacun d'exprimer son point de vue, de s'expliquer et de se défendre.

Le ou les représentants légaux de l'élève mineur concerné sont informés de cette procédure et sont également entendus s'ils le souhaitent. Il est rappelé que devant les instances disciplinaires, l'élève peut se faire assister de la personne de son choix, notamment par un élève ou un délégué des élèves.

Toute sanction doit être motivée et expliquée.

1.3. Principe de la proportionnalité de la sanction

La sanction doit avoir pour finalité de promouvoir une attitude responsable de l'élève et de le mettre en situation de s'interroger sur sa conduite en prenant conscience des conséquences de ses actes.

Il est donc impératif que la sanction soit graduée en fonction de la gravité du manquement à la règle et du fait d'indiscipline. Ainsi, le fait qu'un élève ait déjà été sanctionné ne justifie pas à lui seul qu'une sanction lourde soit prononcée pour un nouveau manquement de moindre gravité.

Il convient à cet effet d'observer une hiérarchie entre les atteintes aux personnes et les atteintes aux biens, les infractions pénales et les manquements au règlement intérieur, pour ne pas aboutir à des confusions ou des incohérences dans l'échelle des valeurs à transmettre.

Il sera utile de se référer au registre des sanctions disciplinaires qui constitue un gage de cohérence interne spécifique de l'établissement afin d'éviter des distorsions graves dans le traitement d'affaires similaires et permet de se situer dans un créneau de mesures possibles.

1.4. Principe de l'individualisation des sanctions

Toute sanction, toute punition s'adressent à une personne ; elles sont individuelles et ne peuvent être, en aucun cas, collectives.

Individualiser une sanction, c'est tenir compte du degré de responsabilité de l'élève, de son âge et de son implication dans les manquements reprochés ainsi que de ses antécédents en matière de discipline. On ne sanctionne pas uniquement en fonction de l'acte commis, mais également et surtout s'agissant de mineurs, en considération de la personnalité de l'élève et du contexte de chaque affaire.

Mais la réponse apportée en fonction de la gravité des faits reprochés ne doit pas aboutir à une « tarification » des sanctions, car il serait alors porté atteinte au principe de l'individualisation des sanctions.

La sanction doit avoir en effet pour finalité :

– d'attribuer à l'élève la responsabilité de ses actes, et de le mettre en situation de s'interroger sur sa conduite en prenant conscience de ses conséquences ;

– de lui rappeler le sens et l'utilité de la loi ainsi que les exigences de la vie en collectivité (respect de la société et des individus, nécessité de vivre ensemble de manière pacifique).

II – Les punitions scolaires et les sanctions disciplinaires

Par commodité de langage, les punitions scolaires sont distinguées des sanctions disciplinaires proprement dites.

Ainsi, dans un établissement scolaire, des faits d'indiscipline, des transgressions ou des manquements aux règles de la vie collective peuvent-ils faire l'objet soit de punitions, qui sont décidées en réponse immédiate par des personnels de l'établissement, soit de sanctions disciplinaires qui relèvent du chef d'établissement ou des conseils de discipline.

C'est pourquoi il est demandé que le règlement intérieur de chaque établissement comprenne des dispositions relatives tant aux punitions scolaires susceptibles d'être prononcées qu'aux sanctions disciplinaires proprement dites. Une telle rédaction des règlements intérieurs est susceptible de donner au régime disciplinaire la cohérence qui est indispensable à l'acceptation par les élèves des conséquences des fautes qu'ils peuvent commettre.

Les sanctions ne prennent en effet sens et efficience que lorsqu'elles s'inscrivent réellement dans un dispositif global explicite et éducatif, au travers duquel se construisent respect d'autrui, sens de la responsabilité et respect de la loi.

Il convient de prévoir également des mesures positives d'encouragement prononcées par le conseil de classe, qui pourront être définies dans le cadre du règlement intérieur.

2.1. Conditions de mise en œuvre

À toute faute ou manquement à une obligation, il est indispensable que soit apportée une réponse rapide et adaptée : par une réaction et une explication immédiates, il importe de signifier à l'élève que l'acte a été pris en compte.

Dans le même temps, le ou les responsables légaux des mineurs doivent être informés et, s'ils le demandent, pouvoir rencontrer un responsable de l'établissement.

Pour assurer cohérence et harmonisation des pratiques en matière disciplinaire, aussi bien dans la durée qu'entre les différentes classes d'un même établissement, une échelle des punitions et des sanctions figure au règlement intérieur.

Les punitions scolaires doivent être distinguées des sanctions disciplinaires :

– les punitions scolaires concernent essentiellement certains manquements mineurs aux obligations des élèves, et les perturbations dans la vie de la classe ou de l'établissement. Elles sont fixées par le règlement intérieur ;

– les sanctions disciplinaires concernent les atteintes aux personnes et aux biens et les manquements graves aux obligations des élèves. Le règlement intérieur doit reprendre la liste des sanctions fixées par les 2^{e} et 3^{e} alinéas de l'article 3 du décret du 30 août 1985 modifié.

2.2. Les punitions scolaires

Considérées comme des mesures d'ordre intérieur, elles peuvent être prononcées par les personnels de direction, d'éducation, de surveillance et par les enseignants ; elles pourront également être prononcées, sur proposition d'un autre membre de la communauté éducative, par les personnels de direction et d'éducation.

La liste indicative ci-après peut servir de base à l'élaboration des règlements intérieurs des établissements :

– inscription sur le carnet de correspondance ;

– excuse orale ou écrite ;

– devoir supplémentaire assorti ou non d'une retenue ;

– exclusion ponctuelle d'un cours. Elle s'accompagne d'une prise en charge de l'élève dans le cadre d'un dispositif prévu à cet effet. Justifiée par un manquement grave, elle doit demeurer tout à fait exceptionnelle et donner lieu systématiquement à une information écrite au conseiller principal d'éducation et au chef d'établissement ;

– retenue pour faire un devoir ou un exercice non fait.

Toute retenue doit faire l'objet d'une information écrite au chef d'établissement.

Les devoirs supplémentaires effectués dans l'établissement doivent être rédigés sous surveillance.

Les punitions infligées doivent respecter la personne de l'élève et sa dignité : sont proscrites en conséquence toutes les formes de violence physique ou verbale, toute attitude humiliante, vexatoire ou dégradante à l'égard des élèves.

Il convient également de distinguer soigneusement les punitions relatives au comportement des élèves de l'évaluation de leur travail personnel. Ainsi n'est-il pas permis de baisser la note d'un devoir en raison du comportement d'un élève ou d'une absence injustifiée. Les lignes et les zéros doivent également être proscrits.

2.3. Les sanctions disciplinaires

Les sanctions sont fixées dans le respect du principe de légalité et doivent figurer dans le règlement intérieur de l'établissement.

L'échelle des sanctions est celle prévue par le décret du 30 août 1985 modifié :

– avertissement,

– blâme,

– exclusion temporaire de l'établissement qui ne peut excéder la durée d'un mois, assortie ou non d'un sursis total ou partiel,

– exclusion définitive de l'établissement assortie ou non d'un sursis.

Le blâme constitue une réprimande, un rappel à l'ordre verbal et solennel, qui explicite la faute et met l'élève en mesure de la comprendre et de s'en excuser. Adressé à l'élève en présence ou non de son ou ses représentants légaux par le chef d'établissement, il peut être suivi d'une mesure d'accompagnement d'ordre éducatif.

Lorsque le sursis est accordé, la sanction est prononcée, mais elle n'est pas mise en exécution, dans la limite de la durée du sursis, en cas de sursis partiel. Il est précisé que la récidive n'annule pas le sursis. Elle doit donner lieu à l'engagement d'une nouvelle procédure disciplinaire.

Le chef d'établissement transmettra au recteur d'académie, sous couvert de l'inspecteur d'académie, directeur des services départementaux de l'éducation nationale, les procès verbaux des conseils de discipline et un état trimestriel des exclusions éventuellement prononcées avec leurs motifs.

Dès lors que les punitions et les sanctions qui peuvent être prononcées dans l'établissement scolaire sont clairement définies, toute mesure qui a pour effet d'écarter durablement un élève de l'accès au cours et qui serait prise par un membre des équipes pédagogique et éducative en dehors des procédures réglementaires décrites dans la présente circulaire, est assimilable à une voie de fait susceptible d'engager la responsabilité de l'administration.

5. On voit par exemple qu'il est tout à fait possible d'imposer à un élève ***une retenue pour faire un travail non fait*** (classeur non à jour, DM non rendu, etc.), en respectant certaines conditions (information écrite au chef d'établissement, surveillance). Il est de même tout à fait possible d'infliger un ***avertissement***, qui est une ***sanction*** (et non une punition), et qui, du point de vue de la gravité des sanctions, vient avant le ***blâme***. Il est également tout à fait possible de formuler un ***encouragement*** à l'égard d'un élève, mais que, en sens inverse, « le fait qu'un élève ait déjà été sanctionné ne justifie pas à lui seul qu'une sanction lourde soit prononcée pour un nouveau manquement de moindre gravité ». D'une manière générale, on retiendra comme premier principe à mettre en œuvre sans faiblir que, ***« à toute faute ou manquement à une obligation, il est indispensable que soit apportée une réponse rapide et adaptée : par une réaction et une explication immédiates, il importe de signifier à l'élève que l'acte a été pris en compte »***. Cela ne signifie pas pour autant que l'on recoure constamment à des punitions, pour ne pas parler de sanctions proprement dites, mais que l'on n'hésitera pas, le cas échéant, à y recourir. À l'instar des règles de vie et de travail, l'ensemble des punitions et sanctions que prévoit le règlement intérieur sur la base du texte cité plus haut ne saurait bien entendu être présenté en un coup aux élèves : il le sera progressivement, autant que la chose apparaît nécessaire, en vertu du principe selon lequel « toute sanction doit être motivée et expliquée ».

6. Avant de sanctionner, il convient d'avoir rappelé ou énoncé la règle dont le manquement sera sanctionné : ainsi en va-t-il, par exemple, pour « l'oubli du manuel ». Mais la liste des sanctions elles-mêmes ne relève pas de la décision personnelle du professeur : le professeur ***n'est pas libre d'ajouter*** des sanctions de son cru à la liste prévue par les instances dont il s'autorise dans la classe.

7. En-deçà et au-delà de la punition ou de la sanction éventuelle, on s'attachera à penser le traitement des situations de manquement en termes de ***réparation***. Le texte déjà longuement cité consacre à ce sujet le développement reproduit ci-après :

2.4.2. Les mesures de prévention, de réparation et d'accompagnement

Le règlement intérieur peut prévoir des mesures de prévention, des mesures de réparation prononcées de façon autonome. Il peut également prévoir des mesures de réparation ou d'accompagnement prononcées en complément de toute sanction.

Ces mesures peuvent être prises par le chef d'établissement ou le conseil de discipline, s'il a été saisi.

Les mesures de prévention

Il s'agit de mesures qui visent à prévenir la survenance d'un acte répréhensible (exemple : la confiscation d'un objet dangereux). L'autorité disciplinaire peut également prononcer des mesures de prévention pour éviter la répétition de tels actes : ce peut être d'obtenir l'engagement d'un élève sur des objectifs précis en termes de comportement. Cet engagement donne lieu à la rédaction d'un document signé par l'élève.

Les mesures de réparation

Comme l'a précisé la circulaire du 27 mars 1997, la mesure de réparation doit avoir un caractère éducatif et ne doit comporter aucune tâche dangereuse ou humiliante. L'accord de l'élève et de ses parents, s'il est mineur, doit être au préalable recueilli. En cas de refus, l'autorité disciplinaire prévient l'intéressé qu'il lui sera fait application d'une sanction.

Le travail d'intérêt scolaire

Mesure de réparation, il constitue également la principale mesure d'accompagnement d'une sanction notamment d'exclusion temporaire ou d'une interdiction d'accès à l'établissement.

En effet, cette période ne doit pas être pour l'élève un temps de désœuvrement, afin d'éviter toute rupture avec la scolarité. L'élève est alors tenu de réaliser des travaux scolaires tels que leçon, rédaction, devoirs, et de les faire parvenir à l'établissement selon des modalités clairement définies par le chef d'établissement en liaison avec l'équipe éducative.

L'élève doit pouvoir à cette occasion rencontrer un membre de l'équipe pédagogique. En effet, un élève momentanément écarté de l'établissement reste soumis à l'obligation scolaire. Il convient donc de prévenir tout retard dans sa scolarité et de préparer son retour en classe.

L'ensemble de ces mesures place ainsi l'élève en position de responsabilité. Elles ne peuvent être prescrites que si elles sont prévues au règlement intérieur.

8. S'agissant du thème de la réparation, la sixième des 12 fiches est ainsi rédigée :

La notion de réparation est indissociable de la notion de responsabilité personnelle. Celui qui manifeste le désir de réparer est en position de responsabilité par rapport à ses actes : il les reconnaît et les assume au point de souhaiter, dans la mesure du possible, en annuler les conséquences. C'est aussi un signe en direction de la victime ou tout simplement un geste de bonne volonté pour signifier que l'on entend rester membre d'un groupe.

Proposer une réparation alternative ou cumulée avec une punition ou une sanction à l'élève fautif, c'est donc lui permettre de prendre conscience de sa responsabilité et d'éviter de recommencer.

La réparation proposée doit avoir un lien explicite avec sa qualité d'élève et prendre en compte la nature de sa faute.

La réparation faisant appel à une démarche de médiation

Il s'agit de provoquer une explication, seul à seul ou en présence d'un médiateur (conseiller principal d'éducation, professeur principal, chef d'établissement, adjoint, parents), entre chacune des parties pour qu'elles reconnaissent la position de l'autre.

Il y lieu de rappeler à ce propos le rôle de médiation que peut jouer la commission de vie scolaire (cf.

fiche 9)

On veillera à ne pas mettre sur le même plan l'agresseur et l'agressé et à obtenir l'accord préalable de la victime.

Selon l'objectif visé, la démarche de médiation peut déboucher sur une conciliation, une ferme mise au point, une "contractualisation" avec la famille.

Des excuses peuvent être présentées.

Un engagement fixant des objectifs précis en termes de comportement et de travail scolaire

Sa forme varie. Il est signé par l'élève, et selon les cas par sa famille, le professeur principal, le chef d'établissement, le médiateur ou l'éducateur.

Travail d'intérêt scolaire en remplacement d'une punition

Un manquement d'une faible gravité peut justifier qu'un travail scolaire (devoirs, exercices, révisions...) soit prescrit à la place d'une punition.

Il ne s'agit, ni de faire réaliser un travail non fait, mesure qui relève du domaine pédagogique et non disciplinaire, ni d'un travail destiné à accompagner une sanction ou une punition (cf. fiche 9).

Actions à caractère éducatif

Il peut s'agit d'une réponse immédiate apportée à un comportement perturbateur : classement de documents, rangement de livres...

Ce peut être également la participation à un projet pédagogique dans une classe que l'élève a perturbée (aide à la mise en page informatique d'un projet, prise en charge d'un élève plus en difficulté, participation à l'organisation d'activités de lecture-écriture, à l'animation de clubs etc.).

Travail d'intérêt collectif

Il peut être une alternative ou un complément à une punition ou une sanction. Il nécessite l'accord préalable de l'intéressé et de sa famille.

Il peut s'agir de faire réparer à l'élève le dommage qu'il a causé à un bien, dans la mesure où cela s'avère possible. Les travaux peuvent aussi concerner l'amélioration du cadre de vie.

Ces travaux doivent, dans tous les cas, être en rapport avec les capacités de l'élève ; ils doivent être exempts de tout caractère humiliant ou dangereux et accomplis sous la surveillance d'un personnel de l'établissement qualifié.

9. On trouvera le texte de la circulaire du 27 mars 1997, mentionnée dans ce qui précède, dans le fichier Mesures alternatives au conseil de discipline.doc. Cette circulaire rappelle notamment ceci :

Il apparaît opportun – et certains établissements l'ont déjà expérimenté – de mettre en place des formules souples, alternatives au conseil de discipline, notamment dans le cas d'attitudes et de conduites perturbatrices répétitives d'élèves qui manifestent ainsi une incompréhension, parfois un rejet des règles collectives.

Elle préconise à cet égard la création dans l'établissement d'une commission « destinée à favoriser le dialogue avec l'élève et à faciliter l'adoption d'une mesure éducative personnalisée », et ajoute à ce propos :

La nature des mesures que cette commission peut proposer implique l'engagement personnel de l'élève à l'égard de lui-même comme à l'égard d'autrui et fait appel à sa volonté de participer positivement à la vie de la communauté scolaire.

10. Cette notion « institutionnelle » de ***réparation*** doit inspirer les décisions du professeur dans le cadre moins formel et plus immédiat des manquements les plus ordinaires qui ponctuent la vie de la classe. Ainsi, ***si les dispositifs mis en place dans la classe donnent un sens à la chose***, le professeur pourra-t-il demander à l'élève ayant oublié son livre, afin de réparer le tort ainsi causé tant ***à lui-même*** qu'***à la classe*** (dans le fonctionnement de laquelle son oubli n'aura pas manqué de créer une petite perturbation), de présenter oralement, lors d'une prochaine séance, à titre de bilan ou de rappel, le contenu du travail auquel le manuel oublié avait servi de support, etc.

2.2. Informatique

Comment mener à bien un TP informatique ? (présentation...) (2[de], 2)
Combien de séances en salle informatique est-il raisonnable d'envisager au cours de l'année ? (en classe de seconde et de première) (2[de], 2)
Si il y a un tableau interactif à l'IUFM, pourra-ton faire une séance pour apprendre à l'utiliser ? (2[de], 2)
Au lycée Saint Charles, la calculatrice imposée est la TI 82 (stats). Est-ce que si j'utilise ma voyage 200 en rétroprojection, les programmes sont les mêmes ou bien faut-il que je me procure la TI 82 ? (2[de], 2)

1. Si l'on excepte la dernière question, ces questions soulignent un abord inadéquat de la problématisation de l'usage des TICE dans l'enseignement. Ce n'est pas par les structures faut penser l'intégration des outils informatiques mais par les fonctions. En d'autres termes, il ne faut pas d'abord se demander quoi faire dans une séance informatique, combien en faire, etc. mais examiner, dans l'ordinaire de l'enseignement, en quoi l'informatique peut-elle être utile, et l'introduire à chaque fois qu'elle l'est. Nous verrons la semaine prochaine une des grandes fonctions de l'informatique : la réalisation de la partie expérimentale du moment technologico-théorique. Nous reviendrons sur ces questions ultérieurement dans le séminaire.

2. Les structures de programmation utiles en seconde sont très semblables entre la TI-V200 et la TI-82 stats. On note pour l'essentiel quelques différences dans l'appel du programme et de l'éditeur de programme, dans le nom du programme et dans le fait qu'il n'y a qu'une instruction de fin de bloc, end (au lieu de EndIf, EndFor, etc.). (On pourra se procurer le manuel d'une TI 82 stats sur le site de TI à l'adresse http://education.ti.com/downloads/guidebooks/graphing/82stat/TI82Stats_fr.pdf.)

Si ces différences sont minimes pour le professeur, qui peut continuer à travailler avec la V200, elles s'avèrent cependant perturbantes pour des élèves en début d'apprentissage. Le professeur doit donc se rendre disponible la calculatrice de la classe : avant de l'acheter, il peut examiner si l'établissement ne possède pas quelques unités de calculatrices de ce modèle, éventuellement rétroprojetables, qu'il pourra utiliser en classe, pour vérifier sur place, avant la séance d'enseignement, la validité de ses programmes et pour se mettre en main les techniques qu'il aura à utiliser.

La question suivante n'a pas pu être examinée en séance ; elle est à étudier « hors classe ».

2.3. Programmation de l'étude : les fonctions en seconde (suite)

1. La notion de fonction (étude qualitative) est abordée dans les nouveaux programmes en classe de 3[e]. Cette notion est aussi dans le nouveau programme de seconde. Doit-on reprendre entièrement la notion en repartant de zéro ou peut-on aller plus rapidement sur les choses « simples » ? (0)
2. Est-il pertinent de commencer en seconde par enseigner les généralités sur les fonctions ? Vaut-il alors

mieux établir un lien avec la 3e (il y a une certaine redondance avec l'enseignement de 3e) ou considérer qu'ils repartent à zéro en commençant par une activité introductrice ? (2de, 1)

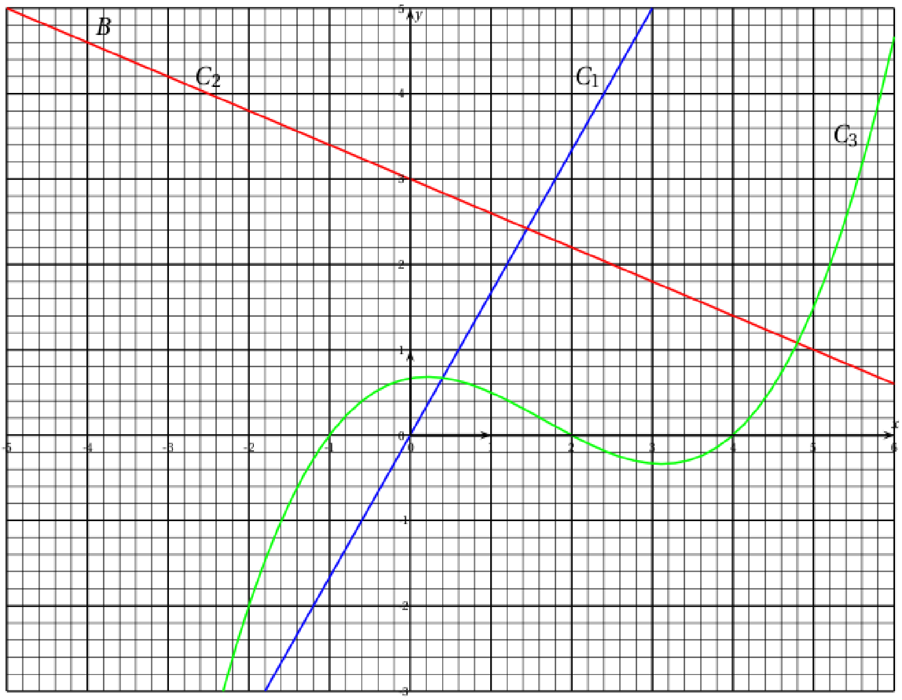
On avait mis en évidence à la lecture des programmes que du travail avait été fait en troisième à propos des fonctions, et notamment que les notions de courbe représentative et d'image ainsi que, de façon plus limitée, celle d'antécédent, avaient été travaillées. Nous avions également mis en évidence que les variations d'une fonction, y compris s'agissant des fonctions linéaires et affines, relèvent clairement du programme de seconde et n'ont pas été abordées en troisième. Pour approfondir ce qui a été fait en classe de 3e, nous avions demandé d'examiner le texte de l'épreuve du DNB de la session 2009 pour la métropole. On examinera d'abord l'exercice 3 de la rubrique Activités numériques, dont voici l'énoncé.

EXERCICE 3

On donne ci-dessous les représentations graphiques de trois fonctions. Ces représentations sont nommées C_1, C_2 et C_3.

L'une d'entre elles est la représentation graphique d'une fonction linéaire.

Une autre est la représentation graphique de la fonction f telle que $f : x \mapsto -0,4x+3$



1. Lire graphiquement les coordonnées du point B.
2. Par lecture graphique, déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe C_3 avec l'axe des abscisses.
3. Laquelle de ces représentations est celle de la fonction linéaire ? Justifier.
4. Laquelle de ces représentations est celle de la fonction f ? Justifier.
5. Quel est l'antécédent de 1 par la fonction f ? Justifier par un calcul.
6. A est le point de coordonnées $(4,6 ; 1,2)$. A appartient-il à C_2 ? Justifier par un calcul.

Commentaires oraux

On y voit notamment des spécimens des types de tâches suivant :

Lire les coordonnées d'un point de la courbe représentative d'une fonction (fonction affine et

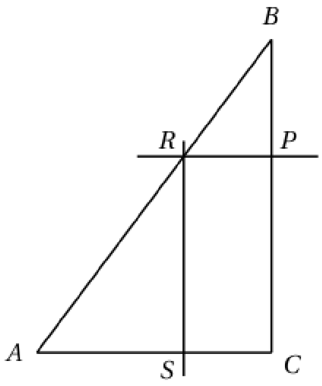
non affine) ;
Identifier la courbe représentative d'une fonction affine et d'une fonction linéaire ;
Déterminer l'antécédent d'un nombre par une fonction affine ;
Déterminer si un point donné par ses coordonnées appartient à la courbe représentative d'une fonction (fonction affine).

Considérons maintenant le problème.

On considère un triangle ABC tel que : $AB = 17,5$ cm ; $BC = 14$ cm ; $AC = 10,5$ cm.

Partie 1

1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en C.
2. Soit P un point du segment $[BC]$.
   La parallèle à la droite (AC) passant par P coupe le segment $[AB]$ en R.
   La parallèle à la droite (BC) passant par R coupe le segment $[AC]$ en S.
   Montrer que le quadrilatère $PRSC$ est un rectangle.



La figure n'est pas en vraie grandeur

3. Dans cette question, on suppose que le point P est situé à 5 cm du point B.
   a. Calculer la longueur PR.
   b. Calculer l'aire du rectangle $PRSC$.

Partie 2

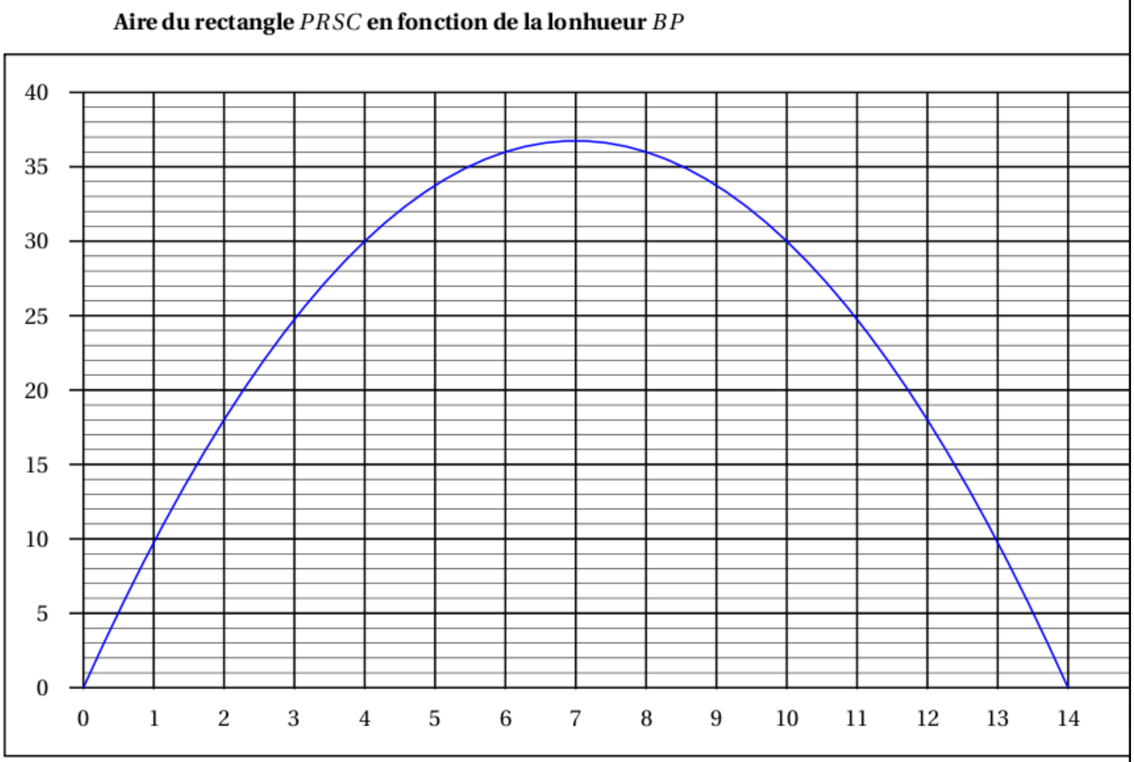
On déplace le point P sur le segment $[BC]$ et on souhaite savoir quelle est la position du point P pour laquelle l'aire du rectangle $PRSC$ est maximale.

1. L'utilisation d'un tableur a conduit au tableau de valeurs suivant :

Longueur BP en cm	0	1	3	5	8	10	12	14
Aire de $PRSC$ en cm^2	0	9,75	24,75		36		18	0

   Indiquer sur la copie les deux valeurs manquantes du tableau.
   Justifier par un calcul la valeur trouvée pour $BP = 10$ cm.

2. Un logiciel a permis d'obtenir la représentation graphique suivante :



À l'aide d'une lecture graphique, donner :

a. Les valeurs de BP pour lesquelles le rectangle $PRSC$ a une aire de 18 cm^2.

b. La valeur de BP pour laquelle l'aire du triangle semble maximale.

c. Un encadrement à 1 cm^2 près de l'aire maximale du rectangle $PRSC$.

Partie 3

1. Exprimer PC en fonction de BP.
2. Démontrer que PR est égale à $0,75 \times BP$.
3. Pour quelle valeur de BP le rectangle $PRSC$ est-il un carré ?

La deuxième partie met en œuvre trois types de tâches relatives aux fonctions, dans le contexte d'un problème de modélisation. Il s'agit déterminer l'image d'un nombre par une fonction dont on a la représentation graphique ; la valeur où une fonction admet un maximum ainsi que celle du maximum. On notera que ces deux derniers types de tâches peuvent paraître excéder le programme de troisième : ce serait le cas s'ils apparaissaient en tant que tels. Mais c'est le maximum de l'aire qu'il s'agit de déterminer par lecture graphique, sans véritablement donner de justification, et c'est donc la situation qui permet de donner du sens et d'obtenir la mise en œuvre d'une technique.

La considération d'ouvrages pour la classe de 3^e, notamment à travers leurs corpus d'exercices, confirmerait qu'on a là les principaux types de tâches relatifs aux fonctions en classe de 3^e, exception faite de types de tâches spécifiques des fonctions linéaires et affines :

Déterminer si un point appartient à la courbe représentative d'une fonction,
ce qui suppose de Déterminer l'image d'un nombre par une fonction ;
Déterminer l'antécédent d'un nombre par une fonction (technique graphique ou via un tableau de valeurs si la fonction n'est pas affine) ;
Déterminer les coordonnées d'un point d'une courbe représentative ;

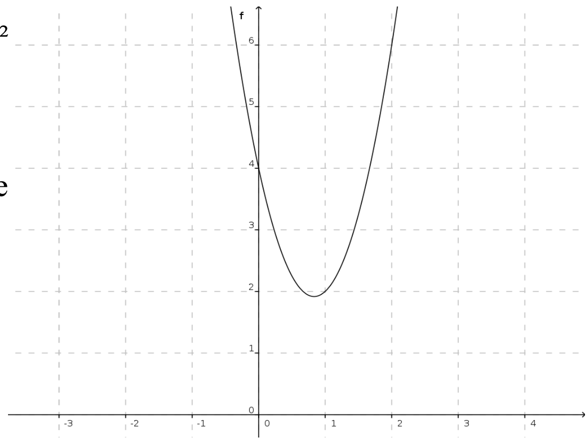
auxquels il faudrait ajouter la modélisation d'une situation par une fonction et la représentation graphique d'une fonction donnée par son expression algébrique.

C'est donc autour de ces types de tâches que se bâtira le test d'entrée. On a dit qu'il s'agissait de prévoir un travail qui s'effectue en classe en une quinzaine de minutes, qui comportent les principaux types de tâches qui sont indispensables au travail sur le thème à venir et qui ont été étudiés dans la classe antérieure, sans chercher la difficulté mais sans non plus choisir des types de tâches trop « élémentaires ». Compte tenu de ce qui précède, on peut par exemple proposer les deux exercices suivants :

1. On considère la fonction qui à x associe $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$.

a) Déterminer l'image de $-\frac{1}{3}$ par f.

b) Le point A(1, 2) appartient-il à la courbe représentative de f ? On justifiera la réponse.
c) Déterminer un antécédent de 2 par f ?



2. Armelle souhaite travailler quelques heures par mois dans un musée pour gagner de l'argent de poche. On lui propose de lui verser 40 euros au début du mois, puis 6 euros par heure de travail.
a) Parmi les quatre fonctions suivantes, laquelle modélise cette situation ?
$f(x) = 40x + 6$; $g(x) = 6x + 40$; $h(x) = 60 + 4x$; $j(x) = 6x - 40$.
b) Déterminer le nombre d'heures qu'Armelle doit travailler pour avoir 85 euros d'argent de poche par mois.

2.5. Organisation didactique et structure ternaire

De nombreuses questions concernaient cette semaine la structure ternaire de l'étude. Nous les examinerons rapidement, et nous reviendrons sur certaines lors de séances ultérieures du séminaire.

Nous n'avons eu le temps d'examiner que les points 1, 2 et 3. Les autres points sont à étudier hors classe.

1. En pratique, la notion d'AER veut dire quoi ? L'activité de recherche est-elle différente de l'activité d'étude ? (5^{e} et 4^{e}, 2)
2. Qu'est-on vraiment censé faire en activité ? Est-ce seulement des exercices permettant d'introduire des notions vues en cours ensuite ? Ou ont-elles une autre fonction ? (2de, 2)
3. La notion d'AER est-elle à partager avec les élèves ? (i.e. dit-on aux élèves que l'on fait des « AER » ou bien des « exercices de cours » ?) (4^{e}, 2)
4. Que faire lors d'une AER si l'on sent tout le monde perdu ? Le professeur doit-il intervenir ? Ou est-ce le propre d'une AER que de se sentir perdu ? (2de, 2)
5. Lors du chapitre « Opérations sur les nombres relatifs » en classe de 4^{e}, je souhaite aborder la notion de « Programmes de calculs ». Je comptais expliquer rapidement la notion puis donner quelques exemples (comme: choisir un nombre. Le multiplier par 2. Ajouter 10 ...). Mais cela ne me satisfait pas. Je ne vois pas

comment construire une AER puis la synthèse, de cette notion de « programme de calculs » pour une classe de 4^e. Serait-il possible d'avoir un éclairage là-dessus ? (4^e, CR)
6. Quelle AER imaginer pour les règles de priorités des opérations en cinquième ? Il s'agit d'une convention simplificatrice et non d'une propriété à découvrir. (5^e, 2)
7. Si je veux faire des fiches méthodologiques, dans quelle partie du classeur dois-je leur faire mettre (pour des élèves de troisième) ? (3^e, 2)
8. Dans la partie synthèse, faut-il refaire des exemples (en sachant que l'on en a traité en activité) ? (5^e + PPRE + ATP 6^e, 2)
9. Comment doit se dérouler une séance de correction d'exercices ? Exemple en 4^e : peut-on lors de la correction rappeler des notions de 5^e ? (C'est-à-dire mettre en synthèse dans la partie correction d'exercices les règles d'addition et de soustraction des nombres relatifs, notions qui sont exigibles dans le socle en 4^e.) Ceci permet pour moi de ne pas faire de révisions systématiques et d'éviter le classique « corrigé des exercices ». (5^e et 4^e, 2)
10. Avec la structure ternaire (activités, synthèse, exercices) comment trouver le temps pour faire beaucoup d'exercices d'application (je ne trouve pas de temps de faire plusieurs exercices du même type). (2de, 2)
11. Comment organiser les traces écrites de ce qu'on prévoit pour le cours ? Faut-il dissocier exercices, cours, activités, ou plutôt faire quelque chose de linéaire ? Faut-il prévoir tout le cours du chapitre avant de réfléchir à la façon de l'introduire ? (4^e et 3^e, 2)
12. Quel serait le découpage, l'organisation « idéale », « classique » d'une séquence pour une classe de 4^e ? (4^e, 2)

1. D'un point de vue absolu, une activité peut être dite d'étude quand le problème auquel on tente d'apporter une réponse est un problème qui a une solution dans (au moins) une institution de la société, une activité de recherche désignant alors le cas où le problème est ouvert (*i.e.* n'a pas de solution). L'association d'étude et de recherche, comme compléments du substantif activité, est d'abord là pour signifier que, lorsqu'on rencontre un problème, on n'est en général pas sûr de sa nature ; c'est d'abord le contrat didactique (les règles, non écrites, qui régissent l'étude scolaire) qui assure que les problèmes étudiés par la classe ne sont pas des problèmes ouverts.

2. On répète ici brièvement ce qui a été développé lors des deux séance précédentes : une activité (d'étude et de recherche) est un dispositif qui permet de produire une organisation mathématique. On sait maintenant dire qu'elle doit réaliser trois fonctions de l'étude : le moment de la première rencontre, le moment exploratoire et le moment technologico-théorique. On insistera une fois de plus sur le fait que la notion de « cours » est inadéquate pour penser les organisations de l'étude en vigueur au collège et au lycée aujourd'hui.

3. Il est effectivement indiqué de parler d'AER avec les élèves, à la fois pour qu'ils repèrent le travail à effectuer (on produit une organisation mathématique, on ne s'entraîne pas à propos d'une OM déjà produite) et pour que le professeur soit également au clair sur ce qu'il s'agit de mettre en place.

4. Il est normal, lors d'une AER, de ne pas bien savoir d'emblée le chemin à suivre. Mais celui-ci doit se dégager au fur et à mesure, sous la direction du professeur. Si l'on doit accepter une certaine dose d'incertitude et un temps pendant lequel la solution du problème se dérobe, le professeur ne doit effectivement pas laisser durablement s'enliser les élèves, et sa direction d'étude doit permettre que des résultats partiels se dégagent. Cela dépend bien entendu, non seulement de la direction en classe, mais aussi de la préparation de l'AER qu'il faut calibrer de façon à ce que les élèves puisse s'engager dans des voies qui, sans donner d'emblée la solution, pourront être exploitées pour la produire.

5. On ne saurait arriver à faire une AER sur la notion de programme de calcul sans partir d'un ***problème,*** c'est-à-dire d'un ***spécimen d'un type de tâches*** pour lequel on ne dispose pas de technique, dans lequel la notion de programme de calcul et au moins une de ses propriétés apparaissent comme les ***éléments clés*** dans la solution de ce problème, soit encore dans ***l'élaboration et la justification de la technique*** relative au type de tâches dont il est un spécimen. Or la situation évoquée par la question ne contient pas de type de tâches problématique, le type de tâches « exécuter un programme de calcul » ayant été étudié en classe de 5^{e}. On trouvera des ressources sur cette question dans les séminaires des années antérieures et nous y reviendrons dans l'année.

6. Dans les cas, rares, où il s'agit de faire étudier une convention, c'est la nécessité d'une telle convention qu'il faut faire émerger, le choix de la convention étant alors examiné dans la littérature (manuel de la classe, encyclopédie, Internet, etc.).

7. La fonction de telles fiches étant de mettre en forme les types de tâches et les techniques qui leur sont associées, elles ont tout naturellement leur place dans la partie synthèse. Sauf dans des cas exceptionnels, si la synthèse est bien faite, de telles fiches font double emploi avec la synthèse et sont donc inutiles...

8. La synthèse devant porter la trace de l'ensemble de l'organisation mathématique, elle doit comprendre les types de tâches et les techniques. Il est quelquefois plus pratique d'institutionnaliser les techniques par le truchement d'un exemple que de les mettre en mots.

9. Pour la raison même invoquée par la question, « éviter les révisions systématiques », la technique décrite est effectivement envisageable en la développant quelque peu : il ne s'agit pas de la mettre en œuvre de manière systématique mais quand le besoin s'en fait sentir dans le travail de la classe. À l'occasion du travail d'un exercice, on s'aperçoit qu'on n'est pas bien au point sur telle organisation mathématique, et on met donc en forme, dans la synthèse, cette organisation mathématique. Dans certaines classes, on peut s'attendre en effet comme le suggère la rédactrice de la question, que les éléments non exigibles pour le socle commun l'année précédentes soient des OM pour lesquels le besoin évoqué se fera sentir.

10. D'une part, il est moins nécessaire de faire « beaucoup » d'exercices pour travailler les OM quand celles-ci ont émergé par l'intermédiaire d'une activité d'étude et de recherche parce que les élèves ont travaillé à la mise en place des techniques et qu'ils les ont donc déjà partiellement en main à l'issue de l'AER. D'autre part, il faut prendre garde à ne pas découper des types de tâches trop petits, ce qui augmente inutilement de travail de l'OM. Pour donner une indication, 3 spécimens de chaque type de tâches étudié suffit généralement.

11. On reformulera d'abord la deuxième partie de cette question, qui a été posée avant que les outils d'analyse aient été introduits. Faut-il prévoir l'organisation mathématique avant de travailler à la fabrication de l'organisation de l'étude ?

On aurait du mal à concevoir la manière de mettre en place une organisation mathématique qui ne soit pas suffisamment circonscrite : il faut donc effectivement d'abord constituer l'OM. Le travail de fabrication de l'organisation didactique d'une OM donnée pourra cependant amener à retoucher l'OM fabriquée.

Pour que la préparation soit fonctionnelle, il faut effectivement qu'elle suive également une structure ternaire.

12. On peut maintenant formuler un premier élément de réponse à cette question : une séquence, suite de séances ayant pour objet l'étude d'une OM, doit réaliser l'ensemble des six moments de l'étude de cette OM.

Prochaine séance de séminaire : Mardi 22 septembre de 14 h à 17 h 15

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 4 : mardi 22 septembre 2009

Programme de la séance. 0. Questions de la semaine // 1. Problématique et fonctionnement du Séminaire // 2. Observation & analyse // 3. Forum des questions

Informations

Vacance de séminaire, le mardi 29 septembre 2009 ; les GFP ont bien lieu le matin.

Pour les CAFEP et les PSSIT, mise à niveau TICE le mardi 29 septembre 2009 de 14 h à 17 h à la place du séminaire.
Les 3 autres heures auront lieu soit les mardis 13 octobre et 10 novembre 2009 de 17 h 45 à 19 h 15 ; soit un mardi matin lors d'une vacance de GFP.

On rappelle que, pour le reste de la promotion, la mise à niveau TICE a lieu le mercredi 30 septembre, suivant les horaires communiquées en GFP.

0. Questions de la semaine

On retrouve dans les questions posées la semaine dernière l'essentiel des thèmes abordés lors des semaines précédentes, avec une nette prédominance de ce qui touche à l'organisation de l'étude, même si des questions sur les organisations mathématiques sont toujours représentées.

1. Problématique et fonctionnement du Séminaire

1.1. Recherches dans les archives

Lors de la présentation du document sur la formation et la validation, nous avions annoncé une rubrique : ***Les Archives du Séminaire***, qui prend place dans la partie ***Séance d'explicitation*** du Séminaire.

> 4.1. La rubrique ***Les Archives du Séminaire*** a pour objet la recherche et la présentation d'éléments de réponse $R^\lozenge$ à certaines questions Q dans les archives des séminaires des années 2000-2001 à 2008-2009. (Chaque année de séminaire fait l'objet d'un fichier unique, qu'on trouvera à l'adresse http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/fi/pcl2/2A.TXT/2009-2010/ombilic.html et qu'on aura avantage à sauvegarder sur une clé USB pour s'en faciliter la consultation.) Cette rubrique se réalise à travers le dispositif décrit ci-après.
>
> – Une question choisie par le responsable du Séminaire après consultation des tuteurs est communiquée à un trinôme dont l'un des membres est concerné par la question ; ce trinôme procède à une recherche dans les ***Archives du Séminaire*** afin de dégager les éléments de réponse que ces archives recèlent.

– Le trinôme désigné prépare, ***pour la séance d'explicitation suivante***, une présentation orale, d'une durée de ***10 minutes environ***, en s'en tenant strictement aux éléments de réponses $R^{\lozenge}$ qu'il aura extraits des ***Archives du Séminaire***.

– Chaque présentation fait l'objet d'un débat n'excédant pas 10 minutes et peut en outre appeler, de la part des formateurs, des commentaires, correctifs et additifs, immédiatement ou dans les semaines qui suivent. Elle est suivie, lors de la séance d'explicitation suivante, d'un ***compte rendu de la contribution*** que les matériaux de réponse $R^{\lozenge}$ ont permis d'apporter ***au développement de la réponse*** $R^{\blacktriangledown}$.

– Chaque trinôme fournit au responsable du Séminaire par courriel, dans un délai de quinze jours, une version écrite de ***trois pages maximum*** de sa présentation orale sous forme d'un fichier texte (format odt ou doc). Ce texte est également mis en ligne par le trinôme sur l'ENT Espar, dans le dossier *Recherches dans les archives*, de façon à être à la disposition de l'ensemble des participants. Il pourra par ailleurs être pris en considération en fin d'année pour l'obtention du C2i2e si le professeur stagiaire le place dans son portfolio.

4.2. La rubrique ***Les Archives du Métier*** (sous-entendu : autres que les Archives du Séminaire) concerne l'ensemble des documents pertinents pour la formation au métier et l'exercice du métier de professeur de mathématiques, que ces documents soient extraits de manuels, de revues professionnelles (médiathèque), de sites Internet, etc. Cette rubrique se réalise à travers le dispositif décrit ci-après.

– Un trinôme propose à son tuteur de GFP, qui les agrée ou non, une question Q ainsi qu'une réponse $R^{\lozenge}$ découverte dans la documentation que ce trinôme s'est rendu disponible.

– Ayant reçu l'agrément de son tuteur, le trinôme effectue, lors ***d'une des séances d'explicitation suivantes***, une présentation orale d'une durée de ***10 minutes environ*** de la question Q et de la réponse $R^{\lozenge}$ en précisant

• les conditions de l'observation de $R^{\lozenge}$ (source, etc.) ;

• éventuellement sous forme de simples interrogations, des éléments d'analyse de $R^{\lozenge}$;

• semblablement, des éléments d'évaluation de $R^{\lozenge}$ dans le cadre d'un projet de développement sommairement indiqué.

– La présentation fait l'objet d'un bref commentaire des formateurs suivi d'un échange, le tout de 10 minutes environ ; en fonction des besoins, le travail ainsi amorcé est prolongé dans le Séminaire du mardi après-midi et/ou en GFP.

La première séance d'explicitation aura lieu le mardi 6 octobre 2009. Ce jour-là, le mardi après-midi aura la structure suivante :

14 h – 15 h 15 : Partie « Séminaire classique »
15 h 30 – 16 h 30 : Partie « Séance d'explicitation »
16 h 30 – 17 h 15 : rencontre avec les IPR de mathématiques
17 h 20 – 18 h 50 : Séance de travaux dirigés (la moitié des trinômes seront présents).

Les noms des élèves professeurs concernés par la séance de TD seront communiqués en GFP la semaine prochaine. ***Ceux qui ont un ordinateur portable sont priés de l'apporter pour cette séance de TD.***

Deux exposés seront au programme de la séance d'explicitation du 6 octobre.

a) Une première recherche dans les *Archives* tentera de répondre à la question suivante :

Que nous disent les *Archives du Séminaire* quant à la **gestion du temps dans l'organisation de l'étude** ?

• Le compte rendu de la recherche s'efforcera de présenter (en les choisissant adéquatement) des matériaux pour une réponse aux questions de la semaine ci-après éventuellement présents dans les *Archives*.

1. Lorsque l'on fait une séance d'exercices durant deux heures, comment fait-on pour intéresser les élèves jusqu'à la dernière minute ? (NB, 3)
2. L'expérience montre que les élèves sont plus agités l'après-midi, a fortiori le vendredi après-midi. Quel genre d'activité (au sens large) est-il préférable de faire pour tirer le meilleur bénéfice de la séance ? (BCL, 3b)
3. Combien de temps doit durer une AER ? (est-ce de l'ordre d'un quart d'heure ou plutôt d'une heure entière ?). (FA, 1)
4. J'ai une classe de 6e. Les élèves perdent beaucoup de temps à changer de cahier, écrire et me posent beaucoup de questions (de quelle couleur souligner, combien de lignes sauter). Ainsi, faire une activité puis passer au cours et finir par les exercices prend beaucoup de temps. Comment minimiser les pertes de temps au niveau de l'organisation (i.e. à ce niveau décrit) ? (FA, 2)
5. J'aurais souhaité avoir une idée de la durée type au maximum de chaque élément qui compose une séance : correction d'exercices, synthèse de cours... (MB, 3)
6. Dans une séance, a-t-on le temps de faire l'activité, d'écrire la synthèse au tableau et de résoudre ensemble un exercice d'application pour que les élèves aient ensuite tous les éléments nécessaires pour résoudre les exercices à faire à la maison ? (AB, 1)
7. Quel serait le découpage, l'organisation « idéale », « classique » d'une séquence pour une classe de 4e ? (MC, 2)
8. Comment bien organiser une séance de 55 minutes ? Quelle part de temps consacrer à l'AER ? À la synthèse ? Aux exercices d'application ? (AL, 2)

• Cette recherche est confiée au trinôme formé de MC, AB et JC.

b) La deuxième recherche dans les *Archives* aura trait à la question suivante :

Que nous disent les *Archives du Séminaire* quant ***aux systèmes didactiques auxiliaires (SDA)*** ?

• Le compte rendu de la recherche s'efforcera de présenter (en les choisissant adéquatement) des matériaux pour une réponse aux questions de la semaine ci-après éventuellement présents dans les *Archives*.

1. Comment organiser une séance de PPRE en classe de 6e ? (BCL, 3a)
2. En « soutien », est-on obligé de prendre la classe en groupes ou peut-on garder la classe entière (pour avancer le cours par exemple) ? (AM, 3)
3. En quoi consiste une séance d'ATP ? (CS, 0)
4. J'ai ma classe une heure par semaine en demi-groupe. Les différences de niveaux sont si différentes que je n'arrive pas à faire la même chose avec les deux groupes. Que faire ? (LM, 3)
5. Les heures de module (en demi-groupe) doivent-elles être exclusivement réservées aux activités ? Peut-on prendre le risque de commencer une synthèse alors qu'il est possible de ne pas s'arrêter au même point avec les deux groupes ? (JC, 1)
6. À propos de l'Aide Individualisée, dans mon établissement nous sommes libres, certains préfèrent faire d'autres exercices tandis que d'autres préfèrent revoir les synthèses. Les élèves n'étant pas forcément très enclins à l'étude le vendredi soir en dernière heure, la participation est moindre que le reste du temps. Quels conseils donneriez-vous ? (EM, 3)

• Cette recherche est confiée au trinôme formé de FD, ER, CS.

1.2. Les autorisations d'absence

Développé oralement

2. Observation & analyse

Nous poursuivons ici le travail d'observation et d'analyse de la séance en classe de 4^{e} à propos de l'étude des médianes d'un triangle. On rappelle ci-dessous le travail qu'il y avait à faire pour cette séance.

1. analyser la manière dont sont réalisés chacun des quatre « premiers » moments de l'étude présents dans la partie du compte rendu examiné ;
2. examiner la proposition faite par l'un des élèves professeurs de réaliser l'expérimentation « en cherchant C par dichotomie ».

Travail collectif dirigé

On trouvera ci-dessous les traces écrites du travail collectif effectué, qui a porté pour l'essentiel sur l'identification des moments de l'étude dans le compte rendu d'observation, complétées de quelques-uns des commentaires qui ont été effectués oralement. Les passages du compte rendu sont signifiés par un arrière-plan grisé.

Moment de la première rencontre

On reprend la feuille d'activité de la veille pour y envisager l'activité 7 (voir ci-après). Il est 14 h 08. P : « Vous regardez l'activité 7, qui s'appelle *Position du centre de gravité sur chacune des médianes*. » P fait la figure au tableau. Un élève lit l'énoncé du problème. P reprend, explicite, commente : il y a une seule solution, « on va tous obtenir le même point C ».

On peut voir la dernière assertion « il y a une seule solution, « on va tous obtenir le même point C ». » comme relevant du moment exploratoire au sens où le professeur, par là, prive les élèves de l'exploration de ce phénomène.

Autre épisode de première rencontre proposé :

On passe à l'étude de la position du centre de gravité de G sur les médianes. P a fait la figure au tableau, sur le quadrillage peint. Les élèves sont invités à travailler sur la feuille distribuée, qui porte deux exemples. P leur montre comment placer le milieu à l'aide du quadrillage. Il est 14 h 24.

Ce serait une rencontre avec : utiliser un quadrillage (non, ça n'est pas un enjeu de l'étude) ; placer le centre de gravité ou plutôt déterminer la position du centre de gravité. Ce type de tâches ne fait pas partie de l'organisation mathématique, ce n'est pas un enjeu de l'étude : il sera accompli une fois pour faire émerger le résultat technologique ; il fait donc partie de l'organisation de l'étude.

Autre proposition : rencontre avec le type de tâches « Déterminer la position d'un point sur un segment » ; ce n'est pas un enjeu principal de l'étude ; cela a sans doute déjà été étudié parce que ça ne pose visiblement pas de problème dans la séance (les élèves y arrivent quasiment en autonomie) et ça ne figure pas dans la synthèse.

Autre proposition encore : le travail de l'exercice à la fin de la séance, qui serait une première rencontre avec « Déterminer le centre de gravité d'un triangle faisant partie d'une configuration ». Certains contestent, en l'analysant plutôt comme un moment de travail de l'organisation mathématique. La question est laissée ouverte.

Moment exploratoire

La première proposition effectuée concerne le passage du compte rendu suivant :

On reprend la feuille d'activité de la veille pour y envisager l'activité 7 (…) P : « Le deuxième triangle, je ne l'ai pas fait. Vous avez vérifié que c'est la même chose ? » La classe : « Oui !!! »

On arrive assez vite à analyser la première partie comme relevant du moment de la première rencontre (voir *supra*) avec le type de tâches « construire le point C ». [Une formulation meilleure du type de tâche serait « construire le sommet C d'un triangle dont on connaît un côté et le centre de gravité.]

Une justification en est que, dans le moment exploratoire, on fait émerger la technique et que dans le premier paragraphe, on n'en est pas encore là.

Une autre justification est que, dans le moment exploratoire, il doit y avoir davantage de place pour les élèves. Cela dépend en fait de la technique de réalisation de ce moment. On y reviendra lors de la prochaine séance.

Un petit travail aboutit à arrêter cet épisode du moment exploratoire à l'issue du paragraphe suivant.

P : « Il faudrait qu'on sache où se trouve le centre de gravité sur une médiane… » Une élève : « Au milieu ! » P fait observer qu'alors on aurait C facilement. On laisse de côté le problème, indique-t-elle, on y reviendra.

Un nouvel épisode du moment exploratoire aura lieu à l'issue du moment technologique (voir infra), lorsque l'on produit la technique.

P : « Maintenant, je pense qu'on va pouvoir arriver à trouver le point C. » L'élève qui n'aimait pas le quadrillage réagit : « C'est une conjecture ! » Une autre élève : « On n'avait pas besoin de tracer les deux autres médianes ! » P approuve : « Exactement. On avait simplement à tracer la médiane qui passe par C. »

P vérifie que les élèves ont bien mis en place le point C. Il est 14 h 35. Une élève se fait rappeler à l'ordre : elle ne sait pas ce qu'il faut faire, comprend, le fait ; P : « Très bien ! » Puis : « Qui est-ce qui veut bien finir la construction et marquer le point C [au tableau] ? » Elle sollicite une élève qui va au tableau, s'affaire tout en décrivant ce qu'elle fait. P la félicite : « Très bien, elle a utilisé la propriété qu'on vient de voir. » P conclut : « On a réussi à reconstituer le triangle ABC en ayant juste le point G et le côté [AB]. » L'élève retourne à sa place.

Moment technologico-théorique

Début : On passe à l'étude de la position du centre de gravité de G sur les médianes. P a fait la figure au tableau, sur le quadrillage peint. Les élèves sont invités à travailler sur la feuille distribuée, qui porte deux exemples. P leur montre comment placer le milieu à l'aide du quadrillage. Il est 14 h 24.

Proposition d'arrêt : L'élève enrhumé se mouche à nouveau bruyamment. Rires. P : « Vous rangez cette feuille dans le côté *Activités* du classeur. On passe au cours. » Il est 14 h 40.

Un examen plus approfondi permet de mettre en évidence l'épisode du moment exploratoire, et conduit à arrêter la réalisation du moment technologico-théorique à l'issue du paragraphe suivant :

P demande quelle conjecture on peut formuler. Un élève se lance : « le centre de gravité est situé au même endroit… » P le reprend, le relance : « aux deux tiers », etc. Elle écrit :

> Conjecture :
> Le centre de gravité est situé aux deux tiers de chaque médiane à partir du sommet.

P : « Maintenant, je pense qu'on va pouvoir arriver à trouver le point C. »

On a noté que la formulation de la conjecture réalise également un épisode du moment de l'institutionnalisation.

Moment d'institutionnalisation

Outre ce que l'on a noté précédemment, la partie « synthèse » relève du moment de l'institutionnalisation.

Rédiger les techniques de réalisation des moments identifiés ci-dessus pour le 3 octobre 2009 ; on produira un écrit par trinôme que l'on enverra par mel à m.artaud@aix-mrs.iufm.fr avant le 4 octobre.

Pour compléter le travail effectué, on examinera un passage de la vidéo de la séance, correspondant au passage suivant du compte rendu.

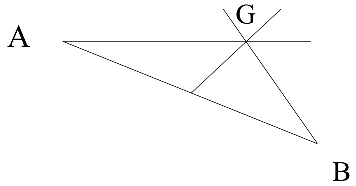
On reprend la feuille d'activité de la veille pour y envisager l'activité 7 (voir ci-après). Il est 14 h 08. P : « Vous regardez l'activité 7, qui s'appelle *Position du centre de gravité sur chacune des médianes*. » P fait la figure au tableau. Un élève lit l'énoncé du problème. P reprend, explicite, commente : il y a une seule solution, « on va tous obtenir le même point C ».

Une élève répond à la question posée – construire le point C connaissant A, B et G – en donnant le début d'un procédé de construction. P fait rappeler par un élève que G est intérieur au triangle ABC.

Un dialogue vivant s'instaure. On prend le milieu de [AB]. Peut-on construire les médianes ? Non ! P : « Je vous laisse un peu réfléchir… »

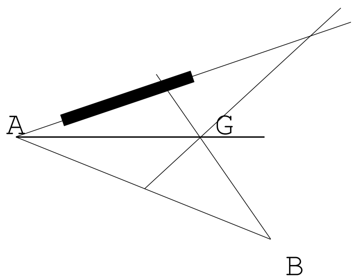
L'élève qui avait lu l'énoncé intervient spontanément : « On n'a pas toutes les données !… » Il est 14 h 12. Murmures de travail.

P : « Qui a une idée ? » Un élève, qu'elle envoie au tableau, dit qu'on peut construire les trois médianes – contrairement à ce qu'affirment certains, souligne P.



L'élève au tableau met en place le milieu de [AB]. P conteste sa manière de faire ; il recommence, cette fois correctement, mais il est gêné par le bas du tableau, trop proche de son dessin…

Il est 14 h 18. « Voilà ! Ça devrait être bon ! » P souligne qu'on a ainsi la 3e médiane, bien qu'on n'ait pas le point C. « Comment construire le point C ? » Plusieurs doigts se lèvent. C est sur la médiane, mais où ? L'idée s'exprime de faire glisser la règle pour obtenir approximativement la situation voulue…



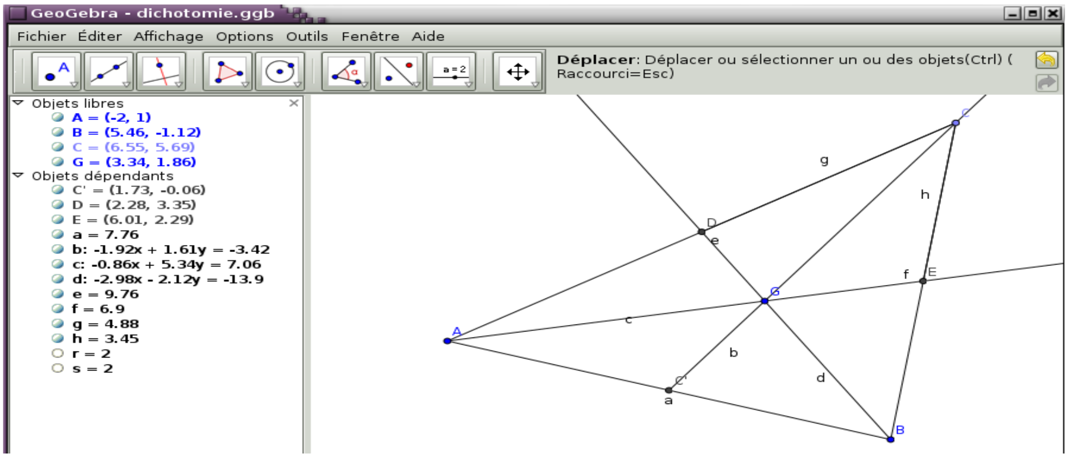
P : « Il faudrait qu'on sache où se trouve le centre de gravité sur une médiane… » Une élève : « Au milieu ! » P fait observer qu'alors on aurait C facilement. On laisse de côté le problème, indique-t-elle, on y reviendra.

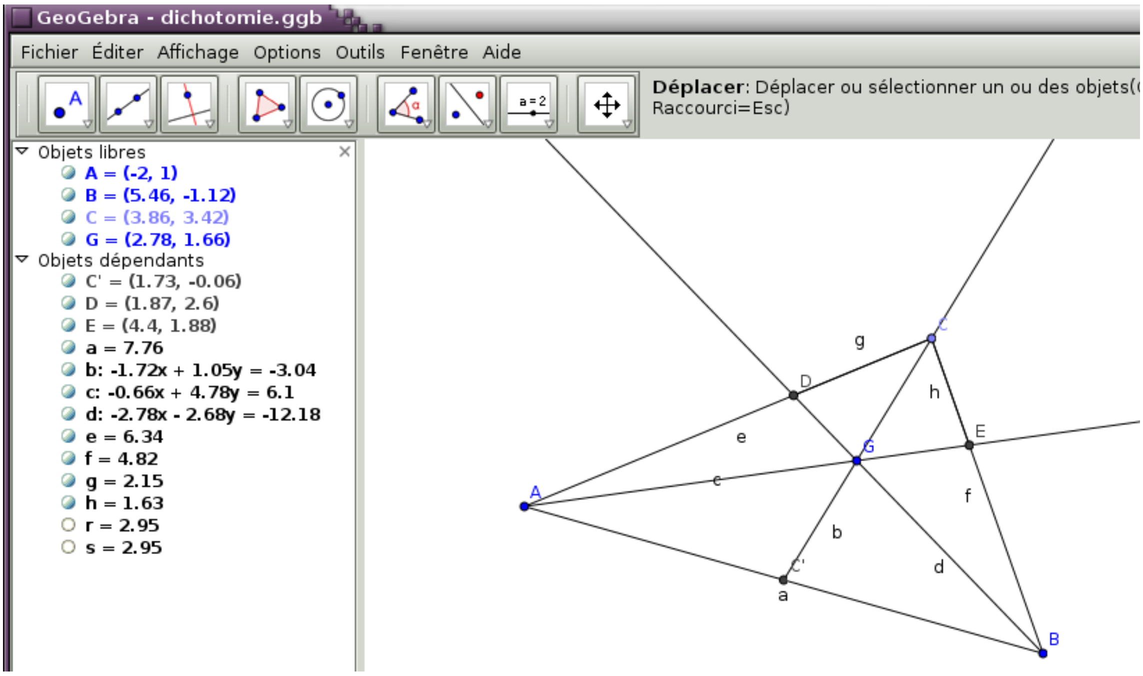
Puis un passage de la vidéo d'une séance en classe de 5e à propos de l'étude du parallélogramme (voir notes de la séance 2).

On a mis en évidence que l'on avait là deux techniques de réalisation d'un moment exploratoire, qui diffèrent pour l'essentiel en raison de la place laissée aux élèves. Nous reviendrons sur ce point lors d'une prochaine séance.

Nous avons enfin examiné la proposition de déterminer le point C par « essais-erreurs ». On a conclu qu'elle aurait permis de suivre la proposition de l'élève au tableau, mais qu'elle aurait été mise en place de manière pertinente avec un logiciel de géométrie dynamique. La figure effectuée sur Geogebra permet en outre de mettre en évidence que si on construit C de façon à ce que la droite (BG) coupe [AC] en son milieu, c'est aussi le cas pour (AG) et [BC] ; et même que si l'on a

CA/CD = *r*, alors CB/CE = *r* (en notant D le point d'intersection de [AC] et [BG)et E le point d'intersection de [BC] et [AG)).





C'est tout cela que la classe « rate » lorsque le professeur décide d'abandonner cette piste, en argumentant sur le fait que si l'on trouve C tel que A' soit le milieu de [CB], on n'est pas sûr qu'il en ira de même pour B' et [AC]. On notera que cette technique n'est pas la construction cherchée, que l'on veut à la règle et au compas, mais elle permet de produire une « figure solution » que l'on peut analyser pour produire la construction cherchée.

Pour la fois prochaine, les participants au séminaire chercheront une justification de la propriété de « conservation des rapports » mise en évidence dans l'expérimentation graphique précédente.

3. Forum des questions

3.1. Organisation de l'étude

Un vieux monde qui ne veut pas mourir...

1. Vous nous proposez de faire activité – synthèse – exercices. Mais si je fais une activité pour chaque résultat important, je ne finirai jamais le programme... Est-ce une activité avant chaque chapitre ? Ou une activité avant chaque résultat important ? (2de, 3)

2. J'ai une classe spéciale dont l'objectif est l'acquisition du socle commun uniquement. Dois-je quand même viser à les initier à la recherche etc. ? (deux 5^{e}, 3)

3. Y a-t-il dans le programme de 6^{e} l'existence d'AER, étant donné la « pauvreté » des nouvelles notions ? (6^{e}, 3)

4. Dans la programmation commune, nous avons convenu de faire des rappels en début de chapitre. Quels sont les dispositifs afin de rendre ceci plus vivant ? Le but étant de rappeler et non de revoir en détail, je ne pense pas faire des activités. Ma question s'applique en particulier pour les rappels de géométrie particulièrement lourds. (4^{e}, 3)

5. Comment présenter le cours d'introduction à la géométrie (sur les droites, demi-droites et segments) sans donner l'impression de faire un cours magistral ? (6^{e}, 3)

1. Nous l'avons déjà dit, et nous le répétons donc ici une fois encore, ce n'est pas la formation, ou encore les formateurs, qui proposent, voire imposent, la structure ternaire : elle est contenue dans les programmes qui ont force de loi.

Agir en fonctionnaire de l'État et de façon éthique et responsable

(...)

Il exerce sa liberté et sa responsabilité pédagogique dans le cadre des obligations réglementaires et des textes officiels ;

(...)

Concevoir et mettre en œuvre son enseignement

(...)

Le professeur connaît :

(...)

– les programmes d'enseignement et documents d'accompagnement qui le concernent à tous les niveaux d'enseignement des premier et second degrés ;

La mise en œuvre de ce dispositif pour enseigner les mathématiques ***ne dépend pas du bon vouloir de tel professeur***, ou de tel ou tel formateur, encore moins du plaisir que l'on prendrait à le faire, mais ***elle s'impose à la profession*** par le biais des programmes, que chacun est tenu de respecter.

On ajoutera que la structure ternaire figure dans les programmes depuis bien longtemps. Déjà, dans le programme de sixième publié ***en 1985*** pouvait-on lire, sous le titre B) Méthodes, des instructions générales :

2. On privilégiera donc l'activité de chaque élève. Mais on n'oubliera pas la nécessité d'une pédagogie n'assujettissant pas tous les élèves aux mêmes rythmes sans que soit délaissé l'objectif d'acquisitions communes.

Dès lors, les professeurs vont avoir à choisir des situations créant un problème, dont la solution fera intervenir des « outils », c'est-à-dire des techniques ou des notions déjà acquises, afin d'aboutir à la

découverte ou à l'assimilation de notions nouvelles. Lorsque celles-ci auront été bien maîtrisées, elles fourniront à leur tour des « outils » qui permettront un cheminement vers une connaissance meilleure ou différente.
Les activités choisies doivent développer la capacité à se poser des problèmes et de progresser vers leur résolution. Elles doivent aussi :
Permettre un démarrage possible pour tous les élèves, donc ne donner que des consignes très simples et n'exiger que les connaissances solidement acquises par tout le monde ;
Créer rapidement une situation assez riche pour provoquer des conjectures ;
Rendre possible la mise en jeu des outils prévus ;
Fournir aux élèves, aussi souvent que possible, des occasions de contrôle de leurs résultats, tout en favorisant un nouvel enrichissement. On y parvient, par exemple, en prévoyant divers cheminements qui permettent de fructueuses comparaisons.
Le professeur doit donc procéder avec une attention particulière au choix pertinent de situations à étudier. Il doit aussi veiller à bien organiser les phases du déroulement de l'activité. Une condition première est de prévoir une durée suffisante. Pour le développement complet de l'activité formatrice, de la phase initiale à la mise en place des connaissances désormais considérées comme acquises, l'échelle des temps est en heures, voire en semaines, comme dans l'étude de la proportionnalité.
C'est à ce prix que l'on peut :
Habituer à l'art d'expérimenter et à celui de conjecturer, donc d'entraîner à chercher ;
Ménager des séquences déductives motivantes, de plus en plus prolongées, nombreuses et de difficultés progressives au long des quatre années du collège ;
Souligner le sens, l'intérêt, la portée des connaissances mathématiques en les enseignant en interaction avec les autres disciplines et avec la vie quotidienne (pourcentages, échelles, représentations graphiques...) et en utilisant les moyens modernes de communication (informatique, banques de données, audiovisuel...).

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que le programme actuel ne dit pas autre chose. Rien n'autorise le professeur à s'exonérer de cette « ardente obligation », ni le fait que l'on soit dans une classe de 6^{e}, ni le fait que la classe serait « spéciale ». On ajoutera que la « pauvreté des notions mathématiques » évoquée par la 3^{e} question tient d'abord à la « pauvreté » des connaissances des débutants en la matière, qui constitue l'une des raisons pour lesquelles le bulletin académique demande d'éviter de donner une classe de sixième... Il est certes difficile d'apercevoir la ligne de démarcation entre les mathématiques étudiées à l'école primaire et celles étudiées en 6^{e}, mais il faut s'y efforcer.

On ajoutera que si la structure ternaire est imposée par les programmes, ceux-ci développent assez peu des techniques de mise en œuvre de cette structure : c'est cela que la formation s'efforce de construire.

2. Nous avons également dit plusieurs fois que le fait que chaque notion devait émerger d'une activité ***ne signifiait pas*** qu'il y avait une ***bijection entre le nombre de « notions » ou de « résultats » et le nombre d'activités*** : cette bijection est, en effet, non seulement gourmande en temps, mais surtout peu pertinente didactiquement, la synthèse d'éléments qui ont émergés séparément s'avérant peu aisée à mettre en place. Ainsi en seconde, les problèmes d'optimisation de grandeurs permettent-il de faire émerger une grande partie de ce qu'il s'agit d'étudier sur les fonctions. On a donc avantage à engager la classe dans un PER (parcours d'étude et de recherche) sur l'optimisation des grandeurs (aires, volumes, coûts, etc), en leur faisant rencontrer et étudier plusieurs situations de ce type.

3. Ce qui fait perdre du temps, en revanche, et qui est très clairement proscrit par les programmes, ce sont les « rappels de début de chapitre » évoqués par la quatrième question : ce sont en effet des « révisions systématiques », qui sont clairement à proscrire d'après le programme, en premier lieu parce qu'elles sont assez largement inefficaces. Cela ne veut pas dire que l'on n'ait pas à reprendre

l’étude de certains éléments des années précédentes, mais seulement quand le besoin s’en fait sentir, ce que l’on détectera par l’intermédiaire d’un test d’entrée dans l’étude du thème ; on le fera rapidement, du temps didactique ayant déjà été dépensé à ce propos dans les classes antérieures, et en fonction, soit dans le cadre d’une situation (qui peut être mathématique d’ailleurs).

4. La cinquième question témoigne, encore, de la résistance de la structure binaire : il ne s’agit pas de présenter un cours d’introduction à la géométrie, comme c’était encore le cas au XIX[e] siècle par exemple, comme en témoigne l’extrait suivant :

à venir...

Il s’agirait plutôt de faire émerger, dans une AER, la nécessité de désigner certains éléments géométriques par des noms différents. La considération du programme de sixième à propos de la géométrie met en évidence que celui-ci ne fait pas apparaître que l’on ait à enseigner les notions de droites, de demi-droites ou de segments, mais que « les activités qui permettent le développement des capacités à décortiquer et à construire des figures et des solides simples, à partir de la reconnaissance des propriétés élémentaires, occupent une place centrale ». Il fait également apparaître que :

> À l’école élémentaire, les élèves ont acquis une première expérience des figures et des solides les plus usuels, en passant d’une reconnaissance perceptive (reconnaissance des formes) à une connaissance plus analytique prenant appui sur quelques propriétés (alignement, perpendicularité, parallélisme, égalité de longueurs, milieu, axes de symétrie), vérifiées à l’aide d’instruments. Ils ont été entraînés au maniement de ces instruments (équerre, règle, compas, gabarit) sur des supports variés, pour construire des figures, en particulier pour le tracé de perpendiculaires et de parallèles à l’aide de la règle et de l’équerre.
>
> Les travaux conduits en sixième prennent en compte les acquis antérieurs, évalués avec précision et obéissent à de nouveaux objectifs. Ils doivent viser d’une part à stabiliser les connaissances des élèves et d’autre part à les structurer, et peu à peu à les hiérarchiser. L’objectif d’initier à la déduction est aussi pris en compte.

Il faut donc examiner ce qui a été fait à l’école primaire. Voici ce que contient le programme du cycle 3 (CE2 au CM2) publié en 2008 à propos de la géométrie :

> L’objectif principal de l’enseignement de la géométrie du CE2 au CM2 est de permettre aux élèves de passer progressivement d’une reconnaissance perceptive des objets à une étude fondée sur le recours aux instruments de tracé et de mesure.
> Les relations et propriétés géométriques : alignement, perpendicularité, parallélisme, égalité de longueurs, symétrie axiale, milieu d’un segment.
> L’utilisation d’instruments et de techniques : règle, équerre, compas, calque, papier quadrillé, papier pointé, pliage.
> Les figures planes : le carré, le rectangle, le losange, le parallélogramme, le triangle et ses cas particuliers, le cercle :
> - description, reproduction, construction ;
> - vocabulaire spécifique relatif à ces figures : côté, sommet, angle, diagonale, axe de symétrie, centre, rayon, diamètre ;
> - agrandissement et réduction de figures planes, en lien avec la proportionnalité.
>
> Les solides usuels : cube, pavé droit, cylindre, prismes droits, pyramide.
> - reconnaissance de ces solides et étude de quelques patrons ;
> - vocabulaire spécifique relatif à ces solides : sommet, arête, face.
>
> Les problèmes de reproduction ou de construction de configurations géométriques diverses mobilisent la connaissance des figures usuelles. Ils sont l’occasion d’utiliser à bon escient le vocabulaire spécifique et

les démarches de mesurage et de tracé.

On peut penser , sans en être tout à fait certains compte tenu de la rédaction des programmes, que les élèves ont déjà rencontré segment et droite, ainsi qu'une foule d'autres objets qui sont explicitement mentionnés par le programme. Là encore, un test d'entrée s'impose ; on demandera par exemple de décrire une configuration, description qui supposera de mobiliser « le vocabulaire spécifique », celui qui s'avèrera nécessaire à l'étude du premier thème de géométrie. Pour mettre en fonction ce type de notions, il s'avère pertinent de recourir à des « jeux de communication » du type suivant : on donne à chaque moitié de classe une configuration dont on leur demande produire une description ; on échange alors les descriptions, à charge pour les élèves de produire la figure (que l'on peut mettre en scène dans une situation du type « Pierre est malade. Farida l'appelle pour lui communiquer le travail à faire en mathématiques. Pour cela elle doit lui décrire la figure suivante. Quelle description peut-elle proposer ? (...) Voici la description que Pierre a noté ; quelle figure a-t-il construite ?). La confrontation des figures produites permettra de mettre à l'épreuve à la fois les descriptions produites et la compréhension par les élèves des descriptions, même si ce dernier volet peut être travaillé de façon plus classique en donnant la description d'une configuration qu'il s'agit de construire.

AER

1. Comment trouver de « bonnes » AER ? (sites internet, livres, documents, ...) (deux 4^{e}, 3)
2. Quelles sont les clefs d'une bonne AER ?Comment faire conjecturer une propriété en laissant une autonomie de raisonnement aux élèves ? (4^{e} et 3^{e}, 3)
3. En classe de 5^{e}, une leçon comme les angles comporte beaucoup de vocabulaire (complémentaires, adjacents...). Comment faire une activité sur ce type de leçon ? (5^{e} + une demie 5^{e}, 3)

1. Étant donné une organisation mathématique représentée par un élément technologique θ (notion, résultat, etc.), concevoir une AER qui fasse apparaître cet élément mathématique comme l'outil d'action ou de compréhension clé de la situation problématique affrontée n'est pas une affaire « individuelle » : ***c'est une affaire de la profession***, au traitement de laquelle chaque professionnel doit apporter son concours.

Heureux donc si, pour ***tout thème*** mathématique qu'elle a à enseigner, notre profession dispose d'***au moins un*** ensemble d'AER relatives à ce thème et de bonne efficacité didactique ! Bien entendu, à partir de tels « produits génériques », chaque professeur peut – et, souvent, doit – fabriquer ses propres « préparations ». Mais on ne connaît pas en général trente-six situations efficaces. Celles-ci sont donc un ***trésor*** de la profession, trésor qui s'enrichit, est mis à jour, etc.
Un des lieux privilégiés où chercher de telles situations est l'ensemble des fichiers des ***archives du Séminaire***. Supposons ainsi que l'on ait à mettre en place une organisation mathématique à propos du théorème de Thalès en classe de 4^{e}. Une recherche de l'expression « théorème de Thalès » dans le fichier du séminaire 2005-2006 donne par exemple le passage suivant que l'on reproduit sans autres commentaires.

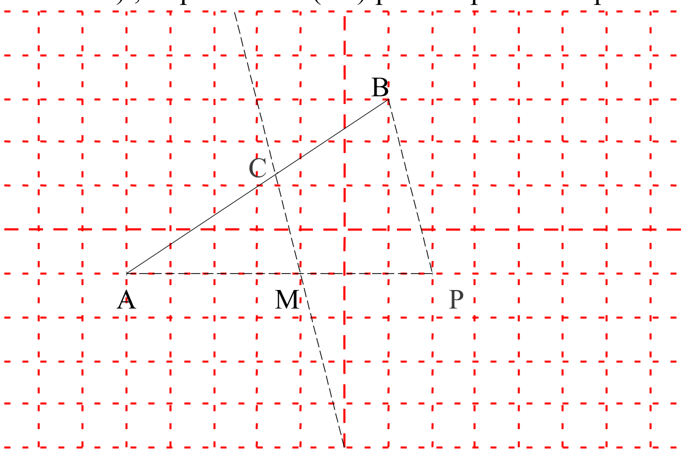
3) S'agissant de la propriété réciproque comme de toute autre, trois étapes *classiques* doivent être envisagées *en principe* au sein d'une suite d'AER relative à une propriété donnée :
Étape 1. La propriété doit être ***motivée*** par son rôle technologique vis-à-vis d'au moins un type de tâches *T*.

Étape 2. La ***vérité*** de cette propriété de l'espace doit être ***étudiée expérimentalement***.
Étape 3. La ***déductibilité*** de la propriété dans la théorie géométrique disponible (TGD) – qui devient par là un théorème de cette théorie – doit être enfin établie.

4) La *motivation* de la propriété de Thalès peut ainsi être trouvée dans l'étude du type de tâches mis en avant par le programme :

T. Étant donné deux points A et B, construire les points C de la droite (AB) sachant que le rapport $\frac{CA}{CB}$ a une valeur donnée sous forme de quotient d'entiers.

La *technique* τ à mettre en place préférentiellement consiste, si le rapport est $\frac{p}{q}$ (où p, q sont des entiers strictement positifs premiers entre eux), à prendre une demi-droite auxiliaire sur laquelle on porte $p + q$ fois une longueur u (sur la figure ci-après on a ainsi AP = $(p + q)u$ = $(4 + 3)u$) et où on marque le point M tel que AM = pu (sur la figure ci-dessous, AM = $4u$) ; la parallèle à (BP) passant par M coupe alors [AB] en un point C tel que $\frac{CA}{CB} = \frac{p}{q}$.



5) C'est l'étude de la *vérité* de la propriété de Thalès, fondamentale pour justifier la technique τ, qui peut mobiliser préférentiellement d'abord un simple *quadrillage* (sur lequel on mesurera CA et CB), ensuite un *logiciel de géométrie dynamique*, auquel on demandera de mesurer les longueurs CA et CB et de donner le rapport , comme on le voit ci-après (où a = CA, b = CB, $r = \frac{a}{b}$).

6) Rappelons ici que le logiciel de géométrie peut aussi être utilisé dans la recherche d'une démonstration : il permet en particulier de « tester » rapidement une conjecture visant à ouvrir une « voie déductive ».

Pour la classe de 6^e, pour laquelle les archives sont peu prolixes, on s'inspirera des AER présentes pour les classes de 5^e et de 4^e. Pour le domaine du calcul notamment, les problèmes de mesure ou de comparaison de grandeurs permettent, comme pour la cinquième, d'engendrer l'essentiel des organisations mathématiques au programme.

2. Une des clés est ainsi un problème qui représente une raison d'être de la notion, et dont on puisse assurer la dévolution aux élèves de façon à leur faire rencontrer au moins un type de tâches de l'organisation mathématique enjeu de l'étude. Une autre clé tient, bien entendu, dans la préparation de la direction de l'étude du problème envisagé : nous verrons dans la rubrique « observation & analyse » qu'elle réside dans l'élaboration d'une arborescence de questions cruciales ; c'est cela qui permet de ménager un *topos* suffisant pour les élèves, nous y reviendrons.

Non étudié en séance

Moment technologico-théorique et/ou synthèse

Doit-on faire des démonstrations dans le cours de 2^de^ ? Toujours ? Quelquefois ? Doit-on ajuster en fonction du niveau de la classe ? (2^de^, 3)

Quelle est la différence entre la synthèse et le cours ? (6^e^, 3)

Quelle est la différence entre le cours et la synthèse d'une activité ? (2^de^ et 1^re^ ES, 3)

1. Voici ce que contient le programme de seconde à propos de démonstration :

> **Objectif général**
> L'objectif de ce programme est de former les élèves à la démarche scientifique sous toutes ses formes pour les rendre capables de :
> • modéliser et s'engager dans une activité de recherche ;
> • conduire un raisonnement, une démonstration ;
> (...)
> **Utilisation d'outils logiciels**
> L'utilisation de logiciels (calculatrice ou ordinateur), d'outils de visualisation et de représentation, de calcul (numérique ou formel), de simulation, de programmation développe la possibilité d'expérimenter, ouvre largement la dialectique entre l'observation et la démonstration et change profondément la nature de l'enseignement.
> (...)
> Les élèves doivent être capable de représenter en perspective parallèle (dite aussi cavalière) une configuration simple et d'effectuer des constructions sur une telle figure. Ils doivent aussi être capables de mobiliser pour des démonstrations les théorèmes de géométrie plane.

On ajoutera un extrait du document ressource sur le raisonnement :

> La trace écrite est aussi celle que l'élève produit lorsqu'il rédige un travail de recherche : réorganiser ses idées, essayer de les mettre en forme en choisissant des notations qui lui permettent d'être précis. Ce type d'écrit ne peut en aucun cas être soumis à un protocole rigide et doit être varié (plan de la solution, rédaction d'une partie d'un travail cherché en groupes, rédaction d'une démonstration cherchée collectivement) afin de permettre à tous de s'engager dans la restitution.

Le travail démonstratif a ainsi sa place en seconde, comme dans les autres classes de l'enseignement secondaire d'ailleurs. On peut ne pas faire certaines démonstrations, mais le résultat doit alors être justifié expérimentalement et explicitement déclaré admis. C'est ainsi que, dans le programme du collège, on trouve par exemple que :

> Cette initiation à la démonstration doit en particulier permettre aux élèves de distinguer une propriété conjecturée et vérifiée sur des exemples d'une propriété démontrée. En particulier, l'enseignant doit préciser explicitement qu'un résultat qui n'est pas démontré est admis.

On l'a dit, la justification déductive d'un résultat fait partie de la technologie d'une OM : elle doit donc émerger dans le cadre du moment technologico-théorique, soit dans le dispositif d'AER, et être mise en forme dans la synthèse, ce que le programme de collège formule ainsi :

> À cet égard, deux étapes doivent être clairement distinguées : la première, et la plus importante, est la

recherche et la production d'une preuve ; la seconde, consistant à mettre en forme la preuve, ne doit pas donner lieu à un formalisme prématuré. En effet des préoccupations et des exigences trop importantes de rédaction risquent d'occulter le rôle essentiel du raisonnement dans la recherche et la production d'une preuve.

2. Le point principal qui distingue un cours d'une synthèse est le fait que, dans le cadre d'une structure binaire, le cours présente la matière à étudier, le professeur en étant l'acteur essentiel, alors que dans le cadre d'une structure ternaire, la synthèse met en forme la matière mathématique qui a émergée dans les AER, le topos des élèves dans ce dispositif de synthèse ne devant pas être symbolique.

Socle commun...

Avec une classe de 4e en grande difficulté, peut-on se limiter au socle commun ? (4e, 3)

Comme nous l'avons souligné plus haut, l'étude du programme s'impose à tous : que la classe soit en difficulté ou pas, c'est la matière mathématique qui figure au programme qu'il s'agit de lui faire étudier. Le socle commun reste, très clairement, ce que nul ne doit ignorer à l'issue de sa scolarité au collège. Ainsi, trouve-t-on sur le site Eduscol, la présentation suivante :

Le socle commun de connaissances et de compétences est une disposition majeure de la loi d'orientation et de programme pour l'avenir de l'École du 23 avril 2005. Il désigne un ensemble de connaissances et de compétences que les élèves doivent maîtriser à l'issue de la scolarité obligatoire pour poursuivre leur formation, construire leur avenir professionnel et réussir leur vie en société.

(...)

Le décret du 11 juillet 2006 pris en application de la loi pour l'avenir de l'École organise le contenu du socle commun autour de sept grandes compétences qui définissent ce que nul n'est censé ignorer en fin de scolarité obligatoire : un ensemble de valeurs, de savoirs, de langages et de pratiques.

On ajoutera que, pour que le contenu du socle soit acquis par les élèves, il est indispensable de leur faire étudier « plus que ce minimum ».

Prochaine séance : Mardi 6 octobre 2009

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 5 : mardi 6 octobre 2009

Programme de la séance. 0. Questions de la semaine // 1. Observation & analyse // 2. Forum des questions // 3. Recherches dans les archives // 4. Rencontre avec les IA-IPR

0. Questions de la semaine

Beaucoup de questions portent sur certains dispositifs d'étude et d'aide à l'étude comme les DS et le cahier de textes :

Dans mon lycée, on dispose de deux cahiers de texte, un *online* et un papier. Dois-je remplir les deux ? Je pensais utiliser le *online* pour archiver les feuilles photocopiées que je donne et qui sont nombreuses en raison du livre qui n'est pas adapté au nouveau programme. Est-ce une bonne idée ? (5)

Combien de temps faut-il passer sur une correction ? Une heure complète ou donner une correction papier ? (5)

Comment estimer le temps de réalisation d'un DS par les élèves ? (5)

D'autres, nombreuses aussi, sur la gestion de la classe, du point de vue du collectif ou de certains individus :

<u>Question concernant les élèves en échec scolaire :</u> Certains élèves dans ma classe veulent s'orienter en CFA maçonnerie, vente... Est-ce que dès à présent je peux leur donner des exercices adaptés à leur niveau lors des heures de retenue ? Je dois les gérer jusqu'en janvier. Ensuite ils partiront en projet PRE (quelque chose comme ça). (4)

Comment canaliser l'attention des élèves dans une séance de TP informatique ? (4)

Quelques questions portent sur l'utilisation des TICE :

Savoir utiliser les différents outils de la calculatrice doit-il être évalué ? Certains élèves ont des calculatrices graphiques qui, par exemple, ne peuvent pas déterminer l'intersection de deux courbes alors que c'est l'un des principaux intérêts de la calculatrice graphique. Puis-je tout de même évaluer cette compétence (trouver l'intersection de deux courbes à la calculatrice) ? (5)

D'autres, rares encore, sur les techniques de réalisation des moments de l'étude :

Pendant le moment exploratoire d'une AER, on est tenté de prélever les propositions des élèves actifs. Comment travailler avec les élèves passifs qui attendent que les autres donnent les réponses, ou avec ceux qui en profitent pour s'amuser ? (5)

1. Observation & analyse

Nous poursuivons ici le travail d'observation et d'analyse de la séance en classe de 4e à propos de l'étude des médianes d'un triangle. Nous avions identifié les moments réalisés dans la partie du compte rendu correspondant à la réalisation de l'activité et à la synthèse. Il s'agissait pour cette séance de ***Rédiger les techniques de réalisation des moments identifiés ci-dessus pour le 3 octobre 2009 ; on produira un écrit par trinôme que l'on enverra par mel à m.artaud@aix-mrs.iufm.fr avant le 4 octobre.***

18 travaux ont été rendus ; 7 élèves professeurs se sont exonérés du travail à effectuer, certains parce qu'ils pensaient n'être pas au point : on insiste sur le fait que les travaux rendus sont là d'abord pour contribuer à la construction d'une réponse collective, et qu'ils permettent des mises au point, des précisions, sur les éléments de didactique des mathématiques introduits, qu'ils soient d'ordre technique, technologique voire théorique.

Si l'on excepte un travail atypique, qui a cherché sans grand succès à opérationnaliser des éléments théoriques non introduits dans le séminaire[2], les réponses apportées sont des tentatives plus ou moins réussies d'analyse de la technique de réalisation de chacun des moments de l'étude identifiés dans la séance observée lors de la séance de séminaire précédente.

Un point d'achoppement fréquent est l'introduction dans l'analyse d'éléments évaluatifs. C'est le cas par exemple de l'analyse suivante relative au moment exploratoire (on a mis en évidence les éléments évaluatifs en vert) :

Lors de l'activité le moment exploratoire est imposé tout le long par P et le débat des plus réduit.
Le passage d'un élève au tableau permet de montrer à tous que l'élève peut construire la troisième médiane sans véritable difficulté, vient ensuite le moment de réflexion sur la position du point C.
Lorsque dans la séance on observe « L'idée s'exprime de faire glisser la règle pour obtenir approximativement la situation voulue » P n'étudie que peu cette technique soulevée par un élève, ce qui empêche le moment exploratoire d'aboutir sur ce type de technique.

Dans le moment suivant « Une élève : « Au milieu ! ». P fait observer qu'alors on aurait facilement C. On laisse de côté le problème, indique-t-elle, on y reviendra » P coupe court au moment exploratoire amenant à montrer que le milieu sur la médiane pour le centre de gravité n'est pas une position adéquate. Le débat est des plus réduit.

On notera que le même auteur a produit une analyse non évaluative à propos de la technique de réalisation du moment de la première rencontre.

Au delà de la question de l'évaluation mélangée à l'analyse, on remarque un problème relatif à la manipulation de la notion de moment : un ***moment*** est une entité fonctionnelle, qui se réalise généralement en ***plusieurs épisodes*** ; s'il y a plusieurs moments exploratoires, c'est qu'on a plusieurs organisations mathématiques. D'autres élèves professeurs ont rencontrés ce problème, qu'ils ont essayé de contourner en parlant de « première phase du moment exploratoire » et de

2 Il n'est pas illégitime de trouver des ressources ailleurs, d'autant que la ressource était relative à la théorie anthropologique du didactique. Il n'est simplement pas facile, pour un débutant en la matière, et en si peu de temps, d'étudier un article de recherche et d'arriver à lui faire produire des techniques d'étude.

« deuxième phase du moment exploratoire », comme la proposition ci-dessous, qui comporte également quelques éléments évaluatifs :

Moment exploratoire : deux phases exploratoires dans la séance.
Une première juste après le moment de première rencontre où P dans un premier temps (après avoir juste fait rappeler par un élève que G est à l'intérieur du triangle ABC) encourage ses élèves à chercher librement sans les guider. Les élèves cherchent un moment puis P recueille les différentes suggestions mais n'en valide aucune susceptible de répondre au problème. Elle autorise juste un élève à présenter son essai mais invalide rapidement sa construction sans chercher à l'aider. Cette phase aboutit donc à un constat d'échec permettant à P de réorienter rapidement l'attention de ses élèves sur la nécessité de chercher la position de G sur une médiane.
La seconde phase exploratoire démarre lorsque les élèves, munis de la nouvelle propriété que P vient de leur faire découvrir, reviennent au problème pour enfin pouvoir le résoudre. Afin de réaliser ce moment P annonce d'abord son lancement tout en suggérant que cette seconde phase sera elle couronnée de succès (« Maintenant, je pense qu'on va pouvoir arriver à trouver le point C »). Ensuite il lui suffit de vérifier et d'approuver les constructions de ses élèves puis de valider la solution pour toute la classe en envoyant une élève construire le point C au tableau grâce à la « propriété qu'on vient de voir». On constate donc que la réalisation de ce moment s'appuie aussi sur un flou sémantique (entre les mots « conjecture » et « propriété ») volontairement entretenu par P qui peut expliquer par exemple le fait qu'elle passe sous silence la remarque d'une élève : « C'est une conjecture ! ».

On notera que la dernière phrase n'est pas étayée par ce qui précède. Elle est davantage liée à la réalisation du moment technologico-théorique.

Le terme de « phase » est également utilisé par certains à la place de moment : le choix du mot de moment est théoriquement fondé et constitue un ingrédient essentiel de l'analyse des organisations de l'étude en théorie anthropologique du didactique ; on l'emploiera donc.

« La notion de moment ne renvoie qu'en apparence à la structure temporelle du processus d'étude. Un moment, au sens donné à ce mot ici, est d'abord une dimension dans un espace multidimensionnel, un facteur dans un processus multifactoriel. Bien entendu, une saine gestion de l'étude exige que chacun des moments didactiques se réalise au bon moment, ou, plus exactement, aux bons moments – car un moment de l'étude se réalise généralement en plusieurs fois, sous la forme d'une multiplicité d'épisodes éclatés dans le temps. À cet égard, on notera que, même s'il est d'usage d'ordonner les différents moments didactiques (en parlant du premier moment, du deuxième moment, etc.), l'ordre indiqué est en fait largement arbitraire, parce que les moments didactiques sont d'abord une réalité organique de l'étude, avant d'en être une réalité chronologique. »[3]

On soulignera encore quelques incertitudes dans le découpage des moments de l'étude, ou encore dans leur désignation (proposition 18, par exemple ; commentée oralement).

Remarque sur la dévolution, qui est un geste de direction d'étude concourant à la réalisation des moments.

On citera enfin trois propositions, que nous commenterons oralement, et à partir desquelles nous constituerons une analyse du moment exploratoire.

3 Extrait du texte d'Yves Chevallard, *Familière et problématique, la figure du professeur*, paru dans RDM 17/2. Voir http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=24.

Moment exploratoire :
Les élèves commencent à chercher, ils essayent de tracer les médianes. P fait passer un élève au tableau pour tracer les médianes. Ensuite ils cherchent le point C. La classe indique qu'il est sur la médiane mais se demande où. Une idée émerge, faire glisser la règle pour avoir une approximation de la solution. P ne les laisse pas explorer cette idée et leur dit qu'il faudrait pouvoir savoir où se trouve le point C sur la médiane.

Moment exploratoire :

Premier [épisode du] moment exploratoire :

Proposition d'un élève. Le professeur en profite pour rappeler que le point G est intérieur au triangle. Instauration d'un dialogue qui aboutit à la question : « peut-on construire les médianes ? ». Elle leur propose d'y réfléchir.

Après le moment de réflexion, un élève va au tableau pour construire les médianes.

Émergence d'un nouveau problème : « Où se situe C sur la médiane passant par G et le milieu de [AB] ? ».

Deuxième [épisode du] moment exploratoire :

Le professeur souligne que l'on a tous les éléments pour construire le point C. Les élèves construisent le point C sur leur feuille, le professeur vérifie. Un élève finit la construction au tableau.

- Moment exploratoire :

Première partie :

Le professeur laisse un élève exprimer une première idée (un élève donne le début d'un procédé de construction du point C : réaction par rapport au problème)
Le professeur recentre la recherche : il aide un élève à formuler une contrainte (G est intérieur au triangle).
Le professeur laisse un dialogue s'instaurer puis les laisse réfléchir.
Intervention du professeur : il envoie un élève au tableau, reprend sa manière de faire.
Le professeur met en évidence la résolution d'un problème : on peut en effet construire la 3ème médiane. Ainsi, le professeur recentre la recherche des élèves pour qu'ils n'aillent pas dans la mauvaise direction.
Le professeur repose la question du problème et laisse les élèves s'exprimer.
Le professeur intervient dans le but de faire avancer l'AER : il dit lui-même qu'il faut savoir où se trouve G sur une médiane.
Le professeur répond à une élève sans lui expliquer où est l'erreur : le but est de ne pas se focaliser sur une erreur qui ne ferait pas avancer le problème.

Deuxième partie:

Le professeur revient au problème après la conjecture faite.
Le professeur choisit à qui il veut répondre : il ne répond pas à une intervention d'un élève mais à un autre oui.
Vérification que le travail a bien été fait en passant dans les rangs, ainsi le professeur s'assure que la propriété a été comprise par tous.
Intervention d'un élève pour finir la construction.
Bilan du professeur

Expliciter le fait que dans l'analyse des techniques de réalisation des moments de l'étude, il faut préciser le rôle du professeur et le rôle de l'élève de façon à pouvoir évaluer ces techniques du point de vue du *topos* dévolu à l'élève.

Technique de réalisation du moment exploratoire

Le moment exploratoire débute par la proposition d'un élève, qui donne le début d'un procédé de construction du point C. Le professeur prend l'initiative de faire formuler à un élève que le point G est intérieur au triangle. Il s'instaure un dialogue qui aboutit à la question : « peut-on construire les médianes ? ». P leur propose d'y réfléchir et les élèves commencent à chercher, essayent de tracer les médianes.

P fait passer un élève au tableau pour construire les médianes. Il intervient pour refaire effectuer la construction du milieu du segment [AB] que l'élève avait effectué en mettant en œuvre une technique correcte mais maladroitement réalisée avec le compas. On cherche ensuite le point C.

La classe indique qu'il est sur la médiane mais se demande où. On voit donc émerger un nouveau problème : « Où se situe C sur la médiane passant par G et le milieu de [AB] ? ».

Une idée émerge, faire glisser la règle pour avoir une approximation de la solution. P ne laisse pas la classe explorer cette idée et annonce qu'il faudrait pouvoir savoir où se trouve le point G sur la médiane. Un élève propose « au milieu », et P prend la décision de ne pas examiner cette proposition.

Un deuxième épisode du moment exploratoire a lieu une fois que la propriété donnant la position du centre de gravité sur les médianes a émergée. C'est P qui en prend l'initiative en affirmant que « maintenant, je pense qu'on va pouvoir arriver à trouver le point C ». Les élèves travaillent pendant que le professeur passe dans les rangs, puis un élève est convoqué au tableau pour mettre en œuvre la technique élaborée.

À partir du travail effectué lors de la séance sur le moment exploratoire, reprendre l'analyse des moments de première rencontre, technologico-théorique et d'institutionnalisation.

On proposera une synthèse sur l'observation et l'analyse lors de la prochaine séance du séminaire.

Nous reviendrons sur les deux aspects mathématiques signalés lors de la dernière séance à la prochaine séance.

2. Forum des questions

2.1. Organisations mathématiques

Fonctions, ordre et intervalles...

Question sur le nouveau programme de seconde : sur l'ancien programme, on pouvait voir une rubrique sur l'ordre dans laquelle on introduisait la notion d'intervalle ; sur le nouveau programme, cette rubrique a disparu. Je n'ai rien vu à ce sujet dans les documents d'accompagnement. Questions : cela veut-il dire que l'on n'en parle pas ? Cela veut-il dire que l'on en parle moins (i.e. pas de synthèse de cours par exemple) ? En effet, ces notions me semblent quand même indispensables au chapitre sur les fonctions (domaine de définition, monotonie,...). (MB , 2de, 2)

Une recherche sur le mot intervalle dans les notes du séminaire de l'an dernier apporte les matériaux suivants :

Ordre et intervalle en 2^{de}

<table>
<tr><td colspan="5">Pour l'étude du thème « Ordre et intervalles », mon PCP me conseille une activité du type :
Remplir le tableau</td></tr>
<tr><td>a</td><td>b</td><td>Représentation de a et b</td><td>ordre de a et b</td><td>a – b</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td></tr>
<tr><td colspan="5">Les premiers couples (a ; b) pouvant être ordonnés avec le travail fait en collège, les derniers nécessitant le calcul de $a - b$. Qu'en pensez-vous ? Je ne vois pas mieux.
b) Pour le même thème, comparer deux expressions littérales est-il enjeu de l'étude ? Même question pour :
* déterminer un encadrement de $f(x)$, en en connaissant un de x,
* donner la solution d'une inéquation sous forme d'intervalle. (7, 2^{de})</td></tr>
</table>

1. On reprendra d'abord le programme de seconde sur le domaine *Calcul et fonctions*.

Objectifs :

– Approfondir la connaissance des différents types de nombres.
– Expliciter, sous différents aspects (graphique, calcul, étude qualitative), la notion de fonction.
– Étudier quelques fonctions de références, préparant à l'analyse.
– Progresser dans la maîtrise du calcul algébrique, sans recherche de technicité, toujours dans la perspective de résolution de problèmes ou de démonstration.
– Utiliser de façon raisonnée et efficace la calculatrice pour les calculs et pour les graphiques.

La plupart de ces objectifs concernent les trois années de lycée.

Le calcul numérique et le calcul algébrique ne doivent pas constituer un chapitre de révision systématique, mais se retrouvent au travers des différents chapitres. En particulier, ils seront traités en relation étroite avec l'étude des fonctions. Comme la géométrie, les activités de calcul doivent être l'occasion de développer le raisonnement et l'activité de démonstration.

Lors de la résolution de problèmes, on dégagera, pour certains exemples étudiés, les différentes phases du traitement : mathématisation et mise en équation, résolution, contrôle de la cohérence des résultats et exploitation.

On exploitera les possibilités offertes par les tableurs, par les grapheurs et par les logiciels de géométrie.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Nature et écriture des nombres. Notations **N**, **Z**, **D**, **Q**, **R**. Représentation des nombres dans une calculatrice. Nombres premiers.	Distinguer un nombre d'une de ses valeurs approchées. Interpréter un résultat donné par une calculatrice. Organiser un calcul à la main ou à la machine. **D**écomposer un entier en produit de nombres premiers.	On admettra que l'ensemble des réels est l'ensemble des abscisses des points d'une droite. On travaillera sur les ordres de grandeur. On donnera un ou deux exemples de limites d'utilisation d'une calculatrice. On fera quelques manipulations de nombres en écriture scientifique. On se limitera à des exemples (du type 56×67) pour lesquels la connaissance des tables de multiplication suffit.
Ordre des nombres. Valeur absolue d'un nombre.	Choisir un critère adapté pour comparer des nombres. Comparer a, a^2 et a^3 lorsque a est positif. Caractériser les éléments d'un intervalle et le représenter.	La valeur absolue d'un nombre permet de parler facilement de la distance entre deux nombres.
Fonctions		On étudiera des situations issues, entre autres, de la géométrie, de la physique,

		de l'actualité ou de problèmes historiques. On réfléchira sur les expressions *être fonction de* et *dépendre de* dans le langage courant et en mathématiques. On donnera des exemples de dépendance non fonctionnelle (poids et taille, note au bac et moyenne de l'année).
	Identifier la variable et son ensemble de définition pour une fonction définie par une courbe, un tableau de données ou une formule.	Les fonctions abordées ici sont généralement des « fonctions numériques d'une variable réelle » pour lesquelles l'ensemble de définition est donné. On pourra voir quelques exemples de fonctions définies sur un ensemble fini ou même de fonctions à deux variables (aire en fonction des dimensions). L'utilisation de calculatrices ou d'ordinateurs amènera à considérer une fonction comme un dispositif capable de produire une valeur numérique quand on introduit un nombre (c'est-à-dire comme une « boîte noire »).
	Déterminer, dans chacun des cas, l'image d'un nombre.	Les notations $f(x)$, déjà introduite au collège, et f seront systématiquement utilisées. Il importe d'être progressif dans l'utilisation de ces écritures : le passage du nombre $f(x)$ à l'objet mathématique « fonction » noté f est difficile et demande un temps de maturation individuelle qui peut dépasser la classe de 2^{de}.
Étude qualitative de fonctions. Fonction croissante, fonction décroissante ; maximum, minimum d'une fonction sur un intervalle.	Décrire, avec un vocabulaire adapté ou un tableau de variations, le comportement d'une fonction définie par une courbe. Dessiner une représentation graphique compatible avec un tableau de variation.	S'il s'agit des courbes, on distinguera celles pour lesquelles, par convention, l'information sur les variations est exhaustive, de celles obtenues sur un écran graphique. La perception sur un graphique de symétries ou de périodicité pourra conduire à une formulation analytique de ces propriétés. On soulignera le fait qu'une fonction croissante conserve l'ordre, tandis qu'une fonction décroissante renverse l'ordre ; une définition formelle est ici attendue.
Premières fonctions de référence.	Établir le sens de variation et représenter graphiquement les fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto 1/x$.	D'autres fonctions telles que $x \mapsto 1/x$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \|x\|$… pourront être découvertes à l'occasion de problèmes. Les résultats les concernant pourront être admis. Les positions relatives des diverses courbes ainsi découvertes seront observées et admises.

	Connaître la représentation graphique de $x \mapsto \sin x$ et de $x \mapsto \cos x$.	La définition de $\sin x$ et $\cos x$ pour un réel x quelconque se fera en “enroulant **R**” sur le cercle trigonométrique. On fera le lien avec les sinus et cosinus de 30°, 45° et 60°.
Fonctions linéaires et fonctions affines.	Caractériser les fonctions affines par le fait que l’accroissement de la fonction est proportionnel à l’accroissement de la variable.	Exemples de non-linéarité. En particulier, on fera remarquer que les fonctions carré, inverse, … ne sont pas linéaires.
Fonctions et formules algébriques.	Reconnaître la forme d’une expression algébrique (somme, produit, carré, différence de deux carrés). Identifier l’enchaînement des fonctions conduisant de x à $f(x)$ quand f est donnée par une formule. Reconnaître différentes écritures d’une même expression et choisir la forme la plus adaptée au travail demandé (forme réduite, factorisée…). Modifier une expression, la développer, la réduire selon l’objectif poursuivi.	Les activités de calcul doivent être l’occasion de raisonner et de démontrer. On évitera une activité trop mécanique et on s’efforcera de développer, avec des expressions littérales faisant intervenir une seule lettre, deux plus rarement, des stratégies s’appuyant sur l’observation, l’anticipation et l’intelligence du calcul. On multipliera les approches et on explicitera quelques procédures simples permettant d’infirmer ou de confirmer une formule. À l’occasion de certains travaux sur tableur, on distinguera la recherche et l’observation d’une loi empirique de la démonstration d’une formule. Des activités liées aux fonctions, aux équations ou aux inéquations mettront en valeur l’information donnée par la forme d’une expression et motiveront la recherche d’une écriture adaptée.
Mise en équation ; résolution algébrique, résolution graphique d’équations et d’inéquations.	Résoudre une équation ou une inéquation se ramenant au premier degré. Utiliser un tableau de signes pour résoudre une inéquation ou déterminer le signe d’une fonction. Résoudre graphiquement des équations ou inéquations du type : $f(x) = k$; $f(x) < k$; $f(x) = g(x)$; $f(x) < g(x)$; …	Pour un même problème, on combinera les apports des modes de résolution graphique et algébrique. On précisera les avantages et les limites de ces différents modes de résolution. On pourra utiliser les graphiques des fonctions de référence et leurs positions relatives. On ne s’interdira pas de donner un ou deux exemples de problème conduisant à une équation qu’on ne sait pas résoudre algébriquement et dont on cherchera des solutions approchées.

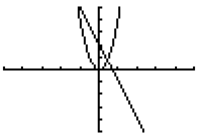
La présentation du domaine explicite assez clairement que les chapitres du secteur du calcul doivent trouver leur raison d’être dans le secteur des fonctions. À quoi peut donc servir l’ordre des nombres dans le travail sur les fonctions ? Telle est la question que l’on peut s’efforcer d’examiner.

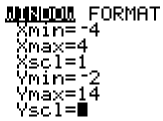
2. L’ordre apparaît bien entendu lié à la question des inéquations. Considérons ainsi le commentaire que nous avons surligné en bleu précédemment :

On pourra utiliser les graphiques des fonctions de référence et leurs positions relatives.

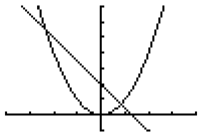
Il semble suggérer la technique suivante :

Soit à résoudre l'inéquation $2x^2+3x-4 \leqslant 0$. Elle est équivalente à l'inéquation $2x^2 \leqslant -3x+4$. La représentation graphique de ces deux fonctions de références donne d'une part une parabole tournée « vers le haut » de sommet (0, 0) et d'autre part une fonction affine décroissante dont l'ordonnée à l'origine est 4 ; on aura ainsi la parabole en dessous de la droite entre les points d'intersection, soit entre les solutions de l'équation $2x^2+3x-4=0$ comme en témoignent les représentations graphiques suivantes obtenues avec une calculatrice TI-82, d'abord sur la fenêtre classique [-10 ; 10] $\times$ [-10 ; 10], puis sur une fenêtre plus adaptée

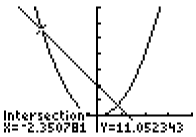


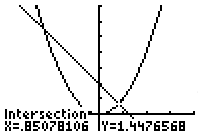


La



calculatrice fournit des valeurs approchées des points d'intersection (voir ci-dessous), que l'on peut vouloir contrôler avant de faire confiance à la calculatrice dans l'établissement de résultats expérimentaux.





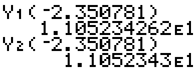
On sera alors amené à comparer deux nombres, donnés comme deux images d'un même nombre par deux fonctions. La question du critère de comparaison va être amenée en jouant sur les ensembles de nombres auxquels les images appartiennent : il est en effet d'une part peu commode de comparer, sur la table de la calculatrice, des nombres qui ont plusieurs chiffres de leur écriture décimale égaux alors qu'il est bien plus aisé d'y repérer un 0 ; d'autre part, la technique de la différence est plus performante à la calculatrice notamment compte tenu du fait que celle-ci travaille avec davantage de chiffres qu'elle n'en affiche.
On voit de même surgir la question de la notation de l'ensemble des solutions à partir du moment où l'on accomplit « souvent » le type de tâches de résolution d'inéquations : en effet, la périphrase « x est compris entre x_1 et x_2, x_1 et x_2 compris » qui s'avère lourde à écrire sera remplacée par $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ puis par $x \in [x_1 ; x_2]$.

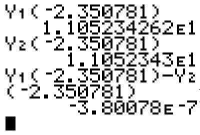
3. Ces types de tâches d'encadrement et de détermination d'intervalle(s) trouveront également une raison d'être dans la représentation graphique des fonctions à la calculatrice, notamment dans la justification de la détermination de la fenêtre de représentation graphique, ou encore dans la détermination des variations d'une fonction. C'est ainsi dans le cadre du travail sur les fonctions que ces notions d'ordre et d'intervalle seront particulièrement utiles : c'est donc au sein de ce travail qu'il faudra les faire apparaître. On aura alors une synthèse « ordre et intervalle », dont la matière aura émergé des travaux sur les fonctions. On retrouve un phénomène déjà signalé : l'écriture séquentielle du programme n'est pas un ordre d'exposition ; il faut dégager les liens fonctionnels entre les différents morceaux pour pouvoir créer une séquentialité qui tienne compte des besoins et des raisons d'être des différents thèmes d'étude.

On développera ici quelque peu ces matériaux. Supposons que l'on veuille donc contrôler les résultats fournis par la calculatrice dans l'exemple cité. Pour plus de commodité, on notera f la fonction qui à x associe $2x^2$ et g la fonction qui à x associe $-3x+4$, et $h = f - g$.

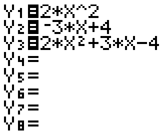
On sera amené à comparer $f(-2{,}350781)$ et $g(-2{,}350781)$, puis $f(0{,}85078106)$ et $g(0{,}85078106)$.

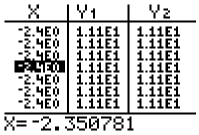
On obtiendra à la calculatrice (TI-82 toujours) :

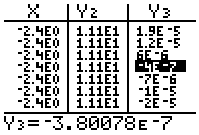




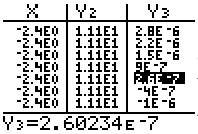
Ce qui permet de se convaincre qu'il s'agit là d'une valeur approchée du point d'intersection. Si l'on veut alors obtenir une meilleure approximation, la tabulation des fonctions donne :







La différence est nettement plus probante : elle donne par exemple de manière significative que l'approximation doit être cherchée au delà de la 6[e] décimale, et entre -2,350782 et -2,350781, sans doute plus près de -2,350781.



Les choses se précisent : c'est entre -2,3507811 et -2,350781 que se situe le zéro de h.

Pour la fenêtre de représentation graphique, on vient de le voir à travers l'exemple précédent, on a à déterminer « l'ensemble des x » pour lequel on va représenter la fonction, et « un ensemble des y » qui permettra que la courbe représentative pour les x choisis s'affiche entièrement sur l'écran. Pour les variations, on aura à déterminer l'ensemble des x sur lequel la fonction est croissante et l'ensemble des x sur lequel elle est décroissante : on voit bien qu'il sera commode à un moment donné de désigner ces ensembles à l'aide d'intervalles.

Une recherche sur « intervalle » dans le programme de seconde actuel donne, en dehors des références aux intervalles en statistique, les mentions suivantes dans le domaine des fonctions :

> Fonction croissante, fonction décroissante, maximum, minimum d'une fonction sur un intervalle.
> (...)
> comparer les images de deux nombres d'un intervalle.

Puis dans la rubrique « Notations et raisonnement mathématiques (objectifs pour le lycée) », qui « ne doit pas faire l'objet de séances de cours spécifiques mais doit être répartie sur toute l'année scolaire » :

> **Notations mathématiques**
> Les élèves doivent connaître les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire et savoir utiliser les symboles de base correspondant : $\in$, $\subset$, $\cup$, $\cap$ ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles.

Ce que nous disions l'an dernier est ainsi pour l'essentiel toujours valide : c'est dans le cadre du travail sur les fonctions que ces notions d'ordre et d'intervalle seront particulièrement utiles ; c'est donc au sein de ce travail qu'il faudra les faire apparaître. Le document « ressources » à propos des fonctions ne dit d'ailleurs pas autre chose :

> Le programme encourage une programmation moins centrée sur les notions elles-mêmes et davantage sur la nature des problèmes que les élèves doivent savoir résoudre.
>
> Par exemple, au niveau du travail à conduire sur le sens de variation des fonctions, l'objectif n'est pas de centrer un apprentissage sur une maîtrise du « comment étudie-t-on en général le sens de variation d'une

fonction définie par une expression algébrique ? ». Il s'agit davantage d'obtenir que les élèves donnent sens à ce qu'est une fonction croissante (ou décroissante) sur un intervalle et sachent, quand le sens de variation d'une fonction est connu, comment exploiter une telle information pour répondre à une question.

d) Familiariser les élèves avec les notations propres aux intervalles

Il n'y a pas lieu de consacrer une ou plusieurs séances à la notion d'intervalle. Au collège les élèves ont eu l'occasion de représenter sur la droite numérique des ensembles de nombres (par exemple tous les nombres solutions d'une inéquation du premier degré à une inconnue). En seconde il s'agit prioritairement de consolider ce qui a été amorcé au collège et en parallèle de proposer, simplement quand le besoin s'en fait sentir, et petit à petit, une façon de noter des ensembles que l'on sait déjà représenter.

Ce qui change par rapport au programme précédent, c'est que l'on ne travaillera plus la notion d'intervalle, et notamment sa caractérisation en termes de distance, mais que l'on utilisera simplement cette notion pour désigner de façon commode certains ensembles de nombres. Cela devra figurer à un moment donné dans la synthèse, par exemple comme réponse à la question : comment noter les ensembles de nombres solutions d'une inéquation ?

Les vecteurs en seconde

Au sujet de la notion de vecteur en seconde. Le programme de seconde introduit les vecteurs par les translations. Peut-on tout de même faire le lien avec la définition utilisant le sens, direction et longueur ? (FP, 2de, 2)

Faute de temps, cette question sera abordée la semaine prochaine.

3. Recherches dans les Archives

Deux exposés sont au programme de cette séance d'explicitation.

a) Une première recherche dans les *Archives* tentera de répondre à la question suivante :

Que nous disent les *Archives du Séminaire* quant à la ***gestion du temps dans l'organisation de l'étude*** ?

• Le compte rendu de la recherche s'efforcera de présenter (en les choisissant adéquatement) des matériaux pour une réponse aux questions de la semaine ci-après éventuellement présents dans les *Archives*.

1. Lorsque l'on fait une séance d'exercices durant deux heures, comment fait-on pour intéresser les élèves jusqu'à la dernière minute ? (NB, 3)

2. L'expérience montre que les élèves sont plus agités l'après-midi, a fortiori le vendredi après-midi. Quel genre d'activité (au sens large) est-il préférable de faire pour tirer le meilleur bénéfice de la séance ? (BCL, 3b)

3. Combien de temps doit durer une AER ? (est-ce de l'ordre d'un quart d'heure ou plutôt d'une heure entière ?). (FA, 1)

4. J'ai une classe de 6^{e}. Les élèves perdent beaucoup de temps à changer de cahier, écrire et me posent beaucoup de questions (de quelle couleur souligner, combien de lignes sauter). Ainsi, faire une activité puis passer au cours et finir par les exercices prend beaucoup de temps. Comment minimiser les pertes de temps au niveau de l'organisation (i.e. à ce niveau décrit) ? (FA, 2)

5. J'aurais souhaité avoir une idée de la durée type au maximum de chaque élément qui compose une séance : correction d'exercices, synthèse de cours... (MB, 3)
6. Dans une séance, a-t-on le temps de faire l'activité, d'écrire la synthèse au tableau et de résoudre ensemble un exercice d'application pour que les élèves aient ensuite tous les éléments nécessaires pour résoudre les exercices à faire à la maison ? (AB, 1)
7. Quel serait le découpage, l'organisation « idéale », « classique » d'une séquence pour une classe de 4^{e} ? (MC, 2)
8. Comment bien organiser une séance de 55 minutes ? Quelle part de temps consacrer à l'AER ? À la synthèse ? Aux exercices d'application ? (AL, 2)

• Cette recherche est confiée au trinôme formé de MC, AB et JC.

Exposé et commentaires

b) La deuxième recherche dans les *Archives* a trait à la question suivante :

Que nous disent les *Archives du Séminaire* quant ***aux systèmes didactiques auxiliaires (SDA)*** ?

• Le compte rendu de la recherche s'efforcera de présenter (en les choisissant adéquatement) des matériaux pour une réponse aux questions de la semaine ci-après éventuellement présents dans les *Archives*.

1. Comment organiser une séance de PPRE en classe de 6^{e} ? (BCL, 3)
2. En « soutien », est-on obligé de prendre la classe en groupes ou peut-on garder la classe entière (pour avancer le cours par exemple) ? (AM, 3)
3. En quoi consiste une séance d'ATP ? (CS, 0)
4. J'ai ma classe une heure par semaine en demi-groupe. Les différences de niveaux sont si différentes que je n'arrive pas à faire la même chose avec les deux groupes. Que faire ? (LM, 3)
5. Les heures de module (en demi-groupe) doivent-elles être exclusivement réservées aux activités ? Peut-on prendre le risque de commencer une synthèse alors qu'il est possible de ne pas s'arrêter au même point avec les deux groupes ? (JC, 1)
6. À propos de l'Aide Individualisée, dans mon établissement nous sommes libres, certains préfèrent faire d'autres exercices tandis que d'autres préfèrent revoir les synthèses. Les élèves n'étant pas forcément très enclins à l'étude le vendredi soir en dernière heure, la participation est moindre que le reste du temps. Quels conseils donneriez-vous ? (EM, 3)

• Cette recherche est confiée au trinôme formé de FD, ÈR, CS.

Exposé et commentaires

4. Rencontre avec les inspecteurs de mathématiques (IA - IPR)

Patrick BRANDEBOURG, Jean-François CANET, Brigitte JAUFFRET, Laurent NOE et Claude SERRIS.

Travaux dirigés de didactique des mathématiques
Utiliser les TICE

N. B. La séance de travail dirigé dont rendent compte les notes ci-après n'a concerné qu'une moitié des participants au Séminaire environ. Elle ne sera pas reprise in praesentia *avec les participants composant l'autre moitié : par principe, et dans le cadre de leur formation au travail en équipe, ces derniers devront étudier le contenu du TDDM 1 à partir des notes qui suivent et avec l'aide, laissée à la convenance de chacun, de participants ayant dûment suivi cette séance.*

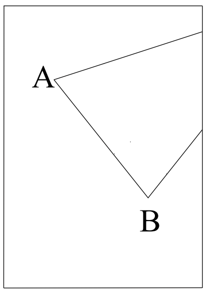
➔ Séance 1 : mardi 6 octobre 2009 (17 h 20 – 18 h 50)

Programme de la séance. 1. Vérifier une propriété conjecturée // 2. Conjecturer une propriété, etc. // 3. Contrôler un procédé de construction donné

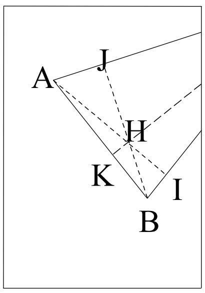
1. Vérifier une propriété conjecturée

a) Considérons le problème suivant et la solution qui lui est conjecturalement donnée.

Sur une feuille de papier, on a voulu tracer un triangle ABC dont, en fait, le sommet C tombe hors de la feuille. Pour une raison non précisée, on souhaite tracer (la partie figurant sur la feuille de) la hauteur issue de C.



S'il était vrai que les hauteurs concourent, on pourrait, à l'aide d'une règle et d'une équerre, procéder ainsi : on marque le projeté orthogonal I de A sur (BC), le projeté orthogonal J de B sur (AC) : les droites (AI) et (BJ) se coupent en H ; il ne reste plus qu'à marquer le projeté orthogonal K de H sur (AB) pour obtenir la droite (HK) demandée.



b) La propriété utile – le concours des hauteurs d'un triangle – est-elle ***vraie*** dans l'espace sensible $\mathcal{E}$?

• Pour répondre à cette question, on envisage de concevoir et de réaliser une ***expérience graphique***, ou plutôt ***une simulation à l'ordinateur*** d'une telle expérience.

• Dans ce qui suit, on utilise le logiciel Geogebra et on appelle « expérience » ce qui est en fait une simulation de l'expérience.

c) Un premier travail à réaliser est la ***conception de l'expérience***. Plusieurs possibilités s'offrent.

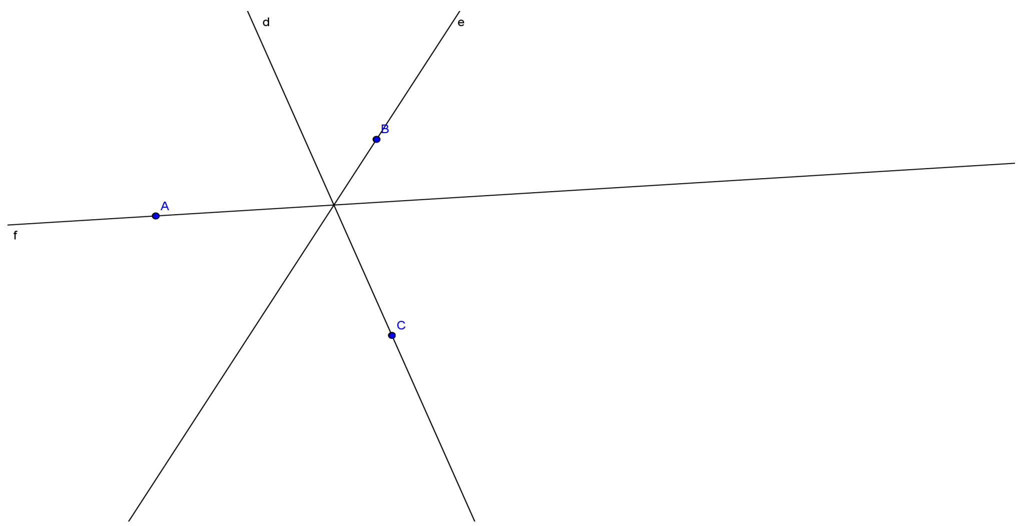
• On peut demander au logiciel de géométrie de tracer les perpendiculaires aux côtés du triangle issues des sommets opposés :

1) On crée trois points libres dans le plan, A, B et C.
2) On crée les droites (d_1), (d_2), (d_3) passant respectivement par A, B et C et respectivement perpendiculaires à (BC), (CA), (AB).
3) On déplace le point C dans le plan pour observer s'il y a bien concours des droites (d_1), (d_2), (d_3).

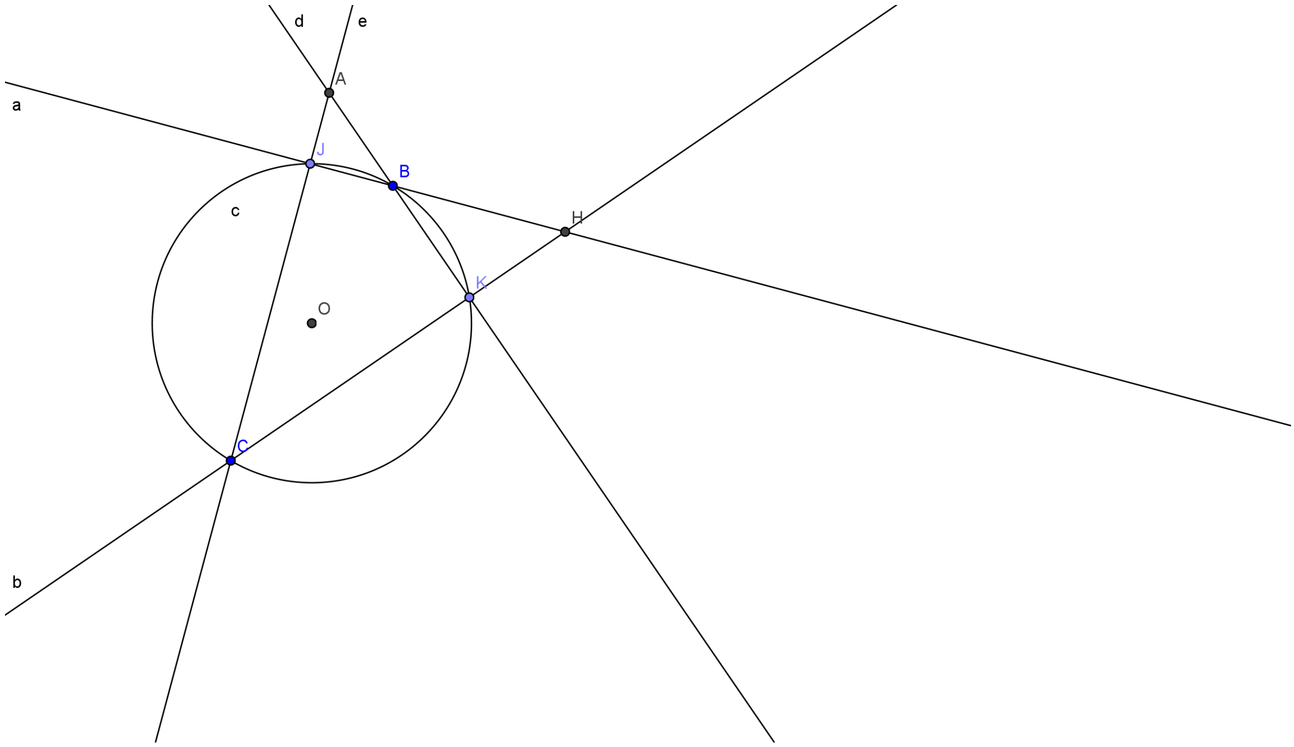
• On peut encore suivre l'énoncé de la propriété :

1) On crée trois points libres dans le plan, A, B et C.
2) On crée les projetés orthogonaux I, J, K de A, B, C sur (BC), (CA), (AB).
3) On crée les droites (AI), (BJ), (CK).
4) On déplace le point C dans le plan pour observer s'il y a bien concours des hauteurs.

• On notera que, dans chacun des cas précédents, l'aspect visuel de la configuration dynamique créée s'éloigne de la figure « standard » d'un triangle avec ses trois hauteurs. Voici par exemple à quoi conduit le premier « montage » expérimental (v. TD 1 - Hauteurs1.ggb).



• En fonction de ses connaissances géométriques, on peut envisager d'autres expériences, par exemple celle-ci (v. TD 1 - Hauteurs 2.ggb) :



Retrouver comment cette figure a été élaborée et expliciter comment elle peut permettre de réaliser une expérience de la propriété.

On trouvera ci-dessous un programme de construction de la figure.

1) On crée deux points libres dans le plan, B et C.
2) On crée le cercle de diamètre [BC].
3) On crée deux points J et K libres sur le cercle.
4) On trace les droites (BJ) et (CK) et on crée leur point d'intersection H.
5) On crée le point d'intersection A de (BK) et (CJ).

Pour qu'elle permette de réaliser l'expérience souhaitée, il suffit de rajouter la sixième étape suivante :

6) On crée la perpendiculaire à (BC) passant par A et on vérifie si elle passe bien par H.

On pourra alors vérifier que lorsque l'on fait varier l'un des trois points A, B ou C, le concours des hauteurs est conservé.

On peut noter que l'on pouvait également considérer le triangle ACH, le point de concours des hauteurs étant alors B.

L'intérêt de considérer plusieurs expériences graphiques est d'une part de mettre à l'épreuve les techniques expérimentales produites, d'autre part de s'habituer à examiner plusieurs voies d'attaque d'un même problème, qui est un aspect essentiel de la préparation à la direction de l'étude d'AER notamment.

2. Conjecturer une propriété, etc.

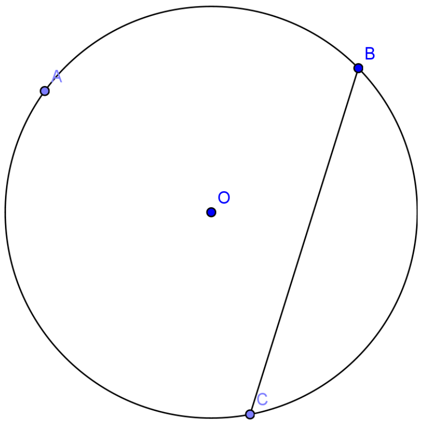
Une propriété classique revisitée

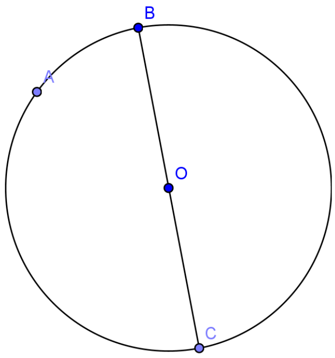
a) On part ici de la question suivante : étant donné un triangle ABC, se peut-il que ***le centre O du cercle circonscrit se trouve sur l'un des côtés*** ?

b) Cette question fait l'objet d'une exploration graphique à l'aide d'une configuration dynamique que les participants doivent d'abord élaborer.

• On peut envisager l'expérience suivante (v. TD 1 - Centre sur côté.ggb).

1) On crée deux points libres dans le plan, O et B, ainsi que le cercle c centré en O et passant par B.
2) On crée deux points libres sur c, C et A.
3) On déplace B pour tenter d'amener O sur (BC).





• L'observation de la configuration dynamique créée suggère deux faits. Lorsque O est sur (BC), 1) O est en fait le milieu de [BC] ; et 2) l'angle $\widehat{BAC}$ est droit.

• Associés en binômes, les participants s'efforcent d'établir que ces deux faits se déduisent aisément de la TGD augmentée de l'énoncé suivant :

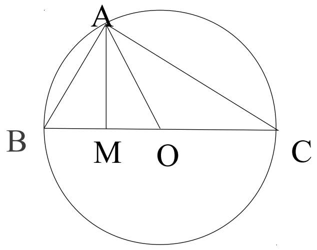
Le centre de gravité, G, le centre du cercle circonscrit, O, et l'orthocentre, H, d'un triangle sont alignés.

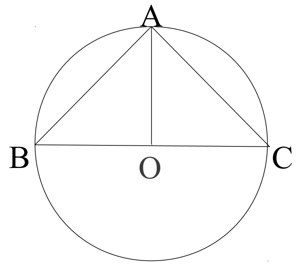
Faute de temps, cette partie n'a pas été traitée en séance.

➔ Le fait que O est le milieu de [BC] se déduit en effet immédiatement du fait que le cercle c, de centre O, passe par B et C.

➔ Le fait que l'angle $\widehat{BAC}$ est droit se déduit du fait que H est sur la droite (GO), soit donc sur la médiane issue de A.

– Si, en effet, celle-ci n'est pas perpendiculaire à (BC) [v. figure ci-dessous à gauche], comme H est aussi sur la perpendiculaire à (BC) passant par A, on a H = A, si bien que (CA) = (CH) est perpendiculaire à (AB), CQFD.



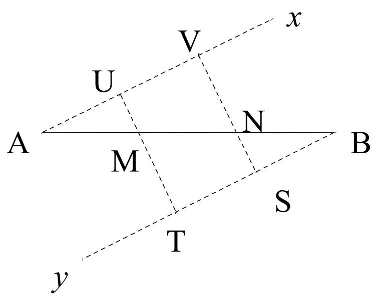


– Si la médiane est perpendiculaire à (BC) [figure ci-dessus à droite], les triangles OAB et OAC sont rectangles isocèles, leurs angles à la base sont de 45º, et par suite l'angle est de 90º, CQFD.

3. Contrôler un procédé de construction donné

3.1. Contrôle expérimental

a) On suppose avoir rencontré (dans un livre, etc.) un certain ***procédé de construction*** (exacte). À titre d'exemple, considérons le procédé illustré par la figure suivante.



• Si cette technique « marchait » (si les points M et N qu'elle fournit vérifiaient effectivement AM = MN = NB), elle serait à plusieurs égards intéressante : elle ne nécessite en effet que le tracé de ***deux*** parallèles, ce qui peut être fait à l'aide d'une règle ***à deux bords parallèles*** ; elle suppose seulement, alors, le report sur chaque parallèle de $n - 1$ segments de même longueur, ce qu'on peut faire à l'aide d'une règle dont le bord porte ***deux marques***.

• Précisons en outre qu'il s'agit là, en vérité, du cas particulier (pour $n = 3$) d'une technique graphique pour découper un segment en n parties égales.

b) Notons θ l'assertion que les points M et N vérifient AM = MN = NB. Une première étape de l'étude mathématique à conduire consiste à s'assurer ***expérimentalement*** que l'on a bien : $\models_E \theta$. (S'il n'en était pas ainsi, la technique pourrait éventuellement être « recyclée » comme procédé de construction ***approchée***.)

Associés en binômes, les participants conçoivent et réalisent l'expérience graphique évoquée.

Faute de temps, cette partie n'a pas été traitée en séance.

En l’espèce, la réalisation d’une simulation de l’expérience graphique à l’aide de Geogebra ne laisse pas de doute sur la vérité de θ, comme le suggère la configuration reproduite ci-après, où *u* = AM, *v* = MN, *w* = NB (v. TD1-Trisection_segment.ggb).

Il resterait à étudier le ***contrôle théorique, soit répondre à la question suivante :***

La propriété de l’espace $\mathcal{E}$ appelée θ dans ce qui précède se laisse-t-elle déduire de la théorie géométrique disponible ? Cette TGD permettait-elle de « prévoir » le résultat expérimental obtenu ?

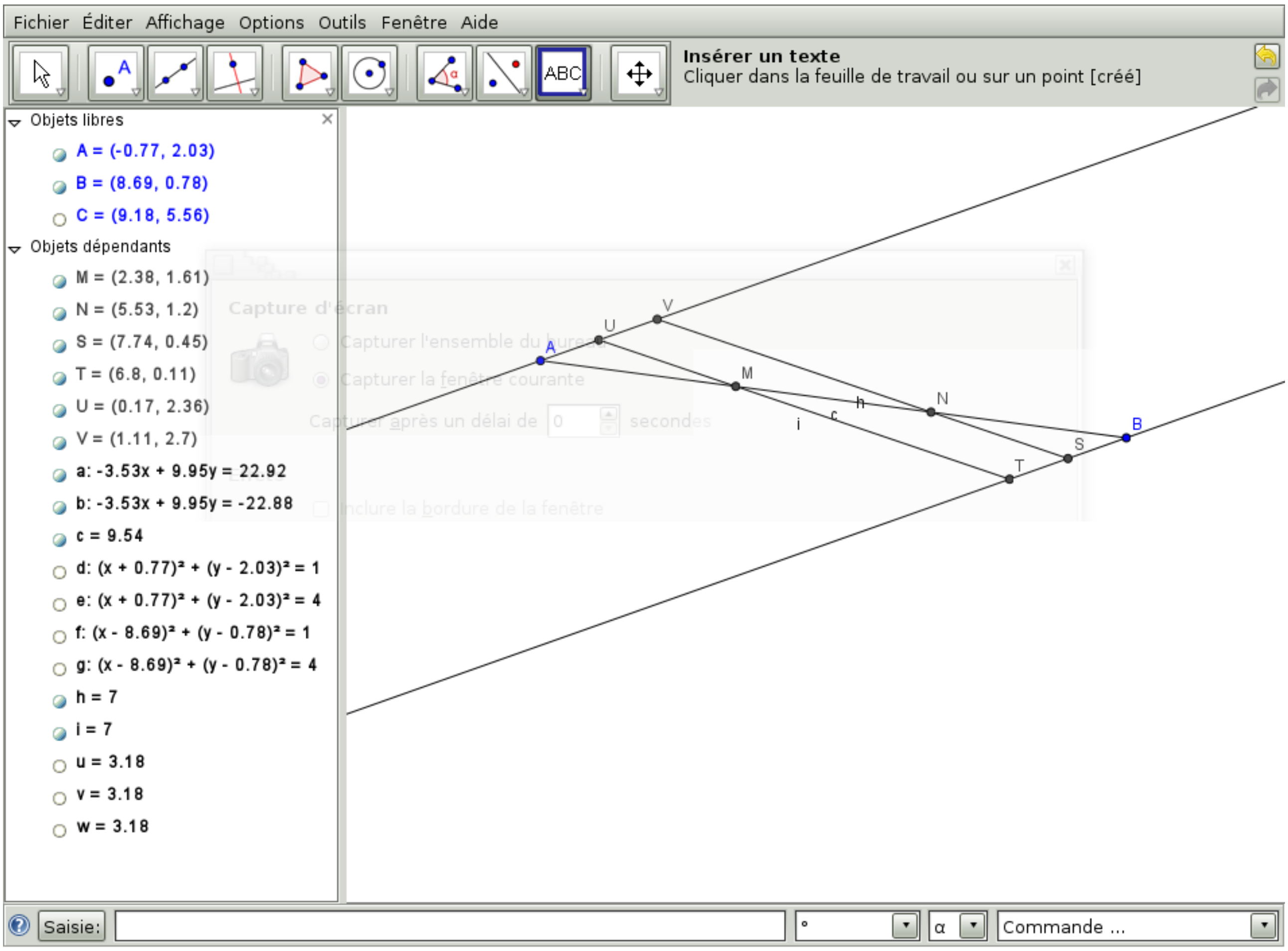
On suppose que figure dans la TGD le théorème des milieux.

(BT) // (AV). Donc de (TS) // (UV) et UV = TS, il vient que UVST est un parallélogramme, ce qui prouve que (UT) // (VS).

U étant le milieu de [AV] et (UT) // (VS), il vient d’après le théorème des milieux dans le triangle AVN que AM = MN.

S étant le milieu de [BT] et (UT)// (VS), il vient d’après le théorème des milieux dans le triangle BTM que BN = NM.

On obtient donc BN = MN = AM.



Dans la réalisation de quel(s) moment(s) de l'étude, ce(s) type(s) de tâches d'expérimentation peu(ven)t-il s'avérer utile(s) ?

Ces types de tâches d'expérimentation peuvent permettre de réaliser :
• le moment technologico-théorique, en articulant deux aspects : la vérification que la propriété est vraie dans l'espace sensible ; la déduction de la théorie géométrique disponible (TGD) de la propriété ainsi vérifiée ;
• une partie au moins du moment exploratoire, comme il en va avec la troisième situation envisagée où la réalisation de l'expérience permet en outre d'élaborer la technique dont le graphique ne donne qu'une trace écrite.

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 6 : mardi 13 octobre 2009

Programme de la séance. 0. Questions de la semaine // 1. Observation & analyse // 2. Forum des questions // 3. Encyclopédie du professeur de mathématiques – la notice sur le temps de l'étude

0. Questions de la semaine

On note les mêmes thèmes que la semaine précédente :

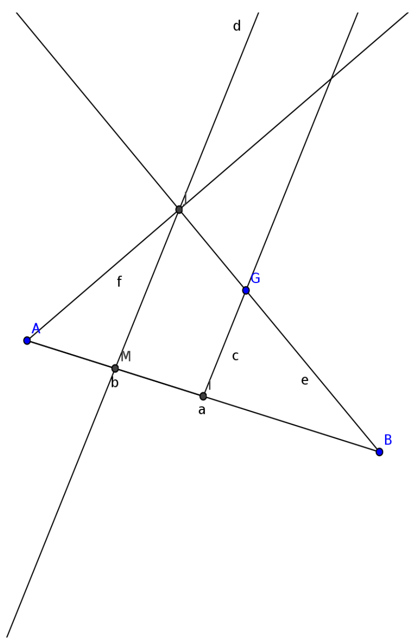
Les devoirs, leur notation, leur élaboration ; la constitution des OM ; la gestion de la classe avec les aspects collectifs et individuels.

1. Observation & analyse

1.1. Nous reviendrons d'abord sur les aspects mathématiques que nous avions laissés de côté lors des séances précédentes.

1. Une technique pour obtenir C, produite par un autre élément technologique.

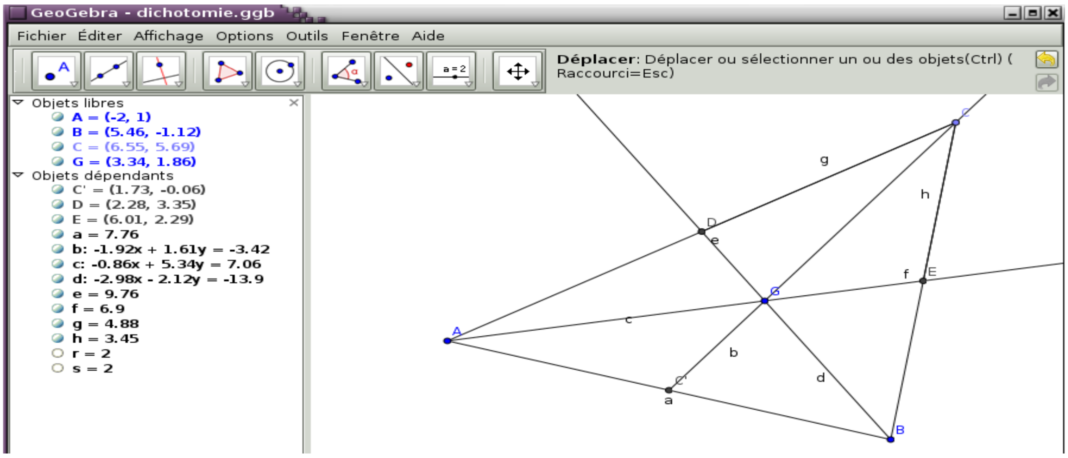
« Voici comment on peut construire C.
Plaçons le point M milieu de AI et traçons la parallèle à la médiane (IG) passant par M.
Notons par J le point d'intersection de cette droite avec la médiane (BG).
Traçons la droite (AJ). Alors celle-ci va couper la médiane (IG) au point C que l'on cherche.
En effet (MJ) étant une parallèle au côté [IC] du triangle AIC et passant par le milieu de [AI], elle coupe le 3^{e} côté [AC] en son milieu (d'après le théorème de la droite des milieux) qui n'est autre que le point J intersection de (AC) et de la médiane (BG). (BG) et (IG) sont donc bien les deux médianes issues respectivement de B et de C du triangle ABC. »



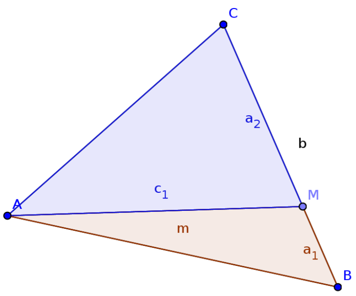
Nous reviendrons dans la prochaine séance sur la question de la possibilité que cette technique émerge dans la classe lors de l'étude de l'activité. Les participants au Séminaire sont invité à y réfléchir.

2. Une démonstration du résultat suivant, obtenu par expérimentation :

Si on construit C de façon à ce que la droite (BG) coupe [AC] en son milieu, c'est aussi le cas pour (AG) et [BC] ; et plus généralement, si C est sur la demi droite [C'G) avec CA/CD = *r*, alors CB/CE = *r* (en notant D le point d'intersection de [AC] et [BG)et E le point d'intersection de [BC] et [AG)).



Il s'agit de démontrer l'égalité de deux rapports de longueurs. Une technique classique en géométrie euclidienne est de se ramener à montrer des égalités d'aires. Elle repose essentiellement ici sur le résultat suivant :



Dans un triangle ABC, si M est un point du segment [BC], alors $\dfrac{MB}{MC}=\dfrac{aire\left(AMB\right)}{aire\left(AMC\right)}$.

(NB : une démonstration de ce résultat prend appui sur le calcul des aires des deux triangles et le fait qu'ils ont la même hauteur.)

Comme $\dfrac{CA}{CD}=1+\dfrac{DA}{CD}$ et $\dfrac{CB}{CE}=1+\dfrac{BE}{CE}$, il revient au même de montrer que l'on a $\dfrac{DA}{CD}=\dfrac{BE}{CE}$.

On a d'abord que $\dfrac{DA}{CD}=\dfrac{aire\left(DAG\right)}{aire\left(CDG\right)}$ et $\dfrac{BE}{CE}=\dfrac{aire\left(EBG\right)}{aire\left(CEG\right)}$.

Comme G appartient au segment [DB], $\dfrac{DG}{BG}=\dfrac{aire\left(ADG\right)}{aire\left(ABG\right)}=\dfrac{aire\left(CDG\right)}{aire\left(CBG\right)}$.

D'où $\frac{DA}{CD}=\frac{aire(DAG)}{aire(CDG)}=\frac{aire(ABG)}{aire(CBG)}$.

Comme G appartient au segment [AE], $\frac{EG}{GA}=\frac{aire(BGE)}{aire(BGA)}=\frac{aire(CGE)}{aire(CGA)}$.

On obtient donc : $\frac{BE}{CE}=\frac{aire(EBG)}{aire(CEG)}=\frac{aire(BGA)}{aire(CGA)}$.

Comme aire(CGA) = aire(CBG) puisque (CG) est une médiane du triangle ABC, on a la conclusion cherchée.

1.2. Nous reviendrons maintenant sur l'analyse des techniques de réalisation des moments de l'étude relatifs à la séance observée.

Nous avions établi collectivement l'analyse de la technique de réalisation du moment exploratoire, dont nous reproduisons ci-dessous la mise en forme qui figure dans les notes de la séance précédente.

Technique de réalisation du moment exploratoire

Le moment exploratoire débute par la proposition d'un élève, qui donne le début d'un procédé de construction du point C. Le professeur prend l'initiative de faire formuler à un élève que le point G est intérieur au triangle. Il s'instaure un dialogue qui aboutit à la question : « peut-on construire les médianes ? ». P leur propose d'y réfléchir et les élèves commencent à chercher, essaient de tracer les médianes.

P fait passer un élève au tableau pour construire les médianes. Il intervient pour refaire effectuer la construction du milieu du segment [AB] que l'élève avait effectué en mettant en œuvre une technique correcte mais maladroitement réalisée avec le compas. On cherche ensuite le point C.

La classe indique qu'il est sur la médiane mais se demande où. On voit donc émerger un nouveau problème : « Où se situe C sur la médiane passant par G et le milieu de [AB] ? ».

Une idée émerge, faire glisser la règle pour avoir une approximation de la solution. P ne laisse pas la classe explorer cette idée et annonce qu'il faudrait pouvoir savoir où se trouve le point G sur la médiane. Un élève propose « au milieu », et P prend la décision de ne pas examiner cette proposition.

Un deuxième épisode du moment exploratoire a lieu une fois que la propriété donnant la position du centre de gravité sur les médianes a émergé. C'est P qui en prend l'initiative en affirmant que « maintenant, je pense qu'on va pouvoir arriver à trouver le point C ». Les élèves travaillent pendant que le professeur passe dans les rangs, puis un élève est convoqué au tableau pour mettre en œuvre la technique élaborée.

Il s'agissait pour cette séance de rédiger les techniques de réalisation des moments de première rencontre, technologico-théorique et d'institutionnalisation.

Nous partirons d'une proposition qui nous a été communiquée par mel et que nous reproduisons ci-dessous.

Moment de première rencontre
P commence par réactiver certaines connaissances sur les médianes en interrogeant un élève. Celui-ci donne la définition d'une médiane ainsi que la propriété de concours des médianes. P donne le numéro et le titre de l'activité du jour. P fait lire l'énoncé par un élève ; la figure du problème est présente au tableau. Elle commente, explicite et signale que le problème donné n'aura qu'une seule solution.

Moment technologico-théorique
Après avoir orienté les élèves sur l'intérêt de connaître la position du point G, P les aide en traçant une figure sur le quadrillage du tableau. Elle leur rappelle également comment placer le milieu d'un segment avec le quadrillage. Une feuille comportant deux exemples est distribuée. La classe travaille et P passe dans les rangs. Après 3 minutes de réflexion, P trace les médianes au tableau et souligne le fait que G est sur le quadrillage. P sollicite la classe pour apporter des réponses au problème donné (position de G). Une première réponse concernant AG est notée puis P oriente l'attention sur BG. La relation avec BG est trouvée et P écrit les trois relations au tableau. Le deuxième exemple ne sera pas examiné mais P demande confirmation à la classe quant à la similitude des résultats ; la classe confirme. À l'aide de ces trois relations, P met l'accent sur le fait que G semble avoir toujours la même position et demande aux élèves de trouver une relation entre AG et AA'. Une élève répond correctement et P écrit les trois nouvelles relations au tableau. Ensuite P demande aux élèves de formuler une conjecture ; P écrit la conjecture énoncée par un élève (avec son aide) et relance un moment exploratoire en leur faisant comprendre que cette conjecture aura une utilité pour le problème initial.

Moment d'institutionnalisation
P demande aux élèves de ranger la feuille d'activité dans la partie activités du classeur et signale qu'ils vont passer au cours. P indique où ils en étaient et écrit la première partie de la propriété sur la position de G en attendant que les élèves la finissent. Les élèves notent en silence. P signale enfin que le cours est terminé et propose aux élèves de passer aux exercices.

Voici une proposition de modification.

Moment de première rencontre
~~P commence par réactiver certaines connaissances sur les médianes en interrogeant un élève. Celui-ci donne la définition d'une médiane ainsi que le concours de celle-ci.~~ P donne le numéro et le titre de l'activité du jour. P fait lire l'énoncé par un élève ; la figure du problème est présente au tableau. Elle commente et explicite rapidement, et signale que le problème donné n'aura qu'une seule solution.

Moment technologico-théorique
Après avoir orienté les élèves sur ~~l'intérêt de~~ la ~~connaître~~ connaissance de la position du point G, P les aide en traçant une figure sur le quadrillage du tableau. Elle leur rappelle également comment placer le milieu d'un segment avec le quadrillage. ~~Une feuille comportant deux exemples est distribuée.~~ Deux exemples de triangles figurent sur la feuille d'activité et ce sont ces deux spécimens qui permettront de faire surgir expérimentalement le résultat cherché. ~~La classe travaille et P passe dans les rangs.~~ Après 3 minutes ~~de réflexion~~,pendant lesquelles les élèves tracent les médianes et mesurent les longueurs des segments, P trace les médianes au tableau et souligne le fait que G est sur le quadrillage. P sollicite la classe pour apporter des réponses au problème donné (position de G). Une première réponse concernant AG et A'G est notée puis P oriente l'attention sur BG. La relation avec BG est trouvée et P écrit les trois relations au tableau. Le deuxième exemple ne sera pas examiné mais P demande confirmation à la classe quant à la similitude des résultats ; la classe confirme. À l'aide de ces trois relations, P met l'accent sur le fait que G semble avoir toujours la même position et demande aux élèves de trouver une relation entre AG et AA'. Une élève répond correctement et P écrit les trois nouvelles relations au tableau. Ensuite P demande aux

élèves de formuler une conjecture ; P écrit la conjecture énoncée par un élève (avec son aide) et relance un épisode du moment exploratoire en leur faisant comprendre que cette conjecture aura une utilité pour le problème initial.

Moment d'institutionnalisation
On peut noter deux épisodes du moment d'institutionnalisation : le premier, dans lequel la conjecture est formulée et notée dans la réalisation de l'AER.
Le second, initié par P qui demande aux élèves de ranger la feuille d'activité dans la partie activités du classeur ~~et~~ signale que~~'ils vont passer~~ « on passe au cours ». C'est P qui indique où ils en étaient et écrit la première partie de la propriété sur la position de G en attendant que les élèves la finissent. ~~Les élèves notent en silence. P signale enfin que le cours est terminé et propose aux élèves de passer aux exercices.~~

1.3. Comment observer et analyser une séance d'enseignement ?

L'observation prend principalement la forme d'un compte rendu de la séance dont on a vu un spécimen. C'est cela qu'il s'agit de rédiger à l'issue de stage de SPA pour l'une des séances réalisés par l'un des élèves professeurs.

L'analyse de la séance, ou plus précisément du compte rendu d'observation de la séance, est constituée de la détermination de l'***organisation mathématique*** étudiée et de l'***organisation didactique*** qui en permet l'étude, du moins ce qu'on en voit ou que l'on peut inférer avec une « certitude raisonnable ». À ces deux rubriques, on en ajoutera deux autres :
Structure et contenu de la séance, par laquelle on débutera l'analyse et qui décrira rapidement le contenu des épisodes présents dans la séance ainsi que la place de cette séance dans l'étude des mathématiques au programme de la classe ;
Gestion de la séance, qui clôturera l'analyse, et qui explicitera les décisions et les interventions du professeur dans la séance qui conditionne la survenue de tel scénario didactique : par exemple, le choix de P dans la séance observée de ne pas examiner la proposition d'un élève à la séance suivante fait partie de la gestion de la séance.

L'analyse comportera donc les quatre rubriques suivantes :

Structure et contenu de la séance ;
Organisation mathématique ;
Organisation didactique ;
Gestion de la séance.

Une séquence sera analysée de la même façon, son observation prenant la forme le plus souvent d'une collection de traces écrites (voir la description du corpus B dans le document sur la formation et la validation).

1.4. On notera que l'on dispose maintenant de certains outils (éléments technologico-théoriques) qui permettent de produire une première technique relative au type de tâches : « concevoir et réaliser une séquence d'enseignement sur un thème donné ».

Il s'agit :

1) de concevoir une organisation mathématique enjeu de l'étude ;

et donc d'identifier les types de tâches à étudier, les techniques qui permettent de les accomplir et l'environnement technologico-théorique qui justifie, produit, rend intelligible ces techniques ; pour cela, on se basera sur une analyse des programmes et de leurs documents d'accompagnement, « documents ressources », sur les archives du séminaire, l'analyse d'ouvrages de mathématiques pour la classe, etc.

2) de concevoir une organisation didactique qui mette en place l'OM élaborée ;

et donc de concevoir des dispositifs permettant la réalisation d'un moment de première rencontre de l'OM ***par le biais des types de tâches à étudier*** ; d'un moment exploratoire de ces types de tâches permettant la constitution de techniques ; d'un moment technologico-théorique qui produise une technologie permettant de justifier et/ou de produire les techniques ; d'un moment de travail de l'OM ainsi produite ; d'un moment d'institutionnalisation qui mette en forme l'OM produite ; d'un moment d'évaluation qui évalue à la fois l'OM produite et la maîtrise qu'on en a.

3) De réaliser cette organisation de l'étude.

Nous avons avancé sur les dispositifs et les gestes de réalisation des différents moments, à travers les analyses d'observation et le forum des questions : les participants au séminaire sont invités à faire le point sur ce qui figure dans les notes du Séminaire.

2. Forum des questions

Les vecteurs en seconde

Au sujet de la notion de vecteur en seconde. Le programme de seconde introduit les vecteurs par les translations. Peut-on tout de même faire le lien avec la définition utilisant le sens, direction et longueur ? (2^{de}, 2)

Voici ce que dit le programme de seconde à propos de l'enseignement des vecteurs.

Contenus : Vecteurs
Définition de la translation qui transforme un point A du plan en un point B.
Vecteur $\overrightarrow{AB}$ associé. Égalité de deux vecteurs : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.
Coordonnées d'un vecteur dans un repère. Somme de deux vecteurs.
Produit d'un vecteur par un nombre réel.
Relation de Chasles.

Capacités attendues
•Savoir que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ équivaut à $ABDC$ est un parallélogramme, éventuellement aplati.
• Connaître les coordonnées $(x_B - x_A ;\ y_B - y_A)$ du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
• Calculer les coordonnées de la somme de deux vecteurs dans un repère.
• Utiliser la notation $\lambda \vec{u}$
•établir la colinéarité de deux vecteurs.
• Construire géométriquement la somme de deux vecteurs.
•Caractériser alignement et parallélisme par la colinéarité de vecteurs.

Commentaires
À tout point C du plan, on associe par la translation qui transforme A en B, l'unique point D tel que $[AD]$ et $[BC]$ ont même milieu.
La somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur associé à la translation résultant de l'enchaînement des

translations de vecteur $\vec{u}$ et de vecteur $\vec{v}$.
Pour le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (a, b) dans un repère, le vecteur $\lambda\vec{u}$ est le vecteur de coordonnées $(\lambda a, \lambda b)$ dans le même repère. Le vecteur $\lambda\vec{u}$ ainsi défini est indépendant du repère.

On complétera par la présentation du domaine « Géométrie » :

L'objectif de l'enseignement de la géométrie plane est de rendre les élèves capables d'étudier un problème dont la résolution repose sur des calculs de distance, la démonstration d'un alignement de points ou du parallélisme de deux droites, la recherche des coordonnées du point d'intersection de deux droites, en mobilisant des techniques de la géométrie plane repérées.
Les configurations étudiées au collège, à base de triangles, quadrilatères, cercles, sont la source de problèmes pour lesquels la géométrie repérée et les vecteurs fournissent des outils nouveaux et performants.
En fin de compte, l'objectif est de rendre les élèves capables d'étudier un problème d'alignement de points, de parallélisme ou d'intersection de droites, de reconnaissance des propriétés d'un triangle, d'un polygone – toute autonomie pouvant être laissée sur l'introduction ou non d'un repère, l'utilisation ou non de vecteurs.
Dans le cadre de la résolution de problèmes, l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique par les élèves leur donne une plus grande autonomie et encourage leur prise d'initiative.
La définition proposée des vecteurs permet d'introduire rapidement l'addition de deux vecteurs et la multiplication d'un vecteur par un nombre réel. Cette introduction est faite en liaison avec la géométrie plane repérée. ***La translation, en tant que transformation du plan, n'est pas étudiée en classe de seconde.***

On ne trouve effectivement aucune mention du fait qu'un vecteur est caractérisé par un triplet (direction, sens, norme). L'introduction de cette caractérisation est-elle utile à la constitution de l'organisation mathématique à fabriquer ? Telle est la question qu'il s'agit d'abord d'étudier. On examinera pour cela d'abord un extrait des notes du séminaire 2000-2001.

> (...) les ***vecteurs*** du plan (ou de l'espace) doivent en quelque sorte « sortir » des manipulations opérées sur les ***points*** du plan (ou de l'espace). Le problème d'ensemble à résoudre est bien résumé dans la synthèse suivante (Jean Frenkel, *Géométrie pour l'élève-professeur*, Hermann, Paris, 1973, p. 21) :
>
> « La géométrie affine élémentaire fait entrer trois "personnages principaux" : les points, les vecteurs (…), les translations. Les points sont les éléments d'un ensemble X. Les vecteurs sont les éléments d'un espace vectoriel $\vec{X}$. Les translations sont des bijections particulières de X sur lui-même. Dans les lycées et collèges, on a pris l'habitude (…) d'appeler bipoint un élément de X^2 (*i.e.* un couple de points de X). Un vecteur est une classe "d'équipollence" de bipoints (deux bipoints (x,y) et (x',y') sont équipollents si (x,y,y',x') est la suite des sommets consécutifs d'un parallélogramme, aplati ou non ; le lecteur adoptera comme définition d'un parallélogramme celle qu'il préférera). L'important dans l'enseignement élémentaire (et même supérieur) est que :
>
> 1) l'équipollence est une relation d'équivalence ; la classe d'équivalence du bipoint (x,y) est notée $\overrightarrow{xy}$;
>
> 2) l'ensemble $\vec{X}$ des classes d'équipollence est muni d'une structure d'espace vectoriel sur un corps (qui est $\mathbb{R}$ ou peut-être $\mathbb{Q}$ en géométrie élémentaire) ;
>
> 3) à tout vecteur $\vec{V} \in \vec{X}$ est associée une translation, à savoir la bijection qui au point x associe le point $y \in$ X, noté souvent $x+\vec{V}$, tel que $\overrightarrow{xy} = \vec{V}$.
>
> Ces trois espèces de personnages peuvent entrer en scène dans un ordre variable. Ce qui importe

ce sont naturellement les relations entre elles. Elles-mêmes peuvent être présentées sous différents jours. »

– On doit préciser d'abord l'affirmation relative au corps de nombres « qui est ℝ ou peut-être ℚ » : de fait sinon de droit, tout se passe comme si l'on utilisait un sous-corps $\mathfrak{R}$ de ℝ croissant au fil des années : surcorps strict de ℚ dès la 6e (puisque $\pi \in \mathfrak{R}$), il devient (le plus petit sous-corps de ℝ) fermé pour la racine carrée et le cosinus (et donc pour le sinus) à partir de la 4e, etc.

– Qu'en est-il alors, actuellement, au secondaire, des relations entre les trois « personnages » ?

• Le premier personnage à entrer en scène, dès la 6e, ce sont bien sûr les ***points***. En 4e apparaissent les ***translations***. En 3e, enfin, les ***vecteurs*** sont introduits. Cet ordre d'entrée en scène résulte d'un choix délibéré. Un commentaire du programme de 4e indique ainsi :

« Les vecteurs seront abordés en 3e et leur étude sera reliée à celle des translations à l'occasion de la composition de ces dernières. »

Le document d'accompagnement des programmes du cycle central (5e & 4e) explicite ainsi les motifs du choix retenu :

« Le cycle central du collège a semblé être approprié au passage graduel d'une vision des figures à celle du plan tout entier. La translation convient pour marquer une telle évolution. Par certains côtés, tels que les conservations d'alignements, les distances et les angles, la translation est proche des symétries, donc s'intègre bien à un univers avec lequel les élèves sont familiarisés. Mais elle doit nécessairement être regardée comme une transformation, parce qu'en répétant une même translation on ne revient pas à son point de départ. Ce point de vue a paru suffisamment important pour que l'étude de la translation ne soit pas mélangée à d'autres acquisitions ; ainsi, ni les vecteurs, ni la projection, ni toute autre application n'ont été introduits en classe de 4e. Le report de la présentation de la notion de vecteur ne soulève pas de problèmes de liaison avec les autres disciplines. C'est la composition de translations différentes qui rendra utile l'introduction des vecteurs. »

• La classe de 3e voit donc l'apparition des vecteurs. Le programme précise :

« Le programme de la classe de troisième a pour objectif de permettre
– en géométrie :

♦ de compléter d'une part, la connaissance de propriétés et de relations métriques dans le plan et dans l'espace, d'autre part, l'approche des transformations par celle de la rotation,

♦ de préparer l'outil calcul vectoriel, qui sera exploité au lycée […] »

« L'introduction de la notation vectorielle et de l'addition des vecteurs, qui constitue une initiation au calcul vectoriel, est l'un des aboutissements, du travail effectué au cycle central sur le parallélogramme et la translation. »

• On notera enfin que, en 4e, l'étude de la translation est fondée sur les propriétés du parallélogramme :

« La translation est définie à partir du parallélogramme. Elle pourra donner lieu à des manipulations, notamment sur des quadrillages.
On pourra ainsi, après un travail expérimental conduisant à mettre en évidence la conservation

des longueurs, de l'alignement, des angles et des aires, justifier certaines de ces conservations. Définition et propriétés pourront être utilisées dans la résolution d'exercices très simples de construction. »

– On suppose ici une certaine TGD dans le cadre de laquelle on veut construire les vecteurs du plan. Le premier problème consiste à définir une relation d'équivalence entre « bipoints » du plan, c'est-à-dire entre couples de points.

– Si l'on ignore la translation, on peut vouloir définir l'« équipollence » par :

$$(A,B) \sim (C,D) \Leftrightarrow \text{ABDC parallélogramme.}$$

Cette définition présente toutefois une difficulté lorsque A, B, C, D sont alignés : qu'est-ce au juste qu'un parallélogramme « aplati » ?

• On peut régler ce problème en remplaçant l'énoncé précédent par :

(A,B) ~ (D,C) ⇔ il existe E et F tels que ABFE & DCFE sont des parallélogrammes

• On peut aussi utiliser la définition suivante :

$$(A,B) \sim (C,D) \Leftrightarrow \text{[AD] et [BC] ont même milieu.}$$

– Le programme de 3[e] incite toutefois à introduire les vecteurs ***à partir de la translation***, non sans demander de lier cette définition avec celle qui se formule en termes de parallélogramme éventuellement aplati :

Compétences exigibles

Connaître et utiliser l'écriture vectorielle $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ pour exprimer que la translation qui transforme A en B transforme aussi C en D.

Lier cette écriture vectorielle au parallélogramme ABDC éventuellement aplati.

Commentaires

Cette rubrique prend en compte les acquis du cycle central sur les parallèles et sur la translation. Elle est orientée vers la reconnaissance, dans les couples (A,A'), (B,B'), (C,C')… de points homologues par une même translation, d'un même objet nommé vecteur. On écrira $\vec{u} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$…

• On posera donc :
(A,B) ~ (C,D) ⇔ la translation $t_{A\mapsto B}$ transforme C en D.
• Toutefois, le programme de 3[e] demande en outre d'établir l'équivalence de ce point de vue avec les points de vue précédemment évoqués :

« On mettra en évidence la caractérisation d'une égalité vectorielle $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ à l'aide des milieux de [AD] et [BC] :

Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors les segments [AD] et [BC] ont le même milieu.

Si les segments [AD] et [BC] ont le même milieu, alors on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. »

• En outre, il conviendra de justifier un point de vue en apparence plus « naïf », dont le même programme souligne l'importance :

« L'un des objectifs est que les élèves se représentent un vecteur à partir d'une direction, d'un sens et d'une longueur. »

– On a donc ici un ***premier problème à étudier***, Π_1 : problème de « mise en ordre déductif » dans le cadre de la TGD des différentes expressions envisageables de l'équipollence de deux « bipoints ».

– ***Supposant*** $\boldsymbol{\Pi_1}$ ***résolu***, désignons par #ABCD l'une quelconque des expressions utilisables pour définir l'équipollence de (A,B) et (C,D). Pour avancer à partir de là, supposons en outre ***que l'on a résolu le problème*** $\boldsymbol{\Pi_2}$ consistant à établir que l'on a :

$\vdash_{TGD}$ Si #ABCD alors #ACBD [V_1]

$\vdash_{TGD}$ Si #ABCD alors #CDAB [V_2]

$\vdash_{TGD}$ Si #ABCD et #CDEF alors #ABEF [V_3]

$\vdash_{TGD}$ Quels que soient les points A, B, C,
il existe un unique point D tel que #ABCD [V_4]

– Montrons alors que la relation d'équipollence est une relation d'***équivalence***.

• La relation est d'abord ***symétrique*** : d'après V_2, si (A,B) ~ (C,D), c'est-à-dire si #ABCD, alors #CDAB, soit (C,D) ~ (A,B).

• La relation est ***transitive*** : d'après V_3, si (A,B) ~ (C,D) et (C,D) ~ (E,F), c'est-à-dire si #ABCD et #CDEF, alors #ABEF, soit (A,B) ~ (E,F).

• La relation est ***réflexive*** : soit A et B deux points donnés, C un point quelconque, et soit alors D, d'après V_4, le point tel que #ABCD ; d'après V_2 on a #CDAB, en sorte que, d'après V_3, il vient enfin #ABAB, soit (A,B) ~ (A,B).

– Un ***vecteur*** peut dès lors être défini, formellement, comme une ***classe d'équivalence de couples de points***, la classe d'équivalence du couple (A,B) étant notée $\overrightarrow{AB}$. Si X désigne le plan, l'ensemble $\overrightarrow{X}$ des vecteurs vérifie : $\overrightarrow{X}$ = X/~. Cette définition « abstraite » doit évidemment être remplacée, en 3^e^ comme en 2^de^, par la définition « concrète » en termes de direction, sens et longueur : problème qu'on laisse ici de côté.

On voit ainsi que ce qui existe aujourd'hui en seconde est un condensé de ce qui se faisait antérieurement entre la classe de 4^e^ et la classe de 2^de^ : on introduit les translations, sans toutefois les étudier comme transformations du plan, pour pouvoir définir les vecteurs à l'aide des translations ; on fait le lien avec la caractérisation de « l'équipollence » en termes de parallélogramme ; puis on définit la somme de deux vecteurs et le produit d'un vecteur par un réel, le tout en liaison avec la géométrie plane repérée de façon à étudier des problèmes d'alignement, de parallélisme ou encore d'intersection de droites. En revanche le programme ne mentionne plus la caractérisation en termes de direction, sens et longueur. Il faut donc examiner plus en détail quel est l'usage de cette caractérisation et dans quelle mesure on peut s'en passer.

(À suivre)

Contraposée ou raisonnement par l'absurde ?

Comment introduire la propriété contraposée du théorème de Pythagore ? Avec une propriété ou un raisonnement par l'absurde ? (5^e^ & 4^e^, 6)

Voici ce qui figure dans le document d'accompagnement du programme du collège sur le raisonnement et la démonstration.

Raisonnement par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde est pratiqué par le professeur, comme forme plus simple d'un raisonnement par contraposée, par exemple pour démontrer la réciproque du théorème de Pythagore.

Si l'on considère un triangle ABC tel que AB = c, AC = b et BC = a, avec $a^2 = b^2 + c^2$, il s'agit de démontrer que le triangle est rectangle « en A ». Pour cela, on suppose qu'il ne l'est pas et on trace la droite D perpendiculaire à AB en A. Sur cette droite, il existe deux points C_1 et C_2 tels que $AC_1 = AC_2 = b$ et on a, d'après le théorème de Pythagore direct, $BC_1 = BC_2 = a = BC$. Le point C est donc à l'intersection des cercles C_1 de centre A et de rayon b et C_2 de centre B et de rayon a. Ces deux cercles se coupant en C_1 et C_2, le point C est l'un des deux, le triangle ABC est donc soit ABC_1 soit ABC_2 donc est rectangle en A, d'où la contradiction.

Pour les élèves, toujours dans la configuration de Pythagore, mais pour démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle, on utilise le raisonnement par l'absurde comme forme plus accessible d'un raisonnement par contraposée. Pour démontrer qu'un triangle ABC tel que $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$ n'est pas rectangle en A, il est plus facile d'exprimer la preuve sous la forme :
« Si ABC était rectangle en A, on aurait $AB^2 + AC^2 = BC^2$, ce qui est absurde, puisque l'on sait que $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$ ».

C'est donc ***la voie du raisonnement par l'absurde*** qui est à emprunter, et on ne parlera pas de « propriété contraposée » mais on mettra en œuvre un « raisonnement par contraposition ». Ce qui signifie que l'on posera le problème : un triangle est-il rectangle ? On calcule le carré du plus grand côté d'une part ; la somme des carrés des deux autres côtés d'autre part. Si il y a égalité, le triangle est rectangle d'après la réciproque du théorème de Pythagore ; s'il n'y a pas égalité, le théorème de Pythagore permet de conclure qu'il n'est pas rectangle (puisque s'il l'était, on aurait l'égalité).

Démonstration au collège

Doit-on prévoir une ou plusieurs séances avec les élèves pour se consacrer aux principes de la démonstration ou bien est-ce qu'on leur apprend au cours des activités ou des exercices ? (5^e^ & 4^e^, 6)
En classe de 4^e^, on doit étudier le déroulement d'une démonstration, doit-on en faire un chapitre (qui me semble abstrait) ou se servir d'un chapitre (ex : en géométrie) pour l'étudier ? (4^e^, 6)

Une recherche du mot « démonstration »dans le programme de 4^e^ amène les paragraphes suivants :

> Comparaison de deux nombres relatifs
>
> - Comparer deux nombres relatifs en écriture décimale ou fractionnaire, en particulier connaître et utiliser :
> - *l'équivalence entre* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *et ad = bc (b et d étant non nuls) ;*
> - *l'équivalence entre* $a \geq b$ *et* $a - b \geq 0$ *;*
> - *l'équivalence entre* $a > b$ *et* $a - b > 0$*.*
> - Utiliser le fait que des nombres relatifs de l'une des deux formes suivantes sont rangés dans le même ordre que a et b : $a + c$ et $b + c$; $a - c$ et $b - c$
>
> *Le fait que « comparer deux nombres est équivalent à chercher le signe de leur différence », intéressant notamment dans le calcul littéral, est dégagé.*
> *Ces propriétés sont l'occasion de réaliser des démonstrations dans le registre littéral.*

> Géométrie
> (...)
> Les activités de découverte, d'élaboration et de rédaction d'une démonstration sont de natures différentes et doivent faire l'objet d'une différenciation explicite. Le travail sur la caractérisation des figures usuelles est

poursuivi, en veillant à toujours la formuler à l'aide d'énoncés séparés.
(...)
3.1. Figures planes
Triangle : milieux et parallèles
(...)
Ces théorèmes peuvent être démontrés en utilisant la symétrie centrale et les propriétés caractéristiques du parallélogramme ou les aires, mais ces démonstrations ne sont pas exigibles dans le cadre du socle commun.

Le document d'accompagnement du programme du collège sur le raisonnement et la démonstration, quant à lui, note :

Raisonner logiquement, pratiquer la déduction, démontrer sont des capacités qui relèvent du socle commun de connaissances et de compétences et qui sont à acquérir progressivement, tout au long de la scolarité au collège.

C'est donc la mise en œuvre régulière du raisonnement déductif qui doit prévaloir, d'autant que, comme le souligne le même document, ce travail recèle une difficulté qu'il ne faut pas mésestimer :

Lorsqu'on demande une démonstration à un élève, on lui demande de s'engager au préalable dans une phase d'investigation pendant laquelle la démarche est essentiellement inductive. En revanche, une fois la preuve trouvée, seul le raisonnement déductif est utilisé dans la phase de mise en forme. Une des difficultés majeures pour le professeur va donc consister à faire vivre dans la classe des moments où il va faire pratiquer à ses élèves des raisonnements inductifs (notamment pour expliquer comment on trouve des résultats), tout en devant les leur refuser et leur apprendre à les remplacer par des raisonnements déductifs dans les démonstrations. En fait, pour l'élève, la difficulté est double :

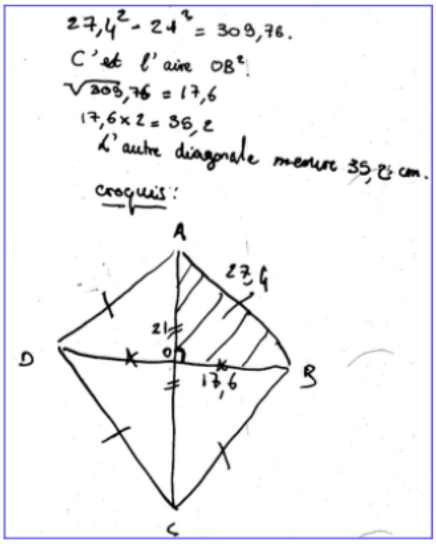
- il faut passer d'un raisonnement inductif à un raisonnement déductif pour établir la preuve ;
- il faut ensuite mettre en forme ce raisonnement déductif pour en faire une démonstration c'est- à-dire une preuve communicable.

Cette identification de deux grandes exigences du travail démonstratif est essentielle et on s'appliquera à la mettre en œuvre de manière systématique en laissant une certaine latitude aux élèves du point de vue de la formulation de la démonstration notamment, comme le développe le document mentionné, par exemple en commentant les spécimens suivants.

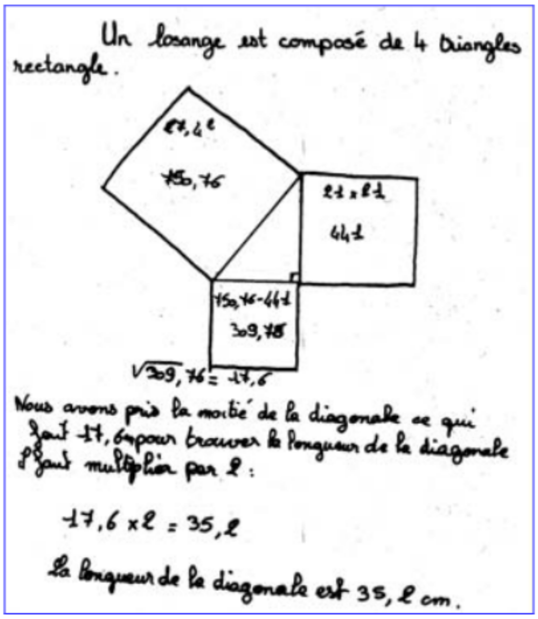
Exemple 6, à partir de la quatrième :

Le côté d'un losange mesure 27,4 cm et l'une de ses diagonales 42 cm. Quelle est la longueur de sa seconde diagonale ?

Solution 1



Solution 2



Ces deux rédactions originales constituent des écrits de communication aboutis, même si elles n'entrent pas dans le cadre des démonstrations normalisées. Elles sont, en tous cas, la preuve de raisonnements de grande qualité et méritent d'être valorisées.

Commentaires oraux

On ajoutera qu'il faut laisser le plus de place possible aux élèves du point de vue de la formulation et qu'il faut à la fois savoir travailler l'élucidation des difficultés mathématiques sans s'occuper de la formulation et, une fois les problèmes mathématiques résolus, travailler la mise en forme.

Nombres relatifs en classe de 5^e^

En classe de 5e, que doit-on faire avec les élèves en ce qui concerne l'addition et et la soustraction des nombres relatifs ? Difficulté à comprendre la lecture des programmes : ce qui est exigible ou non ? dans le socle commun ? (4e & 5e, 6)

D'un point de vue générique, le socle commun est ce qu'on ne doit pas ignorer en sortant du collège. Ce qu'il y a à travailler, c'est l'ensemble de ce qui figure au programme ; on attend cependant des élèves qu'ils maîtrisent « tous » le socle commun et on laisse un peu de temps pour maîtriser le reste : en général, une OM « hors socle » de l'année *n* est à maîtriser l'année *n*+1. C'est le cas de l'addition et de la soustraction des nombres relatifs : on n'attend pas que tous les élèves le maîtrisent à la fin de la classe de 5e.

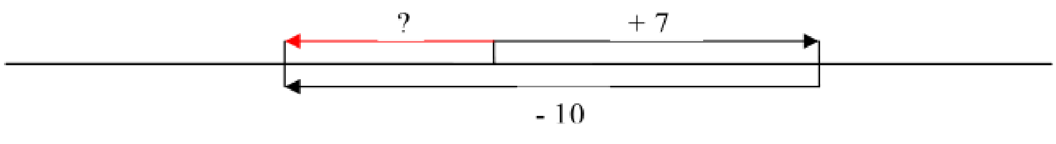
Voici ce qui figure à propos des nombres relatifs dans le programme de la classe de 5e.

2.3. Nombres relatifs entiers et décimaux : **sens et calculs** Notion de nombre relatif. **Ordre.*	- Utiliser la notion d'opposé. - **Ranger des nombres relatifs courants en écriture décimale.*	La notion de nombre relatif est introduite à partir d'un problème qui en montre la nécessité (par exemple pour rendre la soustraction toujours possible). Une relation est faite avec la possibilité de graduer entièrement la droite, puis de repérer le plan Les nombres utilisés sont aussi bien entiers que décimaux.
**Addition et soustraction de nombres relatifs.* [Thèmes de convergence]	- **Calculer la somme ou la différence de deux nombres relatifs.* - *Calculer, sur des exemples numériques, une expression dans laquelle interviennent uniquement les signes +, – et éventuellement des parenthèses.* - *Sur des exemples numériques, écrire en utilisant correctement des parenthèses, un programme de calcul portant sur des sommes ou des différences de nombres relatifs.*	Les règles de suppression de parenthèses à l'intérieur d'une somme algébrique sont étudiées en classe de quatrième.

Ce passage est éclairé par le document d'accompagnement du programme de collège à propos du calcul numérique, dont nous examinerons les pages 18, 19 et 20.

3.4 Les nombres relatifs

L'introduction des nombres relatifs, entiers et décimaux, en référence au repérage de points sur une droite graduée (température, échelle chronologique, altitude et profondeur), si elle s'appuie sur une fréquentation qu'en ont déjà les élèves, présente un inconvénient du point de vue de la définition de l'addition sur ces nombres. Pour contourner l'impossibilité de définir par exemple la somme de deux températures, on recourt au procédé suivant : la somme $-7 + 10 = 3$ est définie comme correspondant à une augmentation de 10° d'une température de $-7°$ relevée à un instant donné. Les termes de cette somme -7 et 10 ont des statuts différents : -7 correspond à un état alors que 10 traduit une variation. On définit ainsi une loi externe qui à un état (-7) fait correspondre un second état (3).
D'autres approches, qui réfèrent elles aussi à des situations concrètes, permettent d'introduire l'addition des relatifs : situations de gains et de pertes, déplacements sur une droite graduée. La somme de deux nombres relatifs est alors présentée comme la composition de deux transformations[9] : bilan des gains ou pertes, bilan de deux déplacements. La référence aux déplacements sur une droite graduée, en codant positivement un déplacement dans un sens et négativement un déplacement dans l'autre sens, ou à des situations de gains et de pertes fournit un support à la production raisonnée du calcul d'une somme. Ainsi un déplacement de 7 dans le sens positif suivi d'un déplacement de 10 dans le sens négatif correspond à un déplacement de 3 dans le sens négatif.



En référence aux situations concrètes qui sont susceptibles de se présenter, l'introduction des deux aspects de l'addition de deux relatifs est légitime. Toutefois, le recours à ces situations concrètes pour introduire l'addition des nombres relatifs présente des limites car il n'assure pas qu'un élève saura s'émanciper de tels contextes. Par ailleurs, ces supports ne permettent pas de donner du sens à la multiplication de deux relatifs.

C'est pourquoi, le programme de la classe de 5^{e} suggère un autre mode d'introduction des nombres relatifs, interne aux mathématiques. Il s'agit de construire de nouveaux nombres pour rendre la soustraction toujours possible. Comme cela est développé dans le document « Nombres au collège», un nombre négatif apparaît alors comme étant la différence entre 0 et un nombre positif. Ainsi $-7{,}1 = 0 - 7{,}1$ ($-7{,}1$ est appelé l'opposé de 7,1) et, par définition de la différence, $7{,}1 + (-7{,}1) = -7{,}1 + 7{,}1 = 0$ (les deux nombres sont dits opposés).

3.4.1 Addition

La question est posée d'étendre à ces nouveaux nombres l'addition connue sur les nombres positifs. Les règles d'addition sur les relatifs découlent de la volonté d'étendre à ces nouveaux nombres les propriétés bien connues, mais non formalisées, de l'addition (commutativité, associativité, 0 est élément neutre …) sur les nombres positifs.

A titre d'exemple, nous indiquons ici une approche possible des règles d'addition qui au-delà des propriétés de l'addition, sollicite la propriété de deux nombres opposés et la définition de la soustraction.

Calcul de $(-7) + 9$

$$(-7) + 9 = (-7) + 7 + 2 = 0 + 2 = 2$$

Calcul de $(-7) + (-4)$

$(-7) + 7 = 0$ et $(-4) + 4 = 0$

Donc $(-7) + 7 + (-4) + 4 = 0$

$(-7) + (-4) + 7 + 4 = 0$

$(-7) + (-4) + 11 = 0$

$(-7) + (-4) = 0 - 11$

$(-7) + (-4) = -11$

Calcul de $4 + (-9)$

$$4 + (-9) = 4 + (-4) + (-5) = 0 + (-5) = (-5)$$

Ces exemples étant génériques, les règles d'addition peuvent être formulées.

3.4.2 Soustraction

Si a et b désignent deux décimaux relatifs, montrons qu'il existe un nombre d qui ajouté à b, donne a.

Supposons qu'un tel nombre d existe. On a alors : $d + b = a$.

On en déduit que :

$$d + b + \text{opp}(b) = a + \text{opp}(b)$$

et donc : $d = a + \text{opp}(b)$.

Ainsi, le seul nombre qui peut convenir est $a + \text{opp}(b)$.

Il est ensuite facile de démontrer qu'il convient effectivement : $a + \text{opp}(b) + b = a + 0 = a$.

Finalement, quels que soient les deux nombres relatifs a et b, il existe un nombre relatif et un seul qui ajouté à a donne b. On le note encore $a - b$.

Ainsi, quels que soient les nombres relatifs a et b, $a - b = a + \text{opp}(b)$.

Soustraire un nombre, c'est ajouter son opposé.

3.4.3 Multiplication

Il est possible d'approcher la multiplication des relatifs en sollicitant le sens premier de la multiplication construit sur les naturels, celui d'une addition itérée : $2 \times (-3) = (-3) + (-3) = (-6)$. La multiplication sur les relatifs étant supposée conserver les propriétés connues pour les naturels : $2 \times (-3) = (-3) \times 2 = (-6)$. Il reste à définir le produit de deux négatifs. La construction d'un tableau comme celui-ci peut aider à conjecturer que $(-2) \times (-3) = 6$, chaque symétrie par rapport aux bandes grisées correspondant à un changement de signe.

−9	−6	−3	3	3	6	9
−6	−4	−2	2	2	4	**6**
−3	−2	−1	1	1	2	3
−3	−2	−1	×	1	2	3
			−1	−1	−2	−3
			−2	−2	−4	**−6**
			−3	−3	−6	−9

La validation se fait en recourant à la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition :
$(-2) \times(-3) + 2 \times(-3) = [(-2) + 2] \times(-3) = 0 \times(-3) = 0$
$(-2) \times(-3) + (-6) = 0$ d'où on déduit que $(-2) \times(-3) = \text{opp}(-6) = 6$
La multiplication sur les décimaux relatifs ne peut résulter que d'une construction mathématique dans laquelle on cherche à étendre cette opération aux nombres relatifs en faisant en sorte que les propriétés de la multiplication sur les décimaux positifs continuent à s'appliquer.
Toujours en utilisant la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, on commence par déterminer le produit de deux décimaux de signes différents comme étant l'opposé du produit de deux positifs, puis le produit de deux nombres négatifs comme étant l'opposé du produit de deux décimaux de signes différents. Le travail conduit sur des exemples génériques permet d'institutionnaliser les procédures de multiplication.
Après cette phase de construction, le calcul mental joue un rôle très important dans l'appropriation des règles de calcul construites pour l'addition et la multiplication en les faisant notamment fonctionner sur des entiers ou des décimaux très simples.

On remarquera que l'on a ainsi obtenu une réponse à la question suivante :

À propos de signe : pourquoi $(-1)(-1) = +1$? (Question d'un élève de 4^e^.) Que répondre ? (4^e^ & 3^e^, 3)

La réponse dépend bien évidemment de l'organisation mathématique construite et en particulier de la technologie. Si on a que (-1) est le nombre qui ajouté à 1 donne 0, ajouté au fait que l'on construit un nouvel ensemble de nombres pour lequel on veut que les propriétés des entiers soient conservées, alors on sait que (-1) ((-1)+1) d'une part vaut 0 puisque c'est le produit d'un nombre par 0 ; d'autre part vaut (-1)(-1) + (-1)(1). Comme, par « addition réitérée », (-1)(1)=(-1), on a que (-1)(-1) est le nombre qui ajouté à (-1)donne 0 : c'est donc 1.

C'est tout cela qui devra être construit avec la classe...

Et on notera que les archives du séminaire comportent une opérationnalisation de ces notations pour la mise en place d'une AER à ce propos à partir d'un problème de calcul sur les nombres positifs.

Doit-on détailler les techniques (dans l'institutionnalisation) dont les types de tâches sont évidents ou apparaissent clairement dans les éléments technologiques ? (4e & 3e, 5)

Il est certain que l'évidence ou la clarté sont relatifs et peuvent receler des chausses-trapes pour le débutant dans l'étude d'un thème. L'opérationalisation d'un élément technologique pour fabriquer une technique, même dans les cas « simples », suppose ainsi la mise en place de quelques éléments « concrets » qu'il est bon de préciser. Dans certains cas où ces éléments sont rapidement assimilés par les élèves, on peut les institutionnaliser dans le ou les bilan(s) d'étape de l'AER dans le but de ne pas alourdir la synthèse.

Un exemple travaillé en séance

J'ai corrigé mon premier DS. J'avais déjà fait un premier barème avant. J'ai obtenu une moyenne de classe autour de 6/20... J'ai donc refait mon barème pour relever la moyenne. J'ai obtenu une moyenne de 11/20. C'était une bonne idée ou non ? (2de, 6)

Que faire si l'on a donné un DM trop difficile à faire pour les élèves (c'est-à-dire que les copies acceptables sont rares) ? Faut-il les noter ? (2de, 6)

1. Il s'agit d'abord en ces circonstances d'analyser la raison de l'échec constaté. Il provient en général d'une organisation de l'étude déficiente : OM non motivée, techniques non institutionnalisées, types de tâches insuffisamment travaillés ou encore types de tâches proposées au contrôle qui ne font pas partie de l'OM qui a émergée, techniques qui ne comportent pas d'éytaoe de contrôle, notation qui ne prend pas suffisamment en compte les éléments positifs des réponses apportées...
Si le fait de relever le barème est une « bonne idée » pour ne pas décourager la classe, et ne pas faire porter sur son travail le poids de certaines erreurs didactiques du professeur, faire passer la moyenne de 6/20 à 11/20 semble de nature à « tromper » la classe, et le professeur, sur la maîtrise de l'OM évaluée.
2. Là encore, l'analyse des raisons de la « trop grande difficulté » du DM proposé doit être effectuée. Du point de vue de la notation, on valorisera autant que faire se peut les éléments positifs des réponses apportées et on pondérera en conséquence la note obtenue dans la moyenne pour qu'elle n'ait pas trop d'influence sur celle-ci.

Intégrer les TICE

Lors d'une séance informatique avec des élèves, par exemple l'utilisation du tableur : faut-il dire aux élèves comment utiliser le logiciel (comment écrire une formule, comment faire un diagramme) ou faut-il les laisser « bidouiller » et chercher eux-mêmes quelques minutes ? Personnellement, j'ai dit aux élèves comment écrire la formule permettant de remplir le tableau, sans être sûre qu'ils aient vraiment compris (pourront-ils le refaire ?) et j'ai laissé chercher la fonction « diagramme ». J'ai ensuite expliqué comment faire le diagramme. (4e et 3e, 6)

Lors de la première séance de TP informatique doit-on seulement faire une prise en main du logiciel ? Ou doit-on seulement leur expliquer les fonctions dont ils vont avoir besoin pour faire le TP en relation avec le chapitre en cours ? (2de, 6)

Le programme demande à ce que l'algorithmique soit intégrée dans chaque chapitre sans faire un vrai cours sur le sujet. Peut-on tout de même faire un cours d'introduction ? (2de, 6)

Comment a-t-on accès au portfolio pour mettre en ligne nos documents ? Quel genre de documents doit-on (peut-on) y mettre ? (2de, 5)

développement oral

2.2. Organisations mathématiques et reprise de l’étude

1. Sur la partie configuration du plan dans le programme de seconde, doit-on faire une synthèse sur les résultats (Thalès, Pythagore, symétrie, ...) ou bien doit-on considéré que cela est acquis ? (GBR, 2de, 5)

2. Au sujet des « configuration du plan », au programme de seconde, est-il conseillé d’en faire un chapitre à part entière ? Ou peut-on traiter ce thème à travers d’autres travaux tout au long de l’année (par exemple, fonctions ou repérages dans le plan) ? (MB, 2de, 4)

3. Comment ne pas faire de révisions en classe de 6^{e} vu que le programme n’est qu’une approximation de la classe de CM2 ? (AW, 6^{e}, 4)

Le temps a manqué pour étudier ces questions. Nous y reviendrons lors de la prochaine séance.

3. Encyclopédie du professeur de mathématiques

Nous n’avons pas eu le temps de travailler la notice sur le temps de l’étude.
Nous examinerons la semaine prochaine les aspects relatifs aux PER et à la reprise de l’étude.

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 7 : mardi 20 octobre 2009

Programme de la séance. 0. Questions de la semaine // 1. Observation & analyse // 2. Évaluation & développement // 2. Forum des questions // 3. Encyclopédie du professeur de mathématiques – la notice sur le temps de l'étude

0. Questions de la semaine

On note dans l'ensemble les mêmes thèmes que la semaine précédente :

Les devoirs, leur notation, leur élaboration ; la constitution des OM ; la gestion de la classe avec les aspects collectifs et individuels.

On peut souligner une progression dans la problématisation des questions rencontrées d'une partie de la promotion.

1. Observation & analyse : Faisons le point !

Comment observer et analyser une séance d'enseignement ?

L'observation prend principalement la forme d'un compte rendu de la séance dont on a vu un spécimen. C'est cela qu'il s'agit de rédiger à l'issue de stage de SPA pour l'une des séances réalisées par l'un des élèves professeurs.

L'analyse de la séance, ou plus précisément du compte rendu d'observation de la séance, est constituée de la détermination de l'***organisation mathématique*** étudiée et de l'***organisation didactique*** qui en permet l'étude, du moins ce qu'on en voit ou que l'on peut inférer avec une « certitude raisonnable ». À ces deux rubriques principales, on en ajoutera deux autres :
Structure et contenu de la séance, par laquelle on débutera l'analyse et qui décrira rapidement le contenu des épisodes présents dans la séance ainsi que la place de cette séance dans l'étude des mathématiques au programme de la classe ;
Gestion de la séance, qui clôturera l'analyse, et qui explicitera les décisions et les interventions du professeur dans la séance qui conditionne la survenue de tel scénario didactique.

L'analyse comportera donc les quatre rubriques suivantes :

Structure et contenu de la séance ;
Organisation mathématique ;
Organisation didactique ;

Gestion de la séance.

On rassemblera ci-dessous, en le mettant en forme, ce qui a émergé des six premières séances de séminaire à propos de la séance sur les médianes d'un triangle.

Structure et contenu de la séance

La séance observée participe de l'étude du domaine de la « Géométrie » en classe de 4e, et plus spécialement du secteur de la géométrie plane et du thème des médianes d'un triangle. [On citera le programme]
Elle comporte 5 épisodes de longueurs inégales.
Après une phase d'accueil pendant laquelle les élèves entrent en classe et P vérifie les élèves absents, le premier épisode voit P faire appel à la mémoire didactique de la classe afin de relancer l'étude. Le deuxième épisode, qui constitue plus de la moitié de la séance, sera consacré à une AER qui permettra de dégager le résultat suivant : le centre de gravité est situé aux deux tiers de chaque médiane en partant du sommet. Le troisième épisode verra l'enregistrement dans la synthèse du résultat précédent. Le quatrième épisode porte sur la résolution d'un exercice sur le même thème, qui fonctionnalise le résultat enjeu de l'étude pour déterminer le centre de gravité d'un triangle. Dans le cinquième et dernier épisode, enfin, P donne le travail à faire hors classe.

Organisation mathématique

Voici le type de tâches principal, T, qui est proposé à l'étude :

T : Sur une feuille où on a tracé un triangle ABC, le sommet C a été effacé et il ne reste qu'un côté [AB] et le centre de gravité, G ; construire à la règle et au compas le sommet C.

La technique relative au type de tâches T qui émerge dans la séance peut s'analyser de la façon suivante à partir du compte rendu :

τ : 1) on construit la médiane issue de C, qui est la droite passant par G et le milieu de [AB], C' ;
2) On place ensuite C de façon à ce que l'on ait 2C'G = GC.

La considération de la vidéo permet de préciser quelque peu cette technique : voici un compte rendu plus détaillé du travail effectué.

P envoie l'élève au tableau en lui demandant d'expliquer à la classe ce qu'elle fait. L'élève indique alors : « Eh bien, je prends la mesure AC', non... GC'... ça, quoi [en montrant le segment [GC'], je la rapporte une fois puis une deuxième fois. » P reprend alors la parole : « Très bien. Donc elle a utilisé la propriété qu'on vient de voir, puisqu'on a GC qui est égal à 2 fois GC'. On reporte deux fois la longueur GC' et on obtient ici un point C, qui est unique. »
Elle demande ensuite à l'élève de « mettre le point C en majuscule normale » (l'élève avait écrit une lettre « C » ronde) avant de reprendre : « Donc on doit tous obtenir ce même point C qui est sur la médiane qu'on avait tracée et avec la dimension... Voilà. Et maintenant tu peux finir le triangle puisqu'on a le point C, tu peux tracer [AC] et [BC], et on a réussi à reconstituer ce triangle ABC, en ayant juste un côté et le centre de gravité. »

L'analyse de la technique de construction peut donc être précisée de la façon suivante :
1) construire le milieu C' de [AB] ;

2) construire la demi-droite [C'G) ;
3) placer le point C1 de cette demi-droite tel que GC1 = C'G et le point C tel que C1C = C'G, les points C', G, C1 et C étant alignés dans cet ordre.

Une autre technique aurait pu émerger : elle consiste à placer le point M milieu de [AI] puis à tracer la parallèle à la médiane (IG) passant par M. En notant J le point d'intersection de cette droite avec la médiane (BG), on trace alors la droite (AJ). Celle-ci coupe la médiane (IG) au point C cherché.

Dans la séance observée, la technologie relative à [T / τ] peut s'exprimer de la façon suivante :

> θ : L'expérience montre que, lorsqu'on trace un triangle ainsi que ses médianes, le point de concours de celles-ci, G, le centre de gravité du triangle, se situe aux deux tiers de chaque médiane en partant du sommet.
>
> Elle repose sur les éléments technologiques suivants :

θ_γ. Le centre de gravité d'un triangle se situe aux deux tiers de chaque médiane en partant du sommet.

θ_μ. Les trois médianes d'un triangle sont concourantes en un point, le centre de gravité du triangle.

La propriété θ_μ est connue tandis que θ_γ est justifiée expérimentalement durant la séance à partir de deux spécimens de triangles fournis par le professeur.
On notera que c'est en fait un résultat intermédiaire, qui a émergé d'abord et qui se déduit facilement de θ_γ mais qui n'est pas institutionnalisé, qui permet de véritablement de produire la technique analysée : si M est un sommet du triangle et M' le pied de la médiane issue de ce sommet, le centre de gravité G du triangle est tel que MG = 2M'G.

On ajoutera aux éléments précédents la caractérisation des médianes d'un triangle comme droites issues d'un sommet et passant par le milieu du côté opposé à ce sommet, et le fait que le centre de gravité d'un triangle est intérieur à ce triangle.

On notera que la deuxième technique signalée repose principalement sur le théorème des milieux.

Dans la ***théorie*** mobilisée par le travail effectué lors de la séance observée, on peut signaler la présence d'un élément ***théorique*** notable :

> Θ : une expérience graphique qui met en évidence une certaine propriété géométrique « élémentaire » permet de conclure 1) que cette propriété est ***vraie*** dans l'espace sensible, et 2) que cette propriété est ***déductible*** dans la « théorie géométrique disponible », même si l'on ne dispose pas d'une déduction explicite.

Un autre élément théorique est le fait que par deux points passent une droite et une seule.

Un deuxième type de tâches apparaît dans le quatrième épisode ; il s'agit de type de tâche T' : déterminer le centre de gravité d'un triangle. Une technique, produite pour l'essentiel par θ_γ, est mise en œuvre dans cet épisode qui peut s'analyser comme suit :

Identifier une médiane du triangle. Mettre en évidence un point se situant aux 2/3 de cette médiane.

Organisation didactique

Une grande part de la séance est relative à une AER permettant de faire émerger l'OMP (organisation mathématique ponctuelle) relative à T. Elle voit donc la réalisation d'un moment de première rencontre, d'un moment exploratoire et d'un moment technologico-théorique que l'on analysera ci-dessous.

Moment de première rencontre

P donne le numéro et le titre de l'activité du jour. P fait lire l'énoncé par un élève ; la figure du problème est présente au tableau. Elle commente et explicite rapidement, et signale que le problème donné n'aura qu'une seule solution.

Moment exploratoire

Le moment exploratoire débute par la proposition d'un élève, qui donne le début d'un procédé de construction du point C. Le professeur prend l'initiative de faire formuler à un élève que le point G est intérieur au triangle. Il s'instaure un dialogue qui aboutit à la question : « peut-on construire les médianes ? ». P leur propose d'y réfléchir et les élèves commencent à chercher, essaient de tracer les médianes.

P fait passer un élève au tableau pour construire les médianes. Il intervient pour refaire effectuer la construction du milieu du segment [AB] que l'élève avait accomplie en mettant en œuvre une technique correcte mais maladroitement réalisée avec le compas. On cherche ensuite le point C.

La classe indique qu'il est sur la médiane mais se demande où. On voit donc émerger un nouveau problème : « Où se situe C sur la médiane passant par G et le milieu de [AB] ? ».

Une idée émerge, faire glisser la règle pour avoir une approximation de la solution. P ne laisse pas la classe explorer cette idée et annonce qu'il faudrait pouvoir savoir où se trouve le point G sur la médiane. Un élève propose « au milieu », et P prend la décision de ne pas examiner cette proposition.

Un deuxième épisode du moment exploratoire a lieu une fois que la propriété donnant la position du centre de gravité sur les médianes a émergé. C'est P qui en prend l'initiative en affirmant que « maintenant, je pense qu'on va pouvoir arriver à trouver le point C ». Les élèves travaillent pendant que le professeur passe dans les rangs, puis un élève est invité à venir au tableau pour mettre en œuvre la technique élaborée.

Moment technologico-théorique

C'est P qui initie le moment technologico-théorique en orientant les élèves sur la connaissance de la position du point G. Deux exemples de triangles figurent sur la feuille d'activité et ce sont ces deux spécimens qui permettront de faire surgir expérimentalement le résultat cherché. P apporte de l'aide en traçant une figure sur le quadrillage du tableau et en rappelant également comment placer le milieu d'un segment avec le quadrillage. Après 3 minutes pendant lesquelles les élèves tracent les médianes et mesurent les longueurs des segments, P trace les médianes au tableau et souligne le fait que G est sur le quadrillage. P sollicite la classe pour apporter des réponses au problème donné (position de G). Une première réponse concernant AG et A'G est notée (AG = 2A'G) puis P oriente l'attention sur BG. La relation avec BG est trouvée et P écrit les trois relations au tableau. Le deuxième exemple ne sera pas examiné mais P demande confirmation à la classe quant à la similitude des résultats ; la classe confirme. À l'aide de ces trois relations, P met l'accent sur le fait que G semble avoir toujours la même position et demande aux élèves de trouver une relation entre AG et AA'. Une élève répond correctement ($AG= \frac{2}{3}$ AA') et P écrit les trois nouvelles relations au tableau. Ensuite P demande aux élèves de formuler une conjecture ; P écrit la conjecture énoncée par un élève (avec son aide) et relance un épisode du moment exploratoire en leur faisant comprendre que cette conjecture aura une utilité pour le problème initial.

On peut également noter dans cette séance la présence d'un ***moment d'institutionnalisation*** relative à cette OMP et réalisé en deux épisodes : le premier, dans lequel la conjecture est formulée et notée dans la réalisation de l'AER ; le second, initié par P, celui-ci demandant aux élèves de ranger la feuille d'activité dans la partie activités du classeur et signalant que « on passe au cours ». C'est P qui indique où ils en étaient et écrit la première partie de la propriété sur la position de G en attendant que les élèves la terminent.

Le quatrième épisode voit l'émergence de la praxéologie relative au type de tâches T'. Il y a donc un épisode du moment de première rencontre et un épisode du moment exploratoire qui se réalise à travers la résolution (incomplète, puisqu'elle est à terminer hors classe) de l'exercice proposé.

Gestion de la séance.
On notera le choix fait par P à plusieurs reprises dans la séance observée de ne pas examiner la proposition d'un élève : d'abord dans le moment exploratoire, lorsque l'élève propose une technique de construction de C en « faisant glisser la règle » ; ensuite dans le moment technologico-théorique lorsqu'un élève propose le milieu comme position du centre de gravité sur les médianes.

On peut remarquer que ce choix est sans doute conditionné par le fait d'avoir préparé une feuille d'activité « à trous ».

2. Évaluation & développement

Il s'agit ici de juger positivement ou négativement les éléments que l'on a mis en lumière dans l'analyse (évaluation), puis de proposer des voies d'amélioration des points jugés négativement (développement). On notera que dans le mémoire, on choisira un des points négatifs, le principal, et que c'est celui-ci que l'on développera et qui constituera le « sujet » du mémoire.

Quand aura-t-on les sujets de mémoire ? (AW, 6e, 7)

On aura donc les sujets du mémoire quand une observation aura été choisie et que l'analyse et l'évaluation auront été effectuées, soit généralement à la fin du mois de janvier.

Nous débuterons ici le travail évaluatif.

Nous avons signalé, au moins oralement au cours du travail, que l'un des problèmes posés par la séance est le fait que ce n'est pas l'étude du problème par les élèves qui fait émerger l'élément technologique clé, θ_γ, mais que cela survient après une rupture provoquée par le professeur, ce point étant jugé négatif parce qu'il nuit au *topos* des élèves. Mais on ne sait pas encore véritablement si ce point est lié au problème considéré ou s'il s'agit d'un problème de la direction d'étude de P. Il faudrait prolonger un peu l'analyse, ce que nous ferons lors d'une prochaine séance.

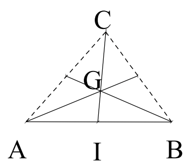
Topos
Les types de tâches d'étude sont des types de tâches coopératifs : ils comprennent un ***rôle*** dévolu au ***professeur*** et un ***rôle*** dévolu à l'***élève.*** L'endroit, le lieu, où chacun d'entre eux intervient en autonomie est nommé le ***topos.*** On pourra dire ainsi que la correction des copies fait ordinairement partie du *topos* du professeur ou encore que, lorsque le professeur demande aux élèves de chercher un problème, cette recherche fait partie du *topos* de l'élève. Un grand problème de la fabrication des organisations de l'étude est d'arriver à ménager suffisamment de *topos* aux élèves, et que ceux-ci arrivent effectivement à l'occuper : nous y travailleront lors des prochaines séances de Séminaire.

Nous avons également signalé qu'une autre technique aurait pu émerger, si du moins le théorème des milieux faisait partie de la TGD de la classe. L'élève professeur qui a signalé cette technique jugeait dès lors l'activité « négativement », puisqu'elle était susceptible de ne pas conduire à l'émergence de l'OMP visée. On avait à examiner, pour cette semaine la possibilité que cette technique émerge effectivement, en se basant sur l'hypothèse que le théorème des milieux fait partie de la TGD de la classe.

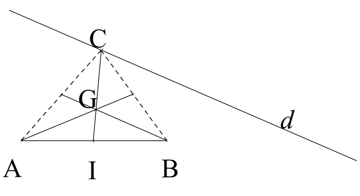
Pour avancer sur ce point, on examinera le scénario fictif suivant, extrait des archives du Séminaire ainsi que les commentaires qui l'accompagnaient :

La classe étudie le problème suivant : on a effacé le point C d'un triangle ABC dont on avait marqué le centre de gravité G ; comment retrouver le point C à partir de ce qui reste, c'est-à-dire A, B et G ?

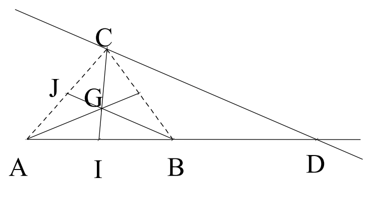
P : « Comment trouver le point C ? Kévin, tu as une idée ? » Kévin : « Comme intersection de deux droites… » P : « D'accord. Mais lesquelles ? » Silence. Farida : « On peut prendre (IG). » P. « Exact. Et puis ? Quelle autre droite ? Comment on détermine une droite ? » Ricardo : « Ben, par deux points distincts… » P. « Oui. Et puis ? » Nabil : « Comme parallèle à une droite donnée passant par un point donné. » P. « Oui. Mais quel point ? Et parallèle à quelle droite ? Ici ?… » Silence. P relance : « Bon, on a déjà vu ça. Qu'est-ce qu'il faut faire dans ce cas ? Si on est bloqués ? Si on ne voit pas ? » Sarah lève la main : « On fait par analyse-synthèse. » P. « Ce qui veut dire ? » Sarah : « On suppose le problème résolu, on regarde la figure. » P. « Bon, regardons ! » Elle trace rapidement un schéma de figure au tableau. Je mets en trait plein ce qu'on connaît. »



P. « Alors, cette droite passant par C qui serait parallèle à une droite de la figure ? Ça pourrait être quoi ? » Silence. P. « Regardons les droites de la figure… Laissons de côté (IG), puisque, ça, c'est la première droite, si on suit la proposition de Farida. » Brice : « Ça peut pas être (AC) ou (BC), puisqu'on les connaît pas. » P. « En effet. Donc ça nous laisse trois droites. À savoir ? » Anaïs : « Ben, y a (AB), mais il faudrait avoir un point autre que C. » P. « Oui, et ça, apparemment, on l'a pas ! » Silence. P. « Alors ? » Elle avise un élève qui lève le doigt : « Oui, Belkacem ? » Belkacem : « Il reste plus que (AG) et (BG). » P. « Oui, et alors ? Qu'est-ce qu'on peut faire ? » Belkacem : « Ben on trace la parallèle par exemple à (BG). » P. « Oui, voilà… » Elle complète son dessin.



P. « Voilà. J'ai tracé la parallèle *d* à (BG) passant par C. Le problème, c'est qu'on n'a pas le point C ! Quelle question doit-on se poser alors ? » Lucas : « Si on connaît un point de la droite *d*, à part C. » P. « Vous êtes d'accord ? Qui a une idée ? » Farida : « Ça peut être le point d'intersection avec une droite connue. Ça veut dire (AB). Ou (AG)… » P. « Oui. Pas avec (BG) bien sûr ! Et alors ? » Kévin : « Madame, vous pouvez pas marquer l'intersection de *d* avec (AB) ? » P s'exécute.

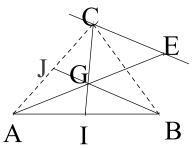


P. « Pourquoi ? Tu as vu quelque chose, Kévin ? » Kévin : « Oui, la droite des milieux. Dans… ACD. » P. « Explicite. » Kévin : « Dans le triangle ACD, J est le milieu de [AC] et (JB) est parallèle à (CD) ; donc B est le milieu de [AD]. » Une élève se manifeste : « Madame, je sais ! Je sais ! » P. « Oui, Manon, qu'est-ce que tu veux dire ? » Manon : « On prend D symétrique de A par rapport à B ! » P. « Oui, et alors ? » Manon : « Et après on trace la parallèle à (BG) passant par D. Et on a C. » P. « On dirait en effet que ça marche… Bon alors écoutez-moi. On va reprendre ça tous ensemble d'abord. Mais après, chacun va rédiger une mise en forme de la construction de C que, apparemment, nous venons de trouver. Sur une feuille que vous me remettrez. Je veux savoir où vous en êtes… Alors, qui peut reprendre ? »

Cette reconstitution imaginaire montre que la création endogène spontanée (et non dirigée par P) du procédé de construction évoqué dans la question est sans doute très peu probable ! Notons, en passant, que d'autres histoires mathématiques de classe, voisines, auraient pu se construire. Reprenons ainsi le compte rendu fictif précédent.

……

P. « Voilà. J'ai tracé la parallèle *d* à (BG) passant par C. Le problème, c'est qu'on n'a pas le point C ! Quelle question doit-on se poser alors ? » Lucas : « Si on connaît un point de la droite *d*, à part C. » P. « Vous êtes d'accord ? Qui a une idée ? » Farida : « Ça peut être le point d'intersection avec une droite connue. Ça veut dire (AB). Ou (AG)… » P. « Oui. Pas avec (BG) bien sûr ! Et alors ? » Kévin : « Madame, vous pouvez pas marquer l'intersection de *d* avec (AG) ? » P s'exécute.



P. « Pourquoi ? Tu as vu quelque chose, Kévin ? » Kévin : « Oui, la droite des milieux. Dans… ACE. » P. « Explicite. » Kévin : « Dans le triangle ACE, J est le milieu de [AC] et (JG) est parallèle à (CE) ; donc G est le milieu de [AE]. » Une élève se manifeste : « Madame, je sais ! Je sais ! » P. « Oui, Manon, qu'est-ce que tu veux dire ? » Manon : « On prend E symétrique de A par rapport à G ! » P. « Oui, et alors ? » Manon : « Et après on trace la parallèle à (BG) passant par E. Et on a C. » P. « On dirait en effet que ça marche… »

S'il est peu probable que, pendant le temps de la recherche en classe, un élève parvienne seul, par son activité propre, à l'une des solutions alternatives évoquées ici, il est certes possible qu'un élève l'*apporte* toute faite de l'extérieur de la classe, parce qu'on la lui aura montrée dans un cours particulier, parce qu'il l'aura trouvée toute faite dans un livre, etc. À ce moment-là devra s'enclencher la « dialectique des médias et des milieux », le « milieu » approprié étant ici, soit la théorie géométrique disponible (si, du moins, elle contient les théorèmes des milieux), soit l'expérimentation graphique (sur papier blanc ou sur papier quadrillé) ou l'expérimentation numérico-graphique (à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique), soit les deux. Mais ce qui manquera, du point de vue des apprentissages, aura été, pour cette solution-là, le processus collectif et dirigé d'étude et de recherche – tel par exemple qu'on l'a imaginé dans le compte rendu fictif précédent.

Plusieurs observations sont encore essentielles. Qu'une telle solution ait été produite en classe par un ou des élèves ou qu'elle ait été apportée en classe par l'un d'eux (si l'AER s'est étendue sur deux séances successives par exemple), l'attention à lui porter, en règle générale indubitable, *n'aura pas de priorité* par rapport à l'histoire collective en cours de construction dans la classe. Le professeur prendra acte de la solution proposée, en en différant toutefois l'étude collective – qui pourra aussi bien se faire dans le cadre d'un DM, par exemple, dès lors du moins que les conditions didactiques requises par ce dispositif seront satisfaites.

Pour terminer cette rubrique, que nous reprendrons à la rentrée, on remarquera que l'analyse du scénario précédent permet de mettre en évidence qu'une technique pour faire produire à la classe une OM nécessite que le professeur ait prévu une arborescence de ***questions*** que l'on dira ***cruciales***, qui sont ici pour l'essentiel :

« Comment trouver le point C ? Quelle autre droite ? Comment on détermine une droite ? Mais quel point ? Et parallèle à quelle droite ? Qu'est-ce qu'il faut faire dans ce cas ? Si on est bloqués ? Si on ne voit pas ? Alors, cette droite passant par C qui serait parallèle à une droite de la figure ? Ça pourrait être quoi ? Donc ça nous laisse trois droites. À savoir ?

Développé oralement.

2. Forum des questions

Retour sur le raisonnement par contraposition

Développé oralement : on a insisté sur le fait, pas bien entendu par certains lors de la séance précédente, que la contraposée n'avait pas à figurer dans la TGD des classes de collège ou de lycée mais qu'il s'agissait de mobiliser la propriété directe dans un « raisonnement par l'absurde » qui est assez naturel pour les élèves.

Observer une classe – la « correction » d'exercices

1. Je ne parviens pas toujours à savoir quoi et comment observer une séance de cours dans la classe d'un autre professeur. Beaucoup de professeurs par exemple, ne font pas d'activités, et c'est ce qui m'intéresserait plus particulièrement à observer... Car observer des séances de correction d'exercices, c'est lassant.(2^{de}, 7) 2. Que peut-on observer d'intéressant sur l'OD et l'OM lorsqu'on assiste à une séance de correction d'exercices ? (2^{de}, 7)

On notera d'abord que les questions sont posées en termes de dispositifs d'étude, mais pas en termes de fonctions : or ce sont ces dernières qu'il importe d'étudier. Comme nous l'avons déjà signalé une fois au moins, il n'y a pas de bijection entre structures et fonctions : « la correction d'un exercice au tableau par un élève » par exemple est un dispositif dont les fonctions didactiques vont varier beaucoup selon l'organisation de l'étude mise en place par le professeur et reçue par les élèves.

→ Si le travail demandé relève bien de la catégorie des ***exercices*** relativement à une praxéologie mathématique ponctuelle $[T/\tau/\theta/\Theta]$ qui s'est construite dans les temps précédents, le rôle principal d'une telle phase de correction est de contribuer à l'***institutionnalisation*** de $[T/\tau/\theta/\Theta]$ (en lui apportant, le cas échéant, des retouches, des additifs, des correctifs, etc.), mais cela, trop souvent, sans que ce travail trouve un écho approprié dans des traces écrites de ***synthèse*** (le « corrigé », quand il existe, apparaissant plutôt comme l'équivalent d'un bilan d'AER, et non comme le texte d'une synthèse véritable). Dans ce cas, on peut en déduire la praxéologie mathématique mise en place, en portant une attention à la technique qui est mise en œuvre, et notamment du point de vue des ingrédients qui ne sont pas institutionnalisés par écrit mais qui posent problème aux élèves – ou du moins à certains d'entre eux.

→ En nombre de cas, pourtant, il conviendrait de regarder la correction comme une phase d’un travail qui, selon l’état d’avancement de l’étude, relève plutôt du moment de la création de la ***technique*** ou de son environnement ***technologico-théorique***, voire de… ***l’exploration d’un type de problèmes*** avec lequel la classe est encore peu familière ! Dans cette situation, la correction est, à l’instar de la correction faite en classe d’un travail fait en classe pendant une telle activité, partie intégrante d’une AER ici souvent « introuvable »… On pourra examiner dans ce cas par exemple, outre l’OM enjeu de l’étude, si le problème proposé est un bon candidat à être le support d’une AER.

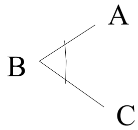
Dans les deux situations, on pourra également étudier la manière dont le professeur gère le collectif ; l’interaction entre le travail fait au tableau et l’avancée collective de l’étude ; etc. de manière à pouvoir obtenir des matériaux de réponse à des questions du type :

Comment organiser une séance d’exercices (correction) ? Lorsqu’un élève passe au tableau pour présenter sa solution, les autres ont du mal à rester concentrés... (5e, 7)

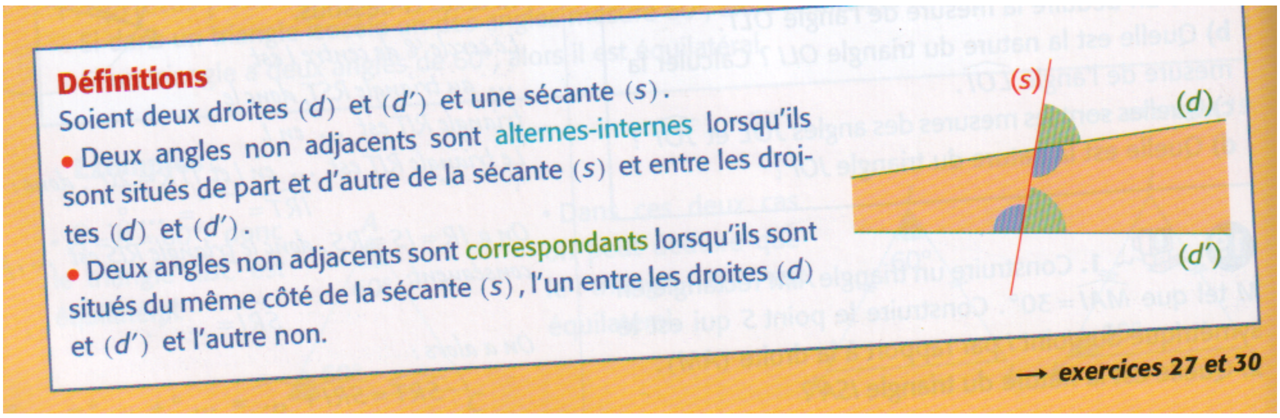
L’observation des débutants montre que, dans la plupart des cas, le professeur reste au tableau avec l’élève et associe peu la classe au travail de l’OM qu’il s’agit d’effectuer ou encore à son émergence. C’est cela qu’il faudra s’efforcer d’atteindre, et l’analyse de la manière dont un professeur chevronné dirige l’étude lors des épisodes de correction peut aider à progresser.

Les angles en 5e

En 5e, pour les angles alternes-internes et correspondants les ouvrages les définissent dans le cas où les droites ne sont pas parallèles mais cela me pose deux problèmes : comment définir la sécante car les 3 droites se coupent ? ces angles n’ont rien de particulier et ne servent pas si les droites ne sont pas parallèles ?(TL, 5e, 6)

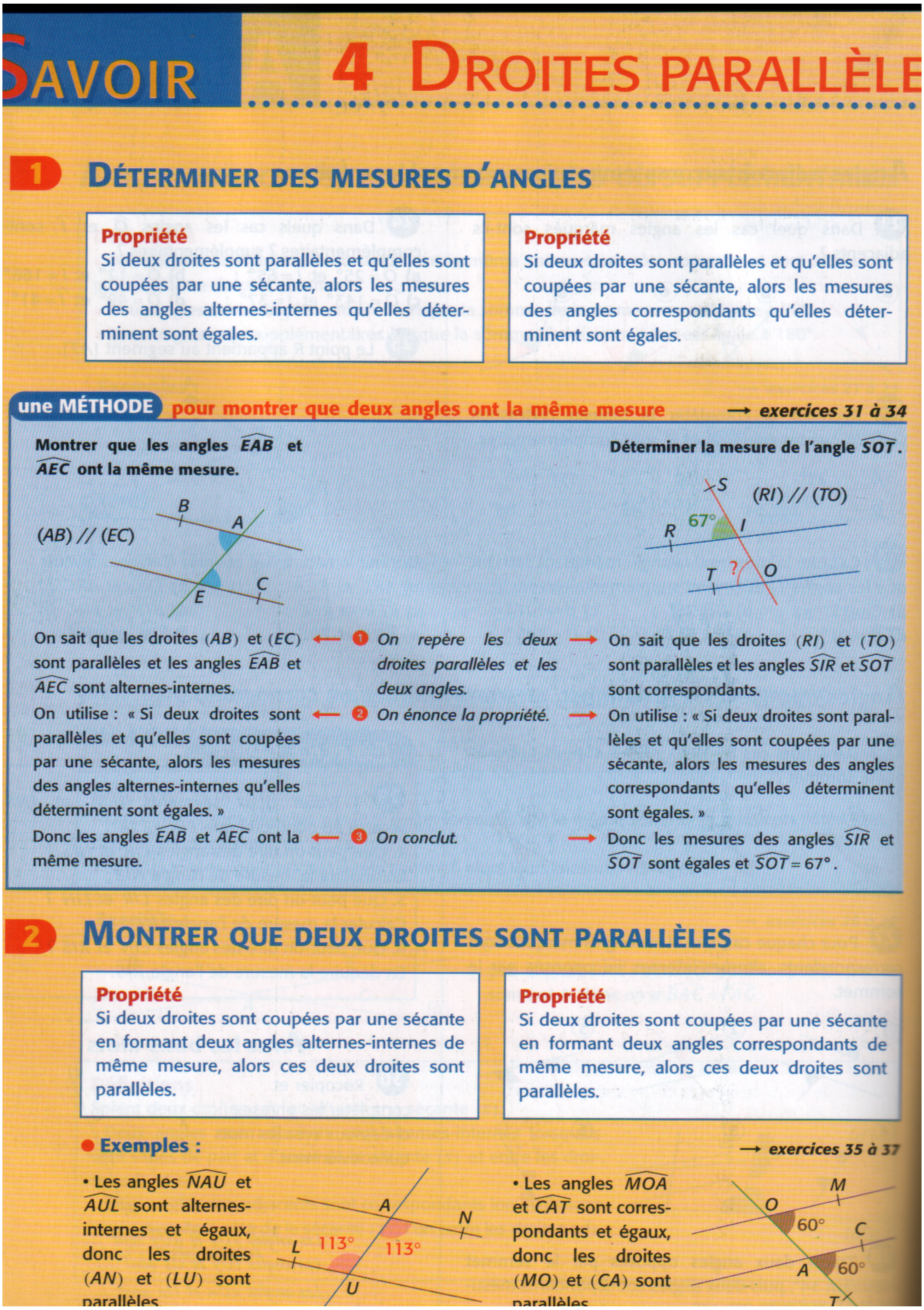
Comment différencier la notation pour les angles et la notation pour la mesure de l’angle car on note $\widehat{ABC}$ l’angle  mais on note aussi aussi $\widehat{ABC}$ = 36°. (TL, 5e, 7)

1. On trouvera ci-dessous un extrait d’un ouvrage pour la classe de 5e qui correspond à la situation décrite dans la première question.


Définitions
Soient deux droites (d) et (d') et une sécante (s).
• Deux angles non adjacents sont alternes-internes lorsqu’ils sont situés de part et d’autre de la sécante (s) et entre les droites (d) et (d').
• Deux angles non adjacents sont correspondants lorsqu’ils sont situés du même côté de la sécante (s), l’un entre les droites (d) et (d') et l’autre non.

→ exercices 27 et 30

Le problème posé trouve sa solution dès lors que l'on examine à quoi servent les angles alternes-internes. La considération de l'ouvrage précédent éclaire le propos :



SAVOIR

4 DROITES PARALLÈLE

1 DÉTERMINER DES MESURES D'ANGLES

Propriété
Si deux droites sont parallèles et qu'elles sont coupées par une sécante, alors les mesures des angles alternes-internes qu'elles déterminent sont égales.

Propriété
Si deux droites sont parallèles et qu'elles sont coupées par une sécante, alors les mesures des angles correspondants qu'elles déterminent sont égales.

une MÉTHODE pour montrer que deux angles ont la même mesure → *exercices 31 à 34*

Montrer que les angles $\widehat{EAB}$ et $\widehat{AEC}$ ont la même mesure.

Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{SOT}$.

On sait que les droites (AB) et (EC) sont parallèles et les angles $\widehat{EAB}$ et $\widehat{AEC}$ sont alternes-internes. ← ❶ *On repère les deux droites parallèles et les deux angles.* → On sait que les droites (RI) et (TO) sont parallèles et les angles $\widehat{SIR}$ et $\widehat{SOT}$ sont correspondants.

On utilise : « Si deux droites sont parallèles et qu'elles sont coupées par une sécante, alors les mesures des angles alternes-internes qu'elles déterminent sont égales. » ← ❷ *On énonce la propriété.* → On utilise : « Si deux droites sont parallèles et qu'elles sont coupées par une sécante, alors les mesures des angles correspondants qu'elles déterminent sont égales. »

Donc les angles $\widehat{EAB}$ et $\widehat{AEC}$ ont la même mesure. ← ❸ *On conclut.* → Donc les mesures des angles $\widehat{SIR}$ et $\widehat{SOT}$ sont égales et $\widehat{SOT} = 67°$.

2 MONTRER QUE DEUX DROITES SONT PARALLÈLES

Propriété
Si deux droites sont coupées par une sécante en formant deux angles alternes-internes de même mesure, alors ces deux droites sont parallèles.

Propriété
Si deux droites sont coupées par une sécante en formant deux angles correspondants de même mesure, alors ces deux droites sont parallèles.

● Exemples : → *exercices 35 à 37*

• Les angles $\widehat{NAU}$ et $\widehat{AUL}$ sont alternes-internes et égaux, donc les droites (AN) et (LU) sont parallèles.

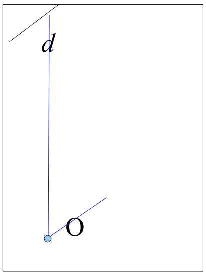
• Les angles $\widehat{MOA}$ et $\widehat{CAT}$ sont correspondants et égaux, donc les droites (MO) et (CA) sont parallèles.

D'un côté, lorsque les droites sont parallèles, ils permettent d'obtenir des égalités d'angles qui peuvent s'avérer utiles dans l'étude d'une configuration (type de tâches : déterminer un angle ») ; de l'autre, leur égalité permet de montrer que deux droites sont parallèles. Dans le cadre de cette deuxième situation, il faut pouvoir parler d'une droite sécante à deux droites qui ne sont pas parallèles a priori... D'où la nécessité de définir les angles alternes internes dans la situation de deux droites, non parallèles, coupées par une sécante.

À propos de cette question de la définition des angles alternes-internes, et du problème de la profession qu'elle constitue, on pourra consulter l'article de Gisèle Cirade dans la revue *petit x* (n° 76, année 2008) dont nous reproduisons ci-dessous le résumé.

Sur le chemin qui conduit des mathématiques à enseigner aux mathématiques pour l'enseignement, les professeurs stagiaires sont confrontés à des difficultés que la formation dispensée à l'IUFM vise à permettre de problématiser et de surmonter. Dans le cas étudié ici « la caractérisation du parallélisme à l'aide des angles alternes-internes », l'analyse de l'évolution curriculaire de la notion à enseigner permet de mettre en évidence un « problème de la profession », qui doit donc, à ce titre, recevoir une solution collective.

On notera encore que, du point de vue de l'émergence de l'OM autour des angles alternes-internes, il faut partir d'un problème qui permette de faire émerger cette notion et l'une des deux propriétés que nous avons vu mentionnées dans l'ouvrage cité plus haut. Le PER « Construire un élément d'une configuration effacé ou inaccessible », dont nous avons vu des ingrédients précédemment à travers la situation de la construction du point C dans la séance sur le centre de gravité ou encore la construction de la partie visible d'un parallélogramme dont un sommet est hors de la feuille, permet de fournir une réponse comme le suggère la figure suivante :



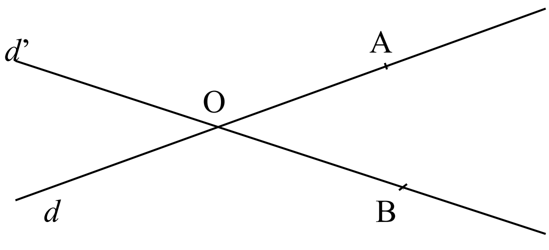
On pourra demander par exemple de construire à la règle et à l'équerre un parallélogramme de sommet O dont un côté soit porté par la droite *d*.

2. À propos de la notation des angles et de leur mesure, on étudiera le développement suivant, extrait des notes du séminaire 2002-2003. (Non étudié en séance. On le reprendra rapidement lors de la prochaine séance du séminaire.)

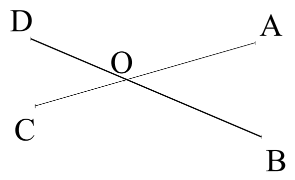
Quelle notation exiger pour les mesures d'angles ? (4^e, 10)

Matériaux pour une réponse

1. Sur la figure ci-après, les droites sécantes *d* et *d*' déterminent quatre ***secteurs angulaires***.



Le secteur angulaire qu'on peut noter par exemple (pourquoi pas ?) ⟨[OA), [OB)⟩ est une ***partie du plan***, qui s'écrit encore $d'_A \cap d_B$, où d'_A est le demi-plan fermé déterminé par *d'* et contenant A et d_B le demi-plan fermé déterminé par *d* et contenant B. En revanche l'angle $\widehat{AOB}$ désigne une ***grandeur*** (d'un genre particulier !) : c'est l'***angle*** du ***secteur angulaire*** ⟨[OA), [OB)⟩, comme on parle de la ***longueur*** ℓ d'un ***segment*** [AB]. C'est ce qu'on reconnaît implicitement quand on écrit – selon l'usage – une égalité telle



$$\widehat{AOB} = \widehat{COD}$$

Celle-ci dénote en effet l'égalité de deux angles, non l'identité de deux secteurs angulaires : ici, les angles sont égaux – sont une seule et même entité – tandis que les secteurs angulaires sont deux régions du plan qui n'ont en commun que le point O. De la même façon que toutes les longueurs mesurées en kilomètres par le nombre 6 (par exemple) sont ***égales***, c'est-à-dire sont ***une seule et même longueur***, notée 6 km, de même tous les secteurs angulaires dont l'angle est mesuré en ***degrés*** par le nombre 37 sont notés 37 ° : on aura ainsi : $\widehat{AOB} = \widehat{COD} \approx$ 37 °.

2. Seul le ***degré*** (décimal) est utilisé au collège. En 2^{de} s'introduit le ***radian***, dont la notation actuelle est rad. Un angle de 60 ° est ainsi un angle de $\frac{\pi}{3}$ rad, soit environ 1,05 radian ; on a l'égalité : 60 ° = $\frac{\pi}{3}$ rad. Si traditionnel soit-il, l'oubli de l'unité d'angle a des conséquences fâcheuses, comme le montre cet extrait d'un compte rendu d'observation d'une séance en classe de seconde :

> P reporte au tableau les indications de la feuille de travail, puis, en indiquant sans autre façon que « la notation, c'est radian », complète rapidement :
>
> $$35\ ° = \frac{7\pi}{36} \text{ rad}$$
> $$60\ ° = 2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3}$$
> $$110\ ° = \frac{11}{18}\pi$$
>
> Elle rajoute alors la notation rad, oubliée dans les deux égalités précédentes, puis continue :
>
> $$90\ ° = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$
>
> Cela fait, elle enchaîne aussitôt : « Donc vous prenez votre cours. »

3. Sans entrer ici dans toute la complexité mathématique du problème de la mesure des angles, on peut rappeler quelques éléments ***essentiels*** que doit mettre en œuvre tout enseignement élémentaire de ce sujet.

• Pour mesurer un angle, l'idée de base est de mesurer l'arc qu'il intercepte sur un cercle de rayon R centré en son sommet.

• Cette mesure est *a priori* mal définie, puisqu'elle dépend du rayon R. Pour cette raison, on choisit une unité u de mesure ***des arcs*** qui soit proportionnelle au rayon R, et donc à la longueur d'un cercle de rayon R.

• Si l'on prend pour unité u la longueur d'un arc égal à la n-ième partie du cercle, on a $u = \frac{2\pi R}{n}\ell$, où ℓ est l'unité de longueur choisie dans le plan (centimètre, etc.). L'angle correspondant est dit alors d'un ***degré*** si $n = 360$, d'un ***grade*** si $n = 400$, etc. Ainsi, pour $n = 360$, un angle interceptant un arc dont la longueur vaut les $\frac{3}{8}$ de la longueur du cercle, soit un arc de longueur $\frac{3}{8}u = 0{,}375u$, est un angle de 135 degrés (noté 135 °).

• Si l'on prend pour unité u la longueur du cercle, c'est-à-dire si $n = 1$, on a $u = 2\pi R\ell$. L'angle correspondant est dit alors d'un ***tour***. Ainsi un angle interceptant un arc dont la longueur vaut les $\frac{3}{8}$ de la longueur du cercle, soit un arc de longueur $\frac{3}{8}u = 0{,}375u$, est alors un angle de 0,375 tour (ou de trois huitièmes de tour).

• Si l'on prend pour unité u la longueur d'un arc ayant même longueur que le rayon R du cercle, on a $u = R\ell$. L'angle correspondant est dit alors d'un ***radian*** (du latin *radius*, rayon). Ainsi un angle interceptant un arc dont la longueur vaut les $\frac{3}{8}$ de la longueur du cercle, soit un arc de longueur $\frac{3}{8}(2\pi\ u) = 0{,}75\pi\ u$ est alors un angle de 0,75π radians, ou $\frac{3\pi}{4}$ radians (noté 0,75π rad, etc.).

• Les conversions de mesures peuvent se faire par un calcul ***qui rend inutile tout tableau de proportionnalité***, à partir des égalités de base : 180 ° = π rad, 1 tour = 2π rad, etc. On a ainsi : $\frac{3\pi}{4}$ rad $= \frac{3}{4}(\pi\ \text{rad}) = \frac{3}{4} \times 180\,° = 135\,°$. Inversement, $135\,° = \frac{135}{180} \times 180\,° = \frac{135}{180} \times \pi$ rad $= \frac{3}{4} \times \pi$ rad $= \frac{3\pi}{4}$ rad. De même, $\frac{3\pi}{4}$ rad $= \frac{3}{8}(2\pi\ \text{rad}) = \frac{3}{8}$ tour $= 0{,}375$ tour.

4. Pour une unité d'angle donnée, u, soit a le réel tel que $a\,u = 180\,° = \pi$ rad $= \ldots$ Soit Cos_a et Sin_a les applications de $\left[0\,;\frac{a}{2}\right]$ définie par : $\text{Cos}_a(x) = \cos x\,u$ et $\text{Sin}_a(x) = \sin x\,u$, où cos et sin sont les notions définies au collège. On admet ici que l'on a : $\frac{d}{dx}\text{Sin}_\pi(x) = \text{Cos}_\pi(x)$. Comme $a\,u = \pi$ rad, il vient : $\text{Sin}_a(x) = \sin x\,u = \sin(\frac{x}{a}\,au) = \sin(\frac{x}{a}\,\pi\ rad) = \sin(\frac{x\pi}{a}\ \text{rad}) = \text{Sin}_\pi(\frac{x\pi}{a})$. On a donc : $\frac{d}{dx}\text{Sin}_a(x) = \frac{d}{dx}\text{Sin}_\pi(\frac{x\pi}{a}) = \frac{\pi}{a}\text{Cos}_\pi(\frac{x\pi}{a}) = \frac{\pi}{a}\text{Cos}_a(x)$. Ainsi, on aura $\frac{d}{dx}\text{Sin}_a(x) = \text{Cos}_a(x)$ si et seulement si $a = \pi$, c'est-à-dire si et seulement si u = rad. Avec des notations évidentes, on aura par exemple : $\frac{d}{dx}\sin x\,° = \frac{\pi}{180}\cos x\,°$. Telle est la principale ***raison d'être de l'emploi du radian*** comme unité de mesure des angles.

Test d'entrée

1. Lors de la préparation d'un test d'entrée, quelle importance doit-on/peut-on accorder aux notions ne relevant pas du socle commun (collège) ? (NC, 4^{e} & 3^{e}, 0)
2.Que peut-on proposer aux élèves lorsque, après un test d'entrée, on s'aperçoit qu'ils ont beaucoup de difficultés ? (ME, 2de, 5)
3. Comment organiser les tests d'entrée (durée, difficulté, ...) ? Peut-on leur donner à faire à la maison, en précisant bien que cela doit être fait rapidement et sans son cours ? (TT, 2de, 7)
4. Lorsqu'on se rend compte que certains élèves n'ont pas les acquis antérieurs (exemple en classe de 4^{e}, le produit de deux nombres positifs en écriture décimale, acquis en 5e), que doit-on faire ? Doit-on faire que des constats ? (LA, 4^{e}, 4)
5. En 6^{e}, j'ai fait la comparaison des nombres décimaux en faisant placer des points sur une demi-droite graduée, comme indiqué dans les programmes d'accompagnement (on a fait cette leçon il y a trois semaines). Mais au bout de quelques minutes, les élèves m'ont dit : « Monsieur, on sait déjà tout, la règle de comparaison des décimaux ». Et effectivement, 22 élèves sur 24 savaient comparer les décimaux. (NB : j'ai envoyé un des élèves en difficulté pour lui expliquer au tableau et pour pas que l'AER dure 5 minutes.) Je n'ai pas fait de test d'entrée mais les évaluations de 6^{e} jouent un peu ce rôle et il était donc prévisible qu'ils n'aient pas de difficulté. Je n'ai pas réussi dans mon activité à faire émerger l'importance de la notion d'ordre, elle l'utilise juste. Et de toute façon, on n'a pas de définition dans $\mathbb{D}$ ou $\mathbb{Q}$ en 6^{e} ; mais on a juste une notion intuitive. a) Quelle AER aurais-je pu faire pour faire émerger la notion d'ordre ? b) Comment gérer les situations où les élèves savent tout (22 sur 24...) ? (FA, 7)

Pour répondre à ces questions nous examinerons la partie 4 de la notice « Le temps de l'étude », reproduite ci-dessous.

4. Transitions didactiques et reprises d'étude

4.1. La situation dominée des élèves par rapport à l'avancée de l'étude les porte à être vigilants : ils attendent en particulier du professeur ***qu'il fasse avancer le temps didactique*** ; et, s'il est vrai qu'ils s'entendent souvent à freiner cette avancée – en « traînant les pieds », en faisant de la résistance d'une manière ou d'une autre –, le professeur se méprendrait, au risque d'essuyer bientôt de vives critiques, voire de perdre une partie de sa légitimité, s'il succombait à la tentation de se rendre à ce type de sollicitations, alors que les élèves attendent de lui qu'il avance ***en dépit même des ralentissements qu'ils cherchent à lui imposer***.

4.2. Une telle attente est à l'évidence antinomique de la pratique des ***révisions systématiques***. Longtemps, il est vrai, les programmes officiels ont prescrit la révision – augmentée de compléments – d'une partie du programme de la classe précédente avant d'aborder le « programme particulier à la classe ». Tout aussi officiellement, pourtant, de telles révisions sont aujourd'hui ***proscrites***. « Il convient, énonçait ainsi d'emblée l'ancien programme de 6^{e}, de faire fonctionner, à propos de nouvelles situations et autrement qu'en reprise ayant un caractère de révision, les notions et “outils” mathématiques antérieurement étudiés. » L'injonction est reprise dans le *Préambule pour le collège* qui figure dans le BO présentant le nouveau programme de mathématiques du collège, où on lit [4] : « Il est nécessaire d'entretenir les capacités développées dans les classes antérieures indispensables à la poursuite des apprentissages et à la maîtrise du socle commun par tous les élèves. Cet entretien doit être assuré non dans des révisions systématiques mais par des activités appropriées, notamment des résolutions de problèmes. » Ignorant sur ce point les instructions officielles, nombre de professeurs débutants semblent enclins à commencer l'année par des révisions systématiques, qu'on a vu parfois se prolonger jusqu'aux premières vacances scolaires de l'année ! Plusieurs facteurs concourent sans doute à nourrir ces errements : souci de « rassembler » la classe (par exemple lorsqu'il s'agit d'une 2de, formée d'élèves qui, provenant de différents collèges, tendent à constituer au sein de la classe autant de « clans » qui s'ignorent, voire se combattent), mais aussi désir plus ou moins inconscient de captation des élèves, à qui le professeur, fût-ce à son insu, signifie ainsi que « la vie commence avec lui » (ce

4 Voir le document *Programmes du collège*, p. 10.

que certains élèves peuvent vivre d'ailleurs comme une forme subtile d'agression narcissique). À cela il faut ajouter que la pratique des révisions permet au professeur novice de différer le moment où il devra affronter, au double plan psychologique et technique, la difficile tâche consistant à ***créer du temps didactique*** : dans les révisions, en effet, de même par exemple que dans les leçons particulières (qui constituent fréquemment la seule expérience de direction d'étude du professeur novice), on travaille sur du temps didactique ***créé par d'autres***, et on n'a donc pas véritablement à créer du temps didactique *ex nihilo*. Par contraste, la fonction chronogène qu'assume normalement le professeur ayant la responsabilité d'une classe apparaît alors comme extrêmement exigeante : elle appelle un effort didactique et psychologique non négligeable.

4.3. Le problème des révisions surgit notamment lorsque, dans une classe donnée, le programme comporte un thème θ ***déjà en partie étudié*** dans les classes précédentes, c'est-à-dire lorsqu'il y a ***reprise de l'étude*** du thème θ, celui-ci apparaissant donc à nouveau comme un ***enjeu didactique***. Dans un tel cas, la stratégie officiellement préconisée, qui, de manière plus ou moins subreptice, permet la poursuite de l'***apprentissage*** du thème θ par son activation dans le cadre de l'étude de thèmes θ_1, θ_2, ..., θ_n ***nouvellement étudiés***, cesse d'être appropriée puisqu'elle suppose précisément que θ n'est ***plus*** un enjeu didactique. Or les situations de ***reprise d'étude*** sont aujourd'hui fréquentes dans le curriculum secondaire, dans la mesure notamment où les programmes sont conçus dans une perspective progressive, l'étude d'un thème introduit dans une classe se poursuivant en général dans la classe suivante, voire au-delà. Dans un tel cas, la mise en évidence de ce qu'il y a de ***nouveau*** dans l'étude du thème θ, c'est-à-dire de ce qui constitue véritablement l'enjeu didactique autour duquel le travail va se développer dans la classe constitue ***un élément crucial de la direction d'étude***. Deux principes s'imposent notamment au professeur à cet égard. Tout d'abord, il doit se garder de reprendre *ab initio* l'étude du thème θ et s'efforcer au contraire de faire apparaître ce qui, de θ, est réellement neuf, et se trouve donc ***à étudier***, par rapport à ce qui est ***ancien*** et ne saurait plus être légitimement étudié dans ***cette*** classe : objectivement, en effet, du temps didactique a été dépensé dans la classe précédente sur le thème θ, et le redoublement de cette dépense dans la classe, ***sans acquis nouveau***, ou du moins sans que cette reprise soit présentée comme un ***rappel*** visant la remémoration collective de faits déjà rencontrés, constitue alors, aux yeux des élèves, un gaspillage de temps – sentiment qui s'exprime le plus souvent par une certaine inattention, un brouhaha persistant, voire des propos implicitement ou explicitement protestataires : « L'an dernier c'est pas comme ça qu'on faisait ! », « M'sieur, on l'a déjà fait ! », etc. Ensuite, il convient de faire que les élèves qui ne maîtriseraient pas l'***ancien*** de manière satisfaisante puissent se mettre à jour sur ces parties du thème qui ne peuvent plus légitimement recevoir le statut d'enjeu didactique dans le travail de la classe. Si la ***responsabilité didactique*** de l'élève vis-à-vis de ses propres apprentissages est, ici comme en d'autres circonstances, pleinement engagée, le professeur n'est pas pour autant dégagé de toute responsabilité : il lui incombe de prendre sa part dans la gestion de cette reprise d'étude. Lorsque les élèves arrivent dans la classe, le thème θ ne leur est pas inconnu : le problème didactique posé au professeur est alors celui, non du ***recommencement***, mais ***de la reprise et de la poursuite*** de l'étude du thème.

4.4. Le premier souci à cet égard doit être de ***repérer le tracé de la « frontière »*** entre les classes successives relativement au thème considéré. À titre d'illustration, on prendra ici pour thème θ étudié dans la classe, mais ayant déjà été étudié dans les classes antérieures, le thème des ***inéquations du premier degré à une inconnue*** en classe de 2[de]. Le programme de 3[e] prescrit l'étude des inéquations à une inconnue et à coefficients numériques, en précisant toutefois que « l'étude du signe d'un produit ou d'un quotient de deux expressions du premier degré de la même variable est, elle, hors programme ». En 2[de], en revanche, le programme parle de « résoudre une inéquation à partir de l'étude du signe d'une expression produit ou quotient de facteurs du premier degré » : la frontière passe ici ***entre premier degré et degrés supérieurs***. En outre, ce thème est situé en seconde dans le domaine des *Fonctions* (et c'est donc là qu'il doit prendre principalement ses éléments technologiques) tandis qu'il relève en troisième du domaine *Nombres et calculs*. Le professeur est alors confronté à un problème didactique non trivial, celui de l'articulation de l'étude qu'il doit impulser dans la classe avec le travail déjà réalisé dans la classe précédente sur le thème étudié. Le scénario consistant à tout reprendre *ab ovo* ne saurait évidemment être retenu : dans le cas des inéquations, un tel scénario conduirait en effet, par exemple, à partir d'inéquations telle $2x < 6$, pour arriver, après divers intermédiaires, à des inéquations du type $5 + 6x > 0$, pratique qui, lorsqu'elle n'est pas repoussée par les élèves ainsi qu'on l'a dit, est propre à leur instiller le goût légèrement pervers des répétitions vécues passivement.

4.5. Le problème didactique que le professeur doit chercher à résoudre comporte alors deux difficultés. Tout d'abord, il lui faut explorer et identifier, avec les élèves, leurs ***besoins d'étude*** – leurs besoins ***didactiques*** – relativement au thème considéré. Ensuite, une fois ces besoins didactiques reconnus par le professeur comme par les élèves, il devra concevoir et animer le travail permettant de les satisfaire, et cela en évitant bien entendu la reprise générale de l'étude du thème considéré. La détermination des besoins didactiques des élèves relativement à un thème d'étude peut se faire par la technique du ***test d'entrée dans l'étude du thème*** – test qui constitue le pendant des classiques ***devoirs de contrôle*** (« interrogations écrites », « devoirs surveillés », etc.), lesquels portent généralement sur des types de problèmes récemment étudiés et constituent des tests ***de sortie*** de l'étude des thèmes figurant au programme du contrôle [5]. Un test d'entrée peut prendre la forme d'une épreuve de 15 à 20 minutes, phase de travail ***individuel écrit*** suivie d'une phase de travail ***collectif*** en classe, immédiatement, ou lors de la séance suivante. La phase de travail individuel écrit apparaît ***indispensable*** pour que l'élève puisse apprécier par lui-même sa capacité – ou son incapacité – à s'affronter avec succès aux types de tâches mathématiques proposés. Ce travail écrit peut faire l'objet d'une double évaluation. L'évaluation réalisée ***par l'élève***, qui appréciera ainsi sa capacité à résoudre les problèmes des types proposés, pourra être consignée sur la copie, au moment où le professeur met un terme à la session de travail individuel écrit, et être exprimée sur une échelle en quelques points (par exemple : très faible, insuffisant, moyen, satisfaisant, très satisfaisant). L'évaluation réalisée ***par le professeur*** pourra, quant à elle, se traduire par une note chiffrée, dont le poids dans la série des notes attribuées à l'élève devra cependant rester ***très limité***.

4.6. Le test d'entrée doit permettre à l'élève et au professeur d'apprécier la maîtrise réelle qui est celle de l'élève sur les types de problèmes situés ***à la frontière*** entre l'une et l'autre classes. D'une manière générale, la principale difficulté de fabrication d'un tel test est liée à la contrainte de temps : parce qu'il doit ***relancer*** l'étude, et non l'arrêter durablement, un test d'entrée, on l'a dit, doit être ***bref***. Cette exigence conduit à renoncer à représenter, dans l'échantillon de tâches mathématiques proposées, l'***ensemble*** des types de tâches qui ont pu être rencontrées dans les classes précédentes, et à s'en tenir à ***quelques*** spécimens de difficulté graduée. S'agissant du thème des inéquations du premier degré à une inconnue et de la classe de seconde, on pourra ainsi envisager le test ci-après.

> Résoudre les inéquations et systèmes d'inéquations suivants, en représentant chaque fois l'ensemble des solutions sur une droite graduée : a) $-5x - 2 < 0$; b) $1 - 4x > -5x$; c) $\frac{12x+7}{5} > x - 1$;
>
> d) $2x - \frac{1}{3} \leqslant 3x - \frac{1}{4}$

Le test d'entrée proposé en exemple rappelle en outre que la gradation dans la difficulté ne saurait partir du niveau de difficulté ***le plus faible***, ainsi qu'on le ferait avec des commençants « absolus » : l'inéquation $3x + 4 > 10$, et même encore l'inéquation $3x + 6 > 10$, n'a ***en principe*** pas sa place dans un test d'entrée à proposer en 2de. Inversement, on devra en général renoncer à faire figurer les problèmes les plus mangeurs de temps, comme le sont généralement les problèmes de ***modélisation*** par exemple.

4.7. Un test d'entrée n'est qu'un élément de ***l'organisation d'ensemble*** de l'entrée dans l'étude du thème. Censé permettre la détection – et l'auto-détection – des élèves présentant un ***déficit net*** sur le thème considéré, il ne vise pas à contrôler les élèves sur ***l'ensemble*** des points sensibles du thème. En fait, le test doit simplement éclairer le professeur (et les élèves) sur l'action à engager, laquelle peut consister : 1) à ne rien faire de plus, et à aborder ***sans attendre*** l'étude de ce qui est vraiment nouveau ; 2) à proposer à ***certains*** élèves, supposés en petit nombre et pour lesquels la chose semble s'imposer, un ***travail personnel adapté***, et ne reprendre l'étude ***collective*** du thème que quelques jours plus tard ; 3) à diriger en classe entière, ou, de manière plus ciblée, dans un cadre approprié (en module, s'il s'agit d'une 2de, par exemple), un ***travail transitionnel spécifique*** sur le thème à étudier. Dans les deux derniers cas évoqués, les types de problèmes laissés volontairement de côté lors du test d'entrée pourront être spécialement travaillés : ainsi en ira-t-il, s'agissant du thème des inéquations en 2de, avec les problèmes de modélisation algébrique élémentaire. Dans

5 On se gardera, en revanche, d'utiliser tout au long de l'année les résultats d'évaluations, nationales ou non, réalisées en début d'année – ce qui reviendrait, *volens nolens*, à regarder l'élève comme ***figé dans un état quasiment indépassable***. Il est donc inapproprié de vouloir faire l'économie de tests d'entrée thématiques successifs en prétendant juger de la compétence ***actuelle*** de l'élève (au mois de février par exemple) sur un sujet d'étude donné à partir d'une performance ***passée*** (réalisée au mois de septembre par exemple) sur un sujet d'étude voisin, comme si sa contre-performance éventuelle en début d'année disait la vérité de l'élève et scellait son destin mathématique pour une période indéfinie.

le deuxième cas, on notera que, même aidé, le travail personnel demandé à l'élève suppose de sa part une certaine ***autonomie didactique***, en même temps qu'il engage clairement sa ***responsabilité didactique et citoyenne***, l'élève devant en effet s'efforcer de ***ne pas retarder trop l'avancée du temps didactique*** dans la classe. Le délai de quelques jours entre le travail d'évaluation et de bilan, d'une part, et la poursuite collective de l'étude, d'autre part, assume à cet égard une fonction clairement symbolique, en ce qu'il manifeste que la classe ***attend*** les élèves en retard, et en même temps que cette attente ne saurait se prolonger indûment.

4.8. L'organisation propice au travail personnel adapté suppose un dispositif approprié, et trois scénarios peuvent à cet égard être par exemple envisagés : 1) le professeur fournit aux élèves concernés une ou plusieurs ***feuilles de travail*** qu'il a préparées dans ce but et qui seront le support du travail personnel demandé ; 2) il peut aussi remplacer une telle production spécifique par un ***choix d'exercices*** que l'élève ira découvrir dans un ou plusieurs ouvrages à consulter au CDI (on préfèrera pour cela des ouvrages simples et concis, qui marquent assez nettement une situation de transition par rapport à la classe précédente) ; 3) il peut enfin diriger les élèves concernés vers un dispositif de travail approprié, fonctionnant comme un ***« atelier de mise à jour »*** [6].

4.9. Dans le cas où le professeur décide de diriger un travail transitionnel spécifique pour ***l'ensemble*** de la classe, les élèves pourront, dans le cadre des ***modules***, avoir à mener à bien soit un travail ***de développement***, réservés aux élèves les plus déficitaires, soit un travail ***de mise au point***, pour les élèves ayant une maîtrise du thème jugée suffisante. La cohésion didactique de la classe peut alors être assurée, par exemple, d'une part en utilisant dans le travail de mise au point le même matériel que celui utilisé dans le travail de développement, mais en moindre quantité et augmenté de quelques exercices simples de modélisation, d'autre part en demandant aux élèves engagés dans un travail de développement, éventuellement groupés en binômes pour certains d'entre eux, de remettre, dans la semaine qui suit, un travail écrit présentant la solution des exercices complémentaires étudiés en « mise au point », devoir pour lequel chacun des élèves ou des binômes reçoit l'aide de l'un des élèves ayant participé au travail de mise au point.

4.10. Un tel travail transitionnel spécifique portera sur les types de problèmes situés à la frontière avec la classe précédente et aura prioritairement pour objet de travailler et de « faire travailler » la technique standard correspondante mise en place dans cette classe, si une telle technique canonique existe ; ou, dans le cas contraire, de rassembler la classe autour d'une technique dont il apparaît que, à un titre ou un autre, ***elle a un avenir*** dans la suite de l'étude. Dans tous les cas, on s'efforcera d'enrichir la technique travaillée de variantes diverses qui fourniront notamment des moyens d'***anticipation*** et de ***contrôle***, en vue d'aller collectivement vers une meilleure maîtrise des types de problèmes considérés. La transition didactique faite, la classe pourra s'attaquer à ce qu'il y a de vraiment nouveau dans le programme de l'année, en prenant appui sur la technique travaillée jusque-là, et en essayant alors d'en étendre la portée aux cas nouvellement rencontrés. Pour résoudre l'inéquation

$$(3x-1)(x+1)(2x+1) > 0,$$

on peut par exemple écrire l'expression donnée sous la forme suivante :

$$6[x-(-1)][x-(-1/2)][x-1/3].$$

Cette forme algébrique fait apparaître immédiatement les valeurs de x où l'expression change de signe (à savoir -1, $-1/2$, $1/3$) ; comme, pour $x = 1$, l'expression figurant au premier membre est positive, on peut conclure aussitôt qu'on a

$$S =]-1 ; -1/2[\cup]1/3 ; +\infty[.$$

Cette technique fait l'économie du tableau de signes, qui n'est nullement indispensable au plan ***technique*** [7].

4.11. L'obligation de créer du temps didactique ne doit pas conduire à oublier que l'étude est un moyen au service d'une fin : ***l'apprentissage***. Si le temps didactique impulsé par le professeur fixe un cadre collectif de progrès, c'est bien le travail des élèves qui peut faire que les ***temps de l'apprentissage*** apparaissent

6 En classe de seconde, ce dispositif peut être identifié aux séances d'***aide individualisée*** (AI).

7 L'ancien programme de 2^{de} regardait comme une « capacité attendue » le fait de savoir « utiliser un tableau de signes pour résoudre une inéquation ou déterminer le signe d'une fonction ». Un tel tableau n'est vraiment utile que lors de la phase ***de découverte et d'exploration*** du phénomène mathématique essentiel – le changement de signe de l'expression examinée lorsqu'on franchit une des « valeurs critiques », telles –1, –1/2, 1/3 dans le cas précédent –, quand on ne dispose pas de l'environnement technologique des fonctions et des moyens « informatiques » de les représenter graphiquement.

globalement ***en phase*** avec l'avancée officielle de l'étude, dont le professeur reste le garant. À cet égard, l'exigence contractuelle d'un temps didactique séquentiel et irréversible ne doit pas être plaquée mécaniquement sur les processus effectifs d'apprentissage, qui se développent au contraire ***dans un décalage nécessaire avec l'actualité didactique officielle***, et où triomphent ***travail d'après-coup*** et ***retours en arrière***. Les dynamiques cognitives individuelles se cachent souvent derrière un certain immobilisme apparent ; l'apprentissage se réalise bien rarement « en temps didactique réel », et le professeur ne saurait donc se contenter d'être l'ordonnateur du temps didactique officiel. Il est tout autant un ***aide à l'étude*** qui, à travers divers dispositifs didactiques (modules, soutien, etc.), contribue de manière décisive à favoriser la mise en accord du temps individuel de chaque « apprenant » avec le temps collectif de l'étude.

Commentaires développés oralement

Nous avons mis en évidence pour l'essentiel les éléments suivant :

le test d'entrée doit porter sur les notions utiles pour l'étude du thème à venir, et notamment celles qui interviendront dans les AER : on ne se limitera donc pas au socle commun et il faut prendre garde de tester les pratiques ;

« Le test d'entrée doit permettre à l'élève et au professeur d'apprécier la maîtrise réelle qui est celle de l'élève sur les types de problèmes situés ***à la frontière*** entre l'une et l'autre classes. » : le donner à faire hors classe paraît donc peu adapté, les élèves pouvant être aidés ;

Un test d'entrée peut être suivi d'une reprise de l'étude du thème (voir paragraphes 4.7 et suivants), les dispositifs de reprise de l'étude collectifs devant être mis en place si (et seulement si) il s'avère qu'un nombre significatif d'élèves ont des difficultés (ce qui exclu le cas de la classe de 6^e exposé dans la dernière question). En ce cas, on fera retravailler le thème à l'occasion d'autres thèmes qui le mobilisent (la comparaison de fraction ici).

3. L'encyclopédie du professeur de mathématiques – Le temps de l'étude et les PER

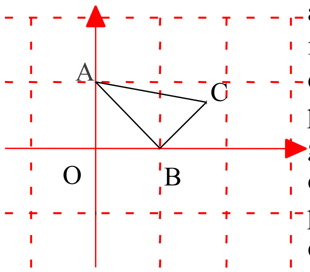
Nous examinerons ici les paragraphes 2.8 et 2.9 de la notice citée.

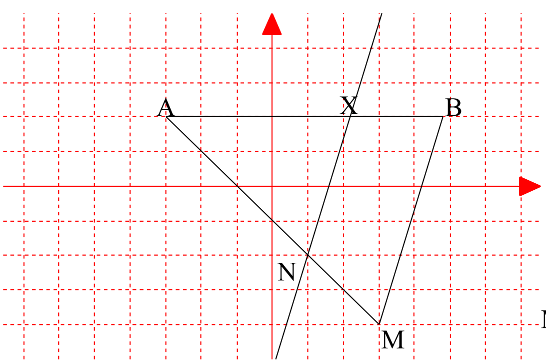
2.8. Quelle que soit la programmation adoptée, une ***gestion didactique rigoureuse*** est absolument indispensable, ce qui passe en particulier par le respect de quatre principes essentiels : ***premièrement***, ne pas pratiquer de « révision systématique », mais aller autant que possible de l'avant (en s'assurant qu'on ne laisse pas les élèves derrière soi) ; ***deuxièmement***, ne pas se laisser aller à une « marche aléatoire » dans le programme, en se satisfaisant de « donner du travail aux élèves », en classe et hors classe, car il est irréaliste d'imaginer pouvoir revenir ***à loisir*** sur tel ou tel point déjà abordé ; ***troisièmement***, déterminer de manière précise, pour chacun des thèmes à enseigner, ***le contenu « nécessaire et suffisant »***, en se gardant de céder (au nom de la « liberté pédagogique » du professeur) ***à la tentation ravageuse de faire des « extra »*** sous la forme par exemple d'« exercices » isolés qui ne seraient pas clairement des spécimens des ***quelques*** types de problèmes relevant sans ambiguïté du thème en cours d'étude ; ***quatrièmement***, faire régulièrement le point sur le calendrier prévu et la marche réelle de l'étude, afin de retoucher la programmation et d'appliquer plus rigoureusement les trois principes précédents.

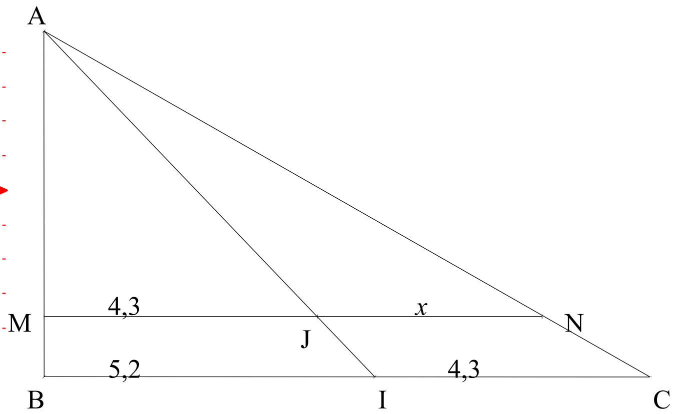
2.9. La mise en œuvre des principes de gestion précédents suppose évidemment l'existence d'une ***dynamique de l'étude*** que le professeur s'interdira de laisser s'emballer, dériver, musarder, etc. Dans une organisation générale de l'étude d'un style maintenant classique, cette dynamique est supposée être régulièrement relancée par l'introduction, par le professeur, d'une AER nouvelle, souvent sans lien avec celles qui l'ont précédées non plus qu'avec celles qui suivront [8]. Cette structure faiblement intégrée de la suite des AER impulsant l'étude pose problème : l'expérience montre en effet que cette ossature didactique est relativement fragile parce que l'introduction *ex abrupto* d'une AER nouvelle se fait alors, en règle générale, sans ***motivation mathématique*** suffisante, et en particulier sans véritable raison autre que la volonté – du professeur, ou même de la classe, quand celle-ci a voix au chapitre en la matière – de lancer

8 Sur la notion d'AER, voir la notice *Première rentrée des classes*.

l'étude de tel ou tel bloc thématique. Par contraste, la dynamique à lancer et à nourrir gagne à avoir pour moteur, non une suite peu intégrée d'AER organisées chacune autour d'une question ***isolée***, dont le choix, extrinsèque, resterait entièrement à la charge du professeur (éventuellement en dialogue avec la classe), mais un petit nombre de suites d'AER intégrées au sein de ce qu'on nommera un PER, un ***parcours d'étude et de recherche*** engendré par une ***« grande » question***, c'est-à-dire par une question ayant un ***fort pouvoir générateur***, et qui va donc ***motiver***, au plan de la connaissance, l'étude de beaucoup de questions.
À titre d'exemple, considérons la figure ci-contre, sur laquelle ABC = 90º et BC = 1 ; on voit aisément qu'on a AC = $\sqrt{3}$. On a ainsi ***« construit graphiquement »*** le nombre $\sqrt{3}$, et on obtient alors une valeur décimale approchée de ce nombre ***par une simple mesure de longueur***. Cet exemple illustre de manière simplifiée ce qu'on nommait autrefois ***calcul graphique***, domaine des mathématiques appliquées aujourd'hui presque oublié mais qui, pendant plus d'un siècle à partir de 1860, permit aux ingénieurs d'effectuer graphiquement des calculs en tous genres (évaluation de fonctions, calcul d'intégrales, résolution de systèmes d'équations, etc.). En 4e, notamment, on peut se proposer un parcours d'étude et de recherche portant sur la question de la construction d'un « calculateur graphique », c'est-à-dire visant à développer un ensemble d'***algorithmes géométriques*** permettant d'effectuer graphiquement les principaux types de calculs rencontrés à ce niveau. Sur la figure ci-dessous, à gauche, on a ainsi « construit », à titre d'exemple, sur papier quadrillé, le nombre AX = $\frac{2}{3} \times 7{,}8$; tandis que, sur la figure de droite, on a construit, sur papier blanc, le nombre $x = \frac{4{,}3^2}{5{,}2}$.







À partir du calculateur graphique peu à peu construit, on pourra fabriquer un calculateur ***électronique*** en utilisant un logiciel de géométrie dynamique tel Géoplan ou Geogebra : il suffit pour cela d'exécuter sur Géoplan ou Geogebra l'algorithme géométrique trouvé, puis de demander au logiciel de mesurer la distance voulue. Mais on notera surtout que l'étude de la question génératrice du PER – comment calculer graphiquement ? – engendre nombre de questions qu'il peut être pertinent d'étudier en 4e (ou en d'autres classes). Ainsi apparaît « naturel », dans ce PER, de se demander quels entiers naturels n s'écrivent comme une ***somme*** de deux carrés d'entiers ($n = x^2 + y^2$) : si par exemple on cherche à « construire » le nombre $\sqrt{202}$, on observera que $202 = 11^2 + 9^2$ et il suffira alors de mesurer, sur une feuille de papier d'écolier, la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle ont pour longueur 11 cm et 9 cm. On justifierait de semblable façon le fait de s'interroger [9] sur la nature des entiers n qui s'écrivent comme une ***différence*** de carrés d'entiers ($n = x^2 - y^2$). Bien entendu, le fait de prendre la décision de lancer la classe dans l'étude de telle question poussée en avant par l'étude de la question à l'origine du PER, ou le fait, cette étude amorcée, de l'interrompre à tel moment, incombe en dernier ressort au professeur, agissant en directeur d'étude selon les principes indiqués plus haut.

9 Cette dernière question peut être étudiée en 4e : on montre aisément que les entiers en question sont les entiers impairs et les entiers multiples de 4. La première, en revanche, ne peut guère être étudiée très avant (on démontre que les entiers cherchés sont ceux dans la décomposition en facteurs premiers desquels les facteurs premiers congrus à 3 modulo 4 sont affectés d'un exposant *pair*) ; mais ce n'est pas une raison pour ne pas la poser, et l'étudier quelque peu, si elle se présente.

Commentaires développés oralement

Les élèves professeurs sont invités à noter un point positif et un point négatif à propos de la mise en œuvre des PER dans l'enseignement secondaire.

Travail à faire pendant les vacances :reprendre et étudier les notes du Séminaire.

Les participants sont invités à ***étudier la notice « Évaluation et notation aspects didactiques 2006-2007 »***, distribuée lors de la séance et disponible sur le site au format doc (http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/fc/encyclopedie/volume2/notices_2009-2010.html).

Pour le 14 novembre 2009, chaque trinôme est invité à ***choisir 4 questions*** (portant sur des sujets différents) dans la liste de questions reproduite ci-dessous et à envoyer par mel à m.artaud@aix-mrs.iufm.fr les ***éléments de réponses à ces questions figurant dans la notice*** sur l'évaluation.

NB : les élèves professeurs stagiaires en situation peuvent constituer un quintuplet.

Questions posées... Journées 0 à 7 – Thème « évaluation »

1. Est-ce une bonne idée que de faire une interrogation courte (10 min) chaque semaine pour vérifier le travail des élèves ?

2. Faut-il faire signer les DM, DS, punitions ?

3. Peut-on donner aux élèves une note de tenue de classeurs pour les obliger à tenir leur classeur ordonné ?

4. Comment gérer les évaluations des dyslexiques (suppression d'exercices, de questions, ...) étant donné qu'il est impossible de mettre en place un tiers temps comme aux examens ?

5. Je souhaiterais mettre en place une séance d'interro écrite puis de correction des copies par les élèves. Auriez-vous des conseils sur la manière d'organiser cette séance ?

6. Quelle moyenne (et quelle dispersion) de notes peut-on viser sur un contrôle ?

7. Comment faire lorsque des élèves (pas les mêmes) sont absents à des interrogations écrites notées sur 5. Doit-on les faire rattraper ?

8. Est-il conseillé de compléter le mode de notation par devoir (maison / en classe) par des notes régulières et ne concernant qu'une partie des élèves (oral, relevé « aléatoire » de quelques exercices rédigés à la maison) pour inciter à un travail régulier et une participation active ?

9. Un élève me demande de refaire un DS alors qu'il était absent. Puis-je refuser qu'il refasse ce devoir en raison des problèmes d'organisation que cela entraîne ?

10. Qu'écrire sur un bulletin trimestriel quand on pense qu'un élève peut faire mieux sans justement utiliser « Peut mieux faire » ? Un élève fait des efforts, mais les résultats ne suivent pas. Comment le garder motivé avec les appréciations ?

11. J'ai rendu mes premières copies (comptant pour la moyenne) hier à 8 heures. Il y a eu un peu de bavardages, de rires, etc. Est-ce bien de les rendre en début d'heure ? Faut-il les faire patienter jusqu'à la fin ? Puis-je me servir de ça pour avoir le calme ? (Par exemple, si vous ne vous calmez pas, je ne rends pas les copies...)

12. A-t-on l'obligation de communiquer toutes les notes aux élèves (comportement, tenue du classeur, participation) ?

13. J'ai des élèves qui sont dyslexiques, dyspraxiques, dys... ; quels sont les dispositifs à mettre en place pour eux ? Exiger moins d'exercices ou noter plus largement ?

14. Si l'on choisit de faire un mini-contrôle hebdomadaire des connaissances (10 min), est-il préférable de corriger immédiatement à l'oral ou de ramasser les copies pour les corriger individuellement ?

15. Que faire si l'on a donné un DM trop difficile à faire pour les élèves (c'est-à-dire que les copies acceptables sont rares) ? Faut-il les noter ?

16. Combien doit on faire (environ) d'évaluations dans l'année ?

17. Que faire quand un DM est bâclé par une bonne partie de la classe ?

18. Faut-il noter ou non une interro ratée par toute la classe (sauf 2 ou 3 élèves) ?

19. Combien de temps faut-il passer sur une correction ? Une heure complète ou donner une correction papier ?

20. Est-on obligé de mettre les notes dans le carnet de notes numérique ? (Cela me dérange, du point de vue de la confidentialité et de la facilité de certaines personnes à « craquer » un code.)

21. Quelle périodicité pour les contrôles, évaluations... ?

22. Comment estimer le temps de réalisation d'un DS par les élèves ?

23. Lors du rendu d'une interrogation, doit-on toujours faire la correction avec les élèves, seulement corriger les points qui ont posé problème, distribuer une correction polycopiée avec uniquement quelques commentaires oraux ?

24. Il y a un élève dyslexique dans ma classe. Puis-je remplacer son tiers temps par une note majorée ? (la meilleure solution selon moi) un devoir plus court ? De plus, est-il nécessaire d'obtenir un certificat médical ?

25. Au niveau correction des copies, doit-on privilégier une correction individualisée sur la copie c'est-à-dire précise et personnalisée ou bien une correction collective ?

26. Comment organiser les barèmes pour les DM ? Quelle part laisser à la présentation et à la rédaction ?

27. Comment organiser une séance de correction de contrôle pour qu'elle soit à la fois vivante et efficace ?

28. Combien de notes est-il conseillé de mettre par trimestre ? Combien de devoirs surveillés, de devoirs maisons ?

29. Que faire en cas de triche suspectée à un devoir surveillé ou maison ?

30. Comment corriger les devoirs (DM ou DS) au niveau du barème pour la rédaction, la présentation... (faut-il mettre des codes ?)

31. Comment faire un compte rendu d'un contrôle ? Faut-il les rendre avant ou après le compte rendu ?

32. Sur quoi ou sur qui dois-je me baser pour construire un contrôle, faire un barème ? Si un des élèves a 20 sur 20, dois-je considérer que c'était un travail réalisable ? Comment faire si le niveau des élèves est très hétérogène ?

33. J'ai eu 9 absents au premier DS, depuis j'ai du mal à rassembler les 9 en même temps pour leur donner un autre devoir, que faire ?

34. Comment composer le premier devoir surveillé, plus précisément, à quel niveau le mettre et doit-il recouvrir tout ce que l'on a fait ou juste quelques points très précis ?

35. Doit-on détailler complètement la correction des devoirs maison ou surveillés ?

36. J'ai beaucoup de difficultés à savoir combien de temps va prendre la résolution par les élèves d'un exercice. De ce fait, je ne sais pas comment organiser le devoir surveillé. Dois-je mettre beaucoup d'exercices au risque qu'il soit trop long ou dois-je essayer de « viser » le temps imparti ?

37. Quel doit être le rythme idéal des DS, DM et contrôles ? (Y a-t-il une quantité minimum imposée par trimestre ? Laquelle ?)

38. Peut-on pénaliser une copie de DM rendue en retard en lui enlevant des points ?

39. En moyenne, combien d'interrogations de cours doit-on faire en un trimestre ?

40. Doit-on faire noter les corrections de DS dans leur intégralité ? A quel endroit du cahier (partie exercice ?) ? Est-ce mieux de leur rendre après la correction afin qu'ils prennent tout en note plutôt que simplement ce qu'ils n'ont pas fait ?

41. Dans la mesure où toutes les semaines je pose une interrogation écrite, est-ce que je peux lors du DS de fin de chapitre donner un formulaire ? (classe de seconde muni de calculatrices graphiques)

42. Est-on tenu envers les élèves d'indiquer les points obtenus à chaque question sur une copie ? Ou la note finale suffit-elle ?

43. Comment juger la difficulté que les élèves peuvent avoir face à un contrôle pour ajuster le temps du contrôle ? Ou le faire long et ajuster un barème en fonction des copies ?

44. Est-ce que je peux pénaliser un élève pour mauvais comportement pendant une interrogation, en lui enlevant des points sur sa note (bavardage, tricherie) ?

45. J'ai donné une interrogation à ma classe, mais un élève était absent la séance précédente (le contenu de l'interrogation ayant en partie été vu lors de cette séance). Puis-je l'évaluer comme les autres ?

46. Suite à une exclusion de cours, un élève a manqué une interrogation, il va la faire en heure de retenue. Est-ce que je dois compter son interrogation de la même manière ?

47. Peut-on en quatrième, prévoir un « gros » contrôle (d'une durée d'une heure) tous les deux chapitres, dans le but de les initier au brevet ?

48. Quelle est la meilleure façon de corriger un DS ? Photocopie ou correction intégrale au tableau ? Voire juste revenir sur les points où tous les élèves se sont trompés ?

49. Si, après un DM ou une évaluation, une correction des points importants est faire en classe et la correction complète est mise en ligne, doit-on aussi donner une correction polycopiée ou exiger que la copie soit corrigée ?

50. Doit-on obligatoirement (comme au DNB ou au Bac) compter des points de présentation ?

51. Comment évaluer de façon juste une classe très faible ? Si je mets de notes un peu « gonflées » j'ai peur que certains veuillent aller en première S, si je mets des notes basses les élèves vont se décourager...

52. Comment noter un DM quand plusieurs élèves rendent exactement le même devoir ? (fautes, phrases, ...)

53. Pour les DM, trop d'élèves se contentent de recopier le travail de certains de leurs camarades. Comment l'éviter ?

54. Quelle est la longueur type d'un contrôle pour une classe de 2de et comment savoir le degré de difficulté que l'on peut proposer ?

55. Vaut-il mieux faire un DS trop long, quitte à ne pas noter les exercices non abordés, ou alors plutôt pas trop long ?

56. Si des élèves sont absents à un DS trimestriel (sachant qu'il y en aura trois), faut-il leur faire rattraper ?

57. Y a-t-il un bon moyen de rendre une correction efficace ? Par exemple, j'ai demandé à mes élèves de corriger et commenter les erreurs … Utopique mais très bien en théorie (il me semble).

58. Comment adapter le travail pour des élèves ayant des problèmes (dys...) ? Faut-il mettre en place un autre système de notation ?

59. J'ai un élève qui a le bras cassé. Pour les contrôles, il n'a droit à aucune aide. Comment faire ?

60. Peut-on sanctionner l'orthographe lors de devoirs ?

61. Comment réagir face à la panique d'un élève durant un contrôle (larmes, n'arrive plus à réfléchir,...)? Faut-il adapter sa notation ?

62. Comment organiser un contrôle avec des élèves ayant droit au tiers temps supplémentaire ? Coefficient multiplicateur ? Contrôle moins long ? N'ayant pas encore de photocopieur (collège neuf), nous sommes obligés pour l'instant de projeter le contrôle.

63. Est-il intéressant de faire un exercice « bonus » dans un contrôle et de mettre des points de présentation ?

64. De petits tests assez basiques sur le cours sont-ils efficaces ? Avec quelle fréquence ?

Prochaine séance de séminaire, le mardi 10 novembre.

Bonnes Vacances... Studieuses !

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2009-2010

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 8: mardi 10 novembre 2009

Programme de la séance. 1. Faisons le point ! // 2. Évaluation et développement // 3. Forum des questions // 4. Observation & analyse

On rappelle que les élèves professeurs du deuxième groupe (tous ceux qui n'ont pas assisté a u premier TD...) auront TD TICE le mardi 17 novembre de 17 h 20 à 18 h 50. Il est demandé à ceux qui en disposent de porter leur ordinateur portable.

1. Faisons le point !

À travers le questionnaire d'évaluation renseigné le 13 octobre 2009. 52 questionnaires ont été rendus.

Voici les aspects de la formation qui sont vus positivement.

Certains citent d'abord la ***formation*** dans son ensemble :

La formation est source de nombreuses questions, elle permet une remise en cause permanente.

Dans le cadre de la formation en établissement qui suscite beaucoup de questions, la formation IUFM permet de répondre (ou de donner des éléments permettant de réfléchir) à beaucoup d'entre elles.

L'interactivité possible avec les différents membres de la formation ; pouvoir poser des questions et obtenir des réponses : immédiates avec le PCP, un peu différées à l'IUFM.

La formation de « fond » : formation en didactique approfondie, réponse à de nombreuses interrogations à froid, et abstraction et analyse du travail de terrain.

La formation me permet d'appréhender avec une vue nouvelle et riche toute mon expérience passée d'enseignant et de voir avec clarté que ce soit à travers le GFP ou le séminaire de didactique l'enseignement des maths dans le secondaire.

Il est intéressant, pour cette année de stage, d'avoir plusieurs interlocuteurs (formateurs, autres stagiaires, PCP, …) et des moments aménagés pour poser des questions, exposer nos difficultés.

La formation permet de mieux comprendre notre métier d'enseignant, ses obligations et les objectifs que l'on se donne pour avoir une meilleure pratique (étude des textes de lois, des

programmes, analyse d'AER)

On notera que l'existence d'une formation professionnelle au sein d'une École n'est pas anodine : cet état de fait existe en France pour les professeurs du second degré depuis 1991 seulement, date de la création des IUFM. La situation que nous connaissons est en train de changer et si une formation professionnelle perdurera, on n'est pas sûr que perdure l'École en tant qu'institution bien identifiée.

Certains insiste sur les ***aspects didactiques*** de la formation :

> Aspect didactique de la formation : définir d'abord les types de tâches...
>
> La formation à l'aide de la praxéologie pour les séquences. Mon expérience me faisait travailler plutôt à l'intuitif et ce n'était pas toujours le mieux pour les élèves.
>
> Le fait d'avoir distingué et identifié les différents éléments de l'organisation mathématique ce qui nous permet de mettre des mots sur ce que j'avais du mal à exprimer.
>
> La découverte de ce qu'est la didactique à travers le GFP, les séminaires et les dialogues avec mon PCP. C'est très plaisant de découvrir un outil qui permet de prendre de la distance et d'apporter une critique constructive de notre travail.
>
> Le travail sur la préparation d'un thème et les explications données sur les diverses étapes didactiques est très formateur.

Une seule réponse fait apparaître seulement le dispositif du ***Séminaire***, à travers le forum des questions, et ce dispositif apparaît ***lié au GFP*** qui permet l'étude du travail qui y est mené.

> Le suivi des études (du séminaire) en GFP. (Les questions posées par le tuteur pour nous aider à mieux comprendre les notions du séminaire.)
>
> Les séances de GFP qui permettent de consolider les acquis des séminaires. Être encadrée par un professeur qui est dans le même établissement ce qui facilite l'apprentissage du métier de professeur.
>
> Le GFP est très clair et permet une meilleure compréhension des notions explicitées en séminaire.
>
> Les séances de GFP, en particulier les séances de réponses aux questions (effectuées aussi dans le séminaire)
>
> Le GFP est un bon moyen de revenir sur des choses qui n'ont pas été comprises en séminaire et de poser des questions vives en lien avec le métier.
>
> Le suivi de terrain en GFP qui permet d'utiliser le vocabulaire du séminaire.
>
> Le GFP et le forum des questions sont très utiles

C'est le GFP qui est le point le plus souvent cité, pour l'essentiel relié au dispositif des questions vives et au « partage d'expériences ».

> Le dispositif de GFP qui permet la mise en commun d'expériences individuelles.
>
> Le GFP car on partage nos expériences. Travail avec le PCP qui m'apporte beaucoup.

Les questions « vives » des GFP.
En GFP, les questions vives (permettent de discuter des choses qui nous tiennent à cœur).
L'étude de cas concrets pour la préparation d'un cours (par exemple, le cosinus en 4^{e}) : organisation mathématique, didactique.
Le fait de partager nos expériences le mardi matin en GFP.
Le travail fait en GFP (moment d'échange sur les expériences, les conseils, ...)
GFP, la possibilité d'exprimer nos propres problèmes rencontrés.
Le moment « questions vives » en GFP.
Le partage des expériences en GFP dans lequel on se reconnaît.
Le tuteur de GFP est toujours à l'écoute de nos problèmes.
Dialogue ouvert en GFP.
Les GFP avec les questions vives. On peut échanger sur nos problèmes, comparer nos expériences.
Les échanges permanents avec notre tuteur en GFP sur tout type de questions.
Pouvoir avoir une approche pratique et le recul des GFP pour répondre aux interrogations.
Le moment des « questions vives » en GFP. Les questions personnelles chaque semaine sur papier.
L'ouverture d'esprit de M. Reymonet. Possibilité de changement de méthode de travail.
Les possibilités de dialogues et de débats avec M. Reymonet ainsi que le fait qu'il inspire confiance...

Commentaire développé oralement : le partage d'expériences atteint très vite ses limites s'il n'existe pas des savoirs qui en permettent l'analyse et l'exploitation.

La **FIT** est également vu comme étant un ***point positif*** de la formation :

Les divers stages et les formations interdisciplinaires et transversales.
La formation interdisciplinaire et transversale est intéressante car elle permet de rencontrer différentes personnes qui œuvrent aussi au sein d'un établissement et d'échanger nos points de vue.
FIT : on voit autre chose que le travail de classe. GFP.
J'aime beaucoup le FIT à laquelle je participe (des élèves venus d'ailleurs).
Stage de pratique accompagnée ; FIT : je trouve ça très intéressant de se trouver avec des professeurs stagiaires toutes disciplines confondues. On participe activement en faisant des TD et des TP.

Mais elle apparaît également comme un ***point négatif*** :

Les FIT et les GFP IT sont (pour l'instant) trop proches, c'est-à-dire que l'on parle de la même chose (prise en main de la classe) et c'est un peu trop répétitif. Les informations sur les FIT. Le GFP IT « école, autorité, conflit » est très décevant. Il n'apporte pas de réponse, selon moi, ou de piste de réponse par rapport à nos attentes. Je trouve que la formatrice qui l'anime est trop passive. Manque d'informations au sujet des FIT et GFP IT : les différents stages et horaires Manque d'information sur les FIT (on a dû faire des choix sans vraiment savoir en quoi ils consistaient). La formation FIT (Hétérogénéité des groupes : professeurs des écoles, professeurs de l'enseignement technique.) Manque d'information sur les FIT et les GFP IT : on ne sait pas en quoi consistent les modules, ni quand commencent les GFP IT, jusqu'à la veille de la première séance des GFP IT. Les conférences FIT trop détachées du terrain. On ne nous prévient pas lorsqu'il y a de nouveaux modules ; il faut se renseigner seul sur internet. Maintenant ça va car j'ai bien compris qu'il fallait que je consulte mon dossier régulièrement mais au départ je ne le savais pas et j'ai failli manquer un module. De plus si on n'a pas de connexion internet, on n'a pas d'autres moyens de connaître nos emplois du temps. Certains enseignement de l'IUFM ne nous positionnent pas assez en tant qu'adultes, on reste dans une situation d'étudiants (entre autre en FIT), voire d'élèves... et inconsciemment nous nous comportons en élèves. Je trouve qu'on est souvent pris pour des enfants par l'encadrement de certains ateliers.

Commentaire sur l'opposition adultes / étudiants voire élèves

Certains ***aspects du travail en GFP*** sont également considérés comme des points négatifs :

La mise en place du stage de pratique accompagnée semble difficile. Je n'aime pas trop le peu de motivation et de participation dans le cadre du GFP. On n'apprend pas assez à utiliser les logiciels de géométrie. En GFP, je trouve qu'on n'a plus le temps de raconter ce qui se passe dans nos classes. On ne fait plus assez de tour de table. Lors des GFP certains membres peu actifs ne sont pas assez sollicités, il y a souvent peu de volontaires (et ce sont toujours les mêmes).

Certains aspects du travail autour des **TICE** sont également jugés négativement :

On n'apprend pas assez à utiliser les logiciels de géométrie. En GFP, je trouve qu'on n'a plus le temps de raconter ce qui se passe dans nos classes. On ne fait plus assez de tour de table.

Dans les TICE, comme je n'ai pas de répondant, je laboure avec difficulté et ça va trop vite pour moi. Les formations TICE trop condensées. D'avoir la formation TICE si tard et seulement sur ordinateur. On ne connaît pas forcément bien les calculatrices du Lycée. Avoir la formation TICE tard après trois heures de séminaire... Vocabulaire du séminaire un peu lourd.

Certains citent plus nettement ***le travail théorique et*** le dispositif dans lequel il prend place, ***le Séminaire*** :

Je trouve que le séminaire est fait de façon trop linéaire, il n'y a pas assez d'interactivité. Cela est peut-être dû à l'horaire ; je pense que le matin cela passerait mieux. GFP-IT : on commence à un peu trop répéter certaines choses déjà vues. Personnellement, le séminaire serait plus facile à suivre le matin que lors des « petites heures » de l'après-midi (difficulté d'attention pendant trois heures l'après-midi). La forme des séminaires *i.e.* Un peu trop vus comme des « monologues ». La grande distance entre le contenu du séminaire et nos capacités à l'assimiler... (certaines choses paraissent inaccessibles. L'aspect trop théorique des séminaires. Le côté parfois un peu trop théorique dans les séminaires, notamment dans le vocabulaire qui fait que l'assimilation des notions prend du temps. On manque parfois de cap, l'organisation temporelle des questions \ réponses est un peu « déroutante ». Le fait de ne pas savoir ce que l'on attend de nous, i.e. On nous parle d'AER, de synthèse ; on étudie des rapports de séances alors qu'on n'a jamais eu l'occasion d'analyser une séquence « modèle », ce qui nous laisse dans le brouillard. Le manque d'exemples concrets sur les AER et les critiques de séquences de cours. La formation manque (tout au moins pour l'instant) d'exemples concrets nous permettant de bien analyser les OM et OD. Les conseils que l'on nous donne restent tout de même assez abstraits (termes employés non définis). Beaucoup de termes employés non définis. Le vocabulaire relatif à tous les aspects didactiques est introduit et utilisé trop rapidement (temps d'assimilation des termes un peu court). Travail d'une organisation mathématique sur une séance : un peu long et surtout du mal à comprendre l'objectif J'ai posé deux questions en GFP et rendu deux travaux en séminaire sur lesquels je n'ai eu aucun retour..

Commentaires développés oralement
La difficulté du séminaire n'est pas une question d'horaires : c'est une difficulté objective, liée au fait que l'on y fabrique du savoir. À cet égard, penser que ce que l'on y étudie est inaccessible ne facilite pas l'attention que l'on doit y porter.

Il faut prendre garde au fait que penser que ce qu'on y fait est « trop théorique » participe d'une péjoration du métier auquel on prétend accéder et, par là, des savoirs qui sont pertinents pour l'élaboration des praxéologies professorales.

De même, la question de la définition des termes ou du vocabulaire masque le fait que l'on introduit des concepts et que l'on a à étudier une science neuve, ce qui ne se fait pas « immédiatement et à coût nul ». (Est-ce qu'on imaginerait le même discours tenu à propos d'un cours de mathématiques ?)

Ainsi par exemple pour la notion de topos qui a été introduite « officiellement » lors de la dernière séance du Séminaire, une définition a été donnée que nous reproduisons ci-dessous :

Topos
Les types de tâches d'étude sont des types de tâches coopératifs : ils comprennent un ***rôle*** dévolu au ***professeur*** et un ***rôle*** dévolu à l'***élève.*** L'endroit, le lieu, où chacun d'entre eux intervient en autonomie est nommé le ***topos.*** On pourra dire ainsi que la correction des copies fait ordinairement partie du *topos* du professeur ou encore que, lorsque le professeur demande aux élèves de chercher un problème, cette recherche fait partie du *topos* de l'élève. Un grand problème de la fabrication des organisations de l'étude est d'arriver à ménager suffisamment de *topos* aux élèves, et que ceux-ci arrivent effectivement à l'occuper.

On le voit à travers la dernière notation, la question essentielle est d'arriver à fabriquer des techniques de direction d'étude qui ménagent suffisamment de *topos* aux élèves et c'est cela qui va occuper une bonne partie de la formation et qui constitue la difficulté principale. Pour le dire autrement, le problème n'est pas d'entendre la définition de la notion de topos en tant que telle, isolée, mais de voir la praxéologie didactique qu'elle va permettre de justifier et la manière dont elle va s'intégrer à la praxéologie en cours d'élaboration autour de la conception et de la réalisation d'une organisation didactique relative à une organisation mathématique donnée.

Certains évoquent encore le ***décalage temporel*** entre les exigences du métier et celles de la formation, ou encore le décalage entre leurs attentes et celle d'une formation à un métier.

La gestion de crise : certains aspects de la formation paraissent trop intellectualisés et ne permettent pas de donner des réponses rapides et applicables immédiatement.

Le décalage entre l'IUFM et le stage en responsabilité ; on travaille l'élaboration d'un thème alors qu'on a été obligé d'en préparer au moins un dans l'urgence de la rentrée.

Décalage temporel entre les questions que l'on se pose et les réponses que l'on nous apporte.

Le fait que les questions mises par écrit le mardi matin ne soient traitées que la semaine suivante, ce qui entraîne des répétitions ou des questions qui ne sont plus d'actualité. On pourrait vous les envoyer par mail le dimanche pour le mardi.

Le fait que la formation commence après le début des premiers cours avec les élèves. Nous n'avons pas assez de recul par rapport à ce qui est fait en séminaire pour l'appliquer dès le début, cela prend du temps de le mettre en place, temps que l'on n'a pas. Regroupement de personnes qui ne sont pas dans la même situation. Le fait d'être avec des stagiaires IUFM lors des séances de GFP pose quelquefois soucis, dans le sens où certains aspects des stages ne nous concernent pas et c'est une heure de perdue par semaine. Le fait que l'on apprenne à organiser un cours un peu trop longtemps après avoir pris nos classes en main. Être avec des stagiaires « normaux » en GFP lors de périodes les concernant uniquement (environ une heure sur trois). Et évidemment l'éloignement. Parfois le manque de réactivité, en particulier sur les questions que l'on pose, nous avons les réponses une fois la difficulté rencontrée. Cela servira pour le reste de la carrière... L'impression d'avoir un peu été lâché dans la nature au début de l'année. Le fait de répondre aux questions parfois tardivement. Le volume horaire des formations. Je trouve que les formateurs sont plutôt fermés au dialogue, ils ont une vision déjà toute faite du métier et ne prennent pas assez en considération nos remarques. Même si au final ils ont raison, il serait mieux de nous convaincre plutôt que d'imposer leurs idées.

Commentaires développés oralement

On voit là jouer des contraintes qui échappent à la formation, par exemple le fait que les élèves professeurs aient une formation en même temps que des classes, ou encore que les « stagiaires en situation » suivent la même formation que les « stagiaires en formation ».

On retrouve la péjoration du métier et de sa formation, notamment par le fait le contenu de la formation est vu comme relevant des « idées des formateurs » et non de savoirs.

On gardera en mémoire que la formation est d'abord là pour former à ce qu'il y aura à faire dans les quelques quarante ans de carrière qui attendent la plupart des participants ; cela ne peut que couvrir assez imparfaitement qu'il y a faire cette année dans le stage en responsabilité de chacun, celui-ci devant également être vu comme une contrainte qui permet l'apprentissage.

Deux autres thèmes apparaissent comme points négatifs : la quantité de travail, jugée trop importante, et les trajets.

Tous les travaux à mettre en place (recherche de stages, rédaction de réponses,...) en plus de faire les cours, font qu'on manque parfois de temps pour préparer tout ce qu'on voudrait faire en classe. (En même temps, on ne peut pas faire autrement, il faut apprendre ce métier.) Le fait de répondre aux questions parfois tardivement. Le volume horaire des formations. Le travail demandé est trop consistant par rapport à notre volume horaire face aux élèves (15 h). Le manque de temps restant que l'on peut consacrer à l'amélioration ou à la conception de nos cours avec le cumul des 15 heures de cours et de l'IUFM. Les trajets plutôt fatigants le mardi (Avignon-Marseille: 3 heures de train). Me lever tous les matins à 6 h (voire 5 h 30 certains mercredis !)

Commentaire développé oralement
Il faut prendre garde au fait que l'amélioration des « cours » passe d'abord par un investissement suffisant dans le travail de formation, et qu'il faut voir les choses dialectiquement, en articulation.

Les deux questions suivantes concernaient le travail personnel effectué en lien avec la formation, dont il fallait donner encore un point positif et un point négatif.

Examen des réponses apportées et commentaires oraux

La mise en commun du travail de tout le monde, des questions que les autres se posent. Une plus grande rapidité à élaborer des « cours ». Une meilleure compréhension de la façon de lire les « programmes ». La mise au point d'AER est un vrai challenge, on ne sait jamais comment les élèves vont réagir, on se remet en question en permanence et c'est très enrichissant. La préparation de mes séquences de cours. Arriver à gérer de mieux en mieux les séances de travail avec les élèves. J'essaie de concevoir mon enseignement (préparation de mes cours) en prenant en compte les techniques dispensées dans le séminaire. Le fait de repérer et d'analyser différents moments d'une AER, car ça permet de mieux en comprendre la fonction. Je me suis mis à lire des livres sur les sciences de l'éducation et travailler avec un ordinateur. Les organisations mathématiques et didactiques, je comprends mieux ce que je dois faire. Relire ce qui a été fait en séminaire m'apporte certaines réponses. Il est intéressant d'analyser des AER pour dégager des éléments utiles à la critique de nos propres AER. Je travaille beaucoup mes questions de la semaine en essayant d'y répondre avant de les poser en GFP. Relire les séminaires ; Rechercher des AER. Chercher à mettre en œuvre la praxéologie mathématique pour construire le cours. Le travail préparé en GFP qui est toujours corrigé de sorte qu'on comprend de suite ce qui va ou pas dans notre démarche. Il me semble avoir bien compris l'intérêt des AER et notamment l'influence que cela a sur le travail global de la classe. Je me sers énormément des conseils et "méthodes" mises en place à l'IUFM pour la préparation de mes séances. Je m'efforce d'intervenir aux « bons moments », *i.e.* lorsque les autres stagiaires n'ont pas de réponses ou formulent des réponses incomplètes... Parfois j'utilise des mots inconnus aux autres stagiaires (ressources,

raisons d'être) lorsque je pense qu'il serait nécessaire/intéressant d'aborder ces notions (lors d'explications...).

La réflexion engagée sur comment faire passer le contenu que l'on doit enseigner. Se poser des questions, toujours, tout le temps, ceci avec de nouveaux outils. Cette activité de recherche me plaît tout particulièrement.

La remise en question du travail personnel fourni quasi systématiquement

Fiches résumés réalisées sur ce qui est fait dans la formation pour pouvoir l'utiliser sur le terrain.

Le travail sur les AER.

Tout ce qui concerne l'aspect didactique, l'organisation mathématique.

Ce travail m'oblige à une certaine rigueur et une certaine organisation, chose pas très naturelle.

Le fait de cerner les différents moments de l'organisation mathématique qui me sert à créer mes propres organisations.

Mes réflexions sur la séquence étudiée au séminaire à propos des médianes d'un triangle et de la position du centre de gravité.

L'élaboration d'AER.

Je rédige le travail à faire. Je passe du temps à revoir certaines notions quand il le faut (compte rendu sur les médianes ⇔ moments de l'étude) pour faire ce qui est demandé.

Élaboration de fiches résumés de séminaire en cours (même si manque de temps pour le moment) pour appliquer les conseils sur le terrain.

J'apprends à mieux construire mon cours (AER et synthèse).

La formation me permet d'analyser plus précisément mes cours même si cela demande beaucoup de temps c'est intéressant et positif, ce ne sont pas des problèmes que je me serais posé tout seul.

Questionnement sur le métier, « le fond et la forme » du cours, etc. Remise en question perpétuelle.

Une nouvelle réflexion sur la composition d'une AER car j'utilisais déjà des activités mais plus dirigées

J'apprends à monter une AER je pense avoir compris ce que l'on nous demande mais j'ai encore du mal à l'appliquer (en progrès...).

Le questionnement que l'on doit se poser avant d'élaborer une séance avec les élèves (types de tâches ? Prérequis des élèves ? Etc.) est enrichissant.

L'échange avec les autres stagiaires qui permet de confronter les méthodes ou les solutions à certains problèmes que chacun a pu mettre en œuvre.

Le travail pour le GFP qui permet de mieux comprendre le séminaire.

La recherche demandée avant la préparation d'un cours permet l'élaboration de celui-ci très intéressante.

La formation motive, elle donne envie d'être meilleur.

J'ai amélioré grâce à ma formation, ma compréhension des enchaînements didactiques permettant aux élèves d'appréhender au mieux leur formation en mathématiques. Après chaque séance, j'essaie de reprendre mes préparations pour coller à ce qui est demandé (AER, synthèse,...) La réalisation d'une AER. J'essaie de les améliorer, de les modifier en vue de répondre au mieux aux attentes. Apprendre à discerner une organisation mathématique. Les outils dégagés lors des séances de GFP et du séminaire me permettent de mieux préparer mes cours (AER, synthèse, exercices) Une meilleure approche des problèmes qui surviennent en classe (grâce au GFP). Une analyse assez bonne de mes cours (surtout les erreurs). J'arrive à préparer un thème de façon globale. Le travail que l'on effectuera dans le stage de pratique accompagnée sera sûrement très constructif. Restructuration de séquence. Amélioration de la construction de mes séquences grâce à la formation. Préparation de mes séances de cours. La remise en question perpétuelle des raisons d'être que j'attribuais aux notions. L'apport de mon expérience que je fais partager (avec la confirmation ou l'infirmation de Madame Schneider).

Certains n'ont pas encore bien dégagé cet aspect du travail, qui consiste à identifier des gestes de l'étude productifs, et donnent comme point positif soit des résultats de ce travail personnel qui sont jugés positifs, comme par exemple le premier point suivant, ou encore, mais plus rarement, des aspects des dispositifs d'étude vus positivement :

L'élaboration d'AER.

L'échange avec les autres stagiaires qui permet de confronter les méthodes ou les solutions à certains problèmes que chacun a pu mettre en œuvre.

La plupart notent l'exploitation de la formation pour construire ou améliorer leurs praxéologies professionnelles.

Voici enfin les points négatifs relevés.

J'ai l'impression qu'il faudra beaucoup de temps pour acquérir une bonne méthode pour concevoir son enseignement. Il est assez difficile de s'organiser avec plusieurs emplois du temps : IUFM, collège, stage...

Ma capacité d'analyse des séances à partir d'un compte-rendu.

Je n'arrive pas à prendre de l'avance dans mes préparations de cours par manque de temps...

Une insuffisante compréhension de la psychologie de certains élèves.

Les séances d'explicitation me paraissent a priori laisser trop peu d'initiative personnelle et d'apport personnel au problème posé (c'est-à-dire apport issus de documents externes à l'IUFM).

Je n'ai pas très bien cadré ce qu'on veut de moi.

On nous demande d'effectuer un travail, mais on ne nous dit pas personnellement si c'est bien ou pas.

Je ne reprend pas assez les principes de l'organisation de l'activité.

La préparation de mes cours, DS, DM ou autres exercices prend souvent le pas sur le travail demandé à l'IUFM.

Début d'année scolaire difficile : je me sens très souvent fatiguée. Parfois le travail n'est pas assez efficace. Je perds beaucoup de temps à rédiger sur Open Office.

Étudier des cas lorsqu'on n'est pas directement concerné (un cas de seconde, alors qu'on est au collège) est assez difficile.

Il est encore trop tôt pour répondre à cette question.

Je travaille trop « au jour le jour » entre le travail pour l'IUFM, la préparation des cours, la gestion des élèves turbulents (nombreux...), les longues journées à Marseille (train)...

Je n'ai pas le temps de reprendre entièrement et sérieusement chaque séminaire.

Je « décroche » parfois lorsque les notions abordées me semblent trop familières, je ne note pas ce que j'ai déjà acquis... Je donne parfois trop d'infos à des stagiaires, ce qui peut les embrouiller ou les décourager.

Le manque de repères, d'éléments de référence.

J'ai parfois du mal à m'investir dans le travail dans le cadre de la formation, compte tenu du travail important qu'exige de nous le stage en responsabilité.

Actuellement, manque de temps pour étudier en profondeur le travail fait en séminaire.

J'ai du mal à m'organiser sur le travail à proposer aux élèves, comment le leur présenter, faire les corrections de DM et DS. Cela demande du travail et je n'ai pas encore pris le rythme.

Comment prendre l'essentiel du séminaire.

Le travail ne tombe pas forcément au bon moment; il y a des périodes où le stage est trop absorbant, dans ces cas-là, le travail demandé par l'IUFM passait « à côté » des préoccupations.

J'ai du mal à gérer le temps pour programmer l'organisation de l'étude.

Un manque de participation orale.

Pas de réponse.

Je ne revois pas suffisamment mes notes. Ça me paraît trop difficile de tout comprendre et trop abstrait pour le moment : j'ai du mal à bien saisir ce qu'est l'OM ou l'organisation didactique.

Le manque de temps pour investissement plus approfondi.

J'ai du mal à assimiler le vocabulaire spécifique à la formation.

Je n'ai pas assez de temps pour travailler suffisamment sur les différents aspects nouveaux qui ont été introduits.

Manque de temps pour travailler les éléments théoriques de la didactique.

Ne pas encore réussir à analyser ce qui sera mis dans la synthèse et ce qui pourra être défini en type(s) de tâches et technique(s) dans le moment de travail seulement.

J'ai du mal à reprendre chaque semaine le séminaire de la séance précédente car sur ordinateur. Je dois d'abord imprimer (sinon maux de tête) et je ne peux pas forcément. A améliorer (pour moi).

Une difficulté : trouver une façon d'enseigner avec ce que nous apporte l'IUFM et avec les exigences et moyens du lycée.

Ne pas faire partie d'un trinôme.

Pour le moment, il m'est difficile de répondre.

Le flou évoqué plus haut. [Le fait de ne pas savoir ce que l'on attend de nous, i.e. On nous parle d'AER, de synthèse ; on étudie des rapports de séances alors qu'on n'a jamais eu l'occasion d'analyser une séquence « modèle », ce qui nous laisse dans le brouillard.]

J'ai tendance à me désintéresser totalement de ce qui me paraît inaccessible.

Je n'arrive pas à construire d'AER réellement satisfaisante.

Difficulté d'utilisation du vocabulaire technique. Je reste encore trop « étudiant ».

J'ai du mal à gérer mon temps, entre le travail pour les élèves et le travail de l'IUFM. Je ne travaille pas assez les séminaires.

Je ne reprends pas assez les notes du séminaire.

Pas de réponse.

Les termes plutôt compliqués du séminaire me laissent souvent perplexe et je ne prends pas forcément le temps de les chercher.

Ce travail arrive un peu tard puisque j'aurais bien aimé le faire au début de mes états de service en tant que contractuel.

Pour être vraiment efficace mon travail personnel devrait être plus intense. J'aurais préféré le commencer dans mes formations précédentes.

J'ai du mal à mettre en place une vraie AER.

Par manque de temps, il est impossible de travailler correctement le séminaire avec 15 heures de cours effectives plus les copies et préparations. Difficulté à gérer des heures de travail pour les élèves et des heures de travail pour la formation. Je ne reprends pas assez régulièrement chez moi les éléments théoriques afin d'analyser ce qu'ils apporteraient dans la construction des cours. J'ai eu du mal à comprendre ce qui était réellement une AER, comment la mettre en place. J'ai un manque de motivation de mes élèves en AER à cause du contenu de mes AER.

Du point de vue des aspects négatifs, la question du manque de temps est évoquée assez largement, notamment pour justifier le fait de ne pas suffisamment travailler les notes du Séminaire, ou plus généralement les éléments de la formation. Il faut faire des choix et se donner le temps de travailler les savoirs pertinents pour le métier, faute de quoi on ne peut espérer progresser et le temps alloué à la préparation de la classe ne portera pas fruits.

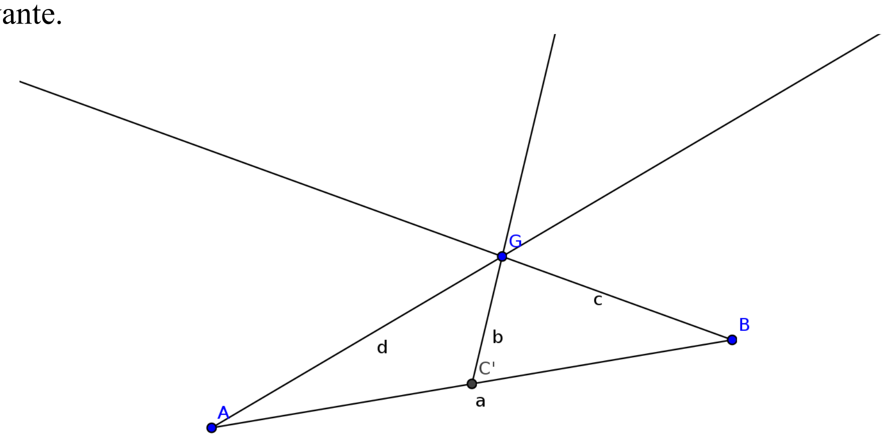
2. Évaluation & développement

On rappelle qu'il s'agit ici de juger positivement ou négativement les éléments que l'on a mis en lumière dans l'analyse (évaluation), puis de proposer des voies d'amélioration des points jugés négativement (développement).

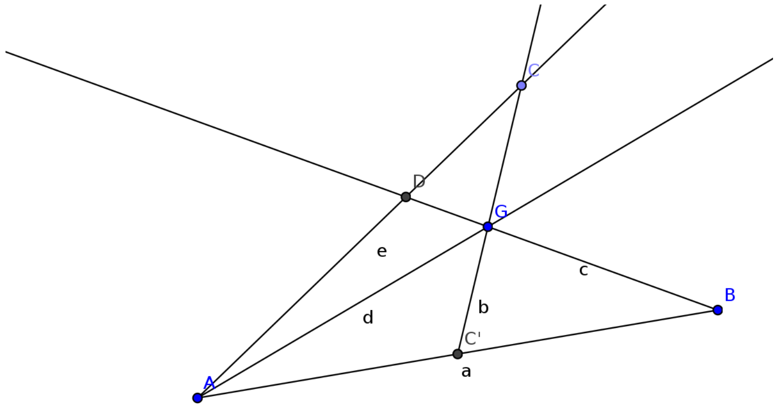
Nous poursuivrons ici le travail débuté lors de la séance précédente.

Nous avons signalé, au moins oralement au cours du travail, que l'un des problèmes posés par la séance est le fait que ce n'est pas l'étude du problème par les élèves qui fait émerger l'élément technologique clé, mais que cela survient après une rupture provoquée par le professeur, ce point étant jugé négatif parce qu'il nuit au *topos* des élèves. Mais on ne sait pas encore véritablement si ce point est lié au problème considéré ou s'il s'agit d'un problème de la direction d'étude de P. Nous prolongerons ici le travail en esquissant un développement pour nous former un jugement à ce propos.

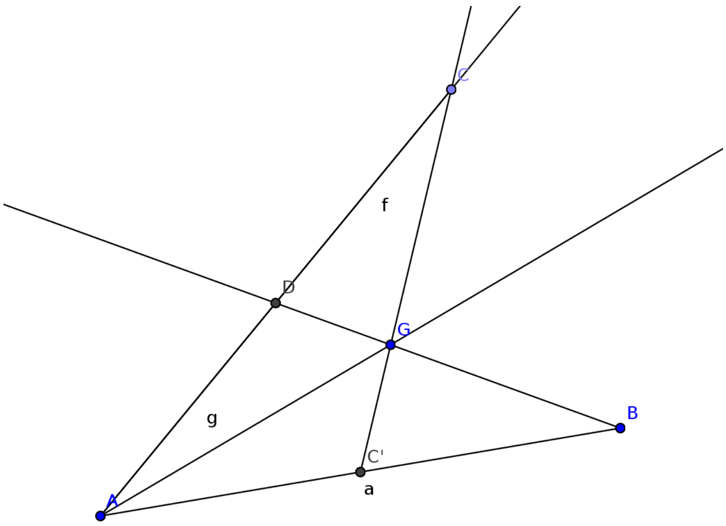
Supposons d'abord que l'on veuille suivre la proposition de l'élève qui avait été envoyé au tableau, à savoir faire en sorte en faisant « glisser la règle » de placer C sur la demi-droite [C'G) tel que le milieu du côté [AC] soit sur la demi-droite [BG). Pour cela, on considère la figure Geogebra suivante.



On place alors un point C sur la demi-droite [C'G), on nomme le point d'intersection D de (AC) et de [BG)et on mesure AD et DC.



On déplace alors C de façon à ce que DA=CD.



On vérifie que l'on a CE=EB où E est le point d'intersection de (AG) et de (BC).

On obtient une construction approchée, qui n'est pas « à la règle et au compas », mais qui a l'avantage de constituer une figure complète qui permet de poursuivre l'exploration. Nous matérialiserons cette poursuite de l'exploration par une suite de ***questions cruciales***.

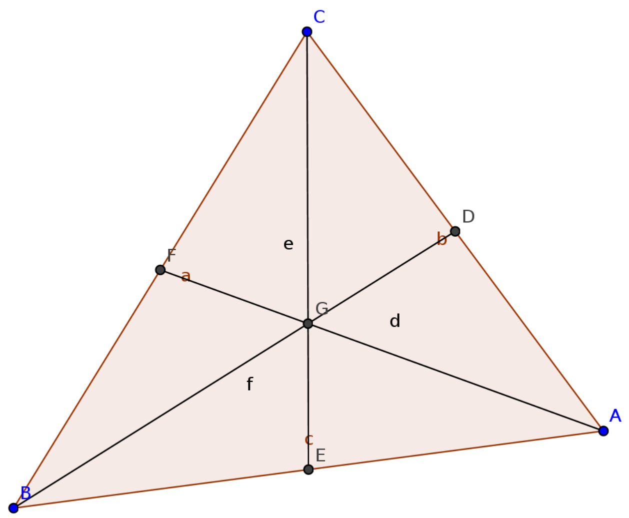
On a essayé en effet de construire C comme intersection de deux droites, et cela n'aboutit pas. Pourrait-on faire autrement ? En plaçant C sur la médiane [C'G).

Qu'est-ce qu'il faudrait savoir pour placer C sur cette médiane ?
La longueur de la médiane... on peut pas l'avoir ; quoi d'autre ?
Si on savait que G est au milieu de la médiane, on pourrait conclure.
Est-ce que G est au milieu de la médiane [C'G) ?

Expérimentons. On mesure CG et C'G sur la « figure approchée » que nous avons obtenue , ça n'est pas le cas.

Voir la figure médiane_approchée.ggb sur Espar

On construit une « figure exacte », à partir d'un triangle ABC donné, et G n'est pas au milieu non plus.



Mais on a dans les deux cas que CG = 2GC'. Est-ce que c'est toujours vrai ?
L'expérimentation à partir de la « figure exacte » confirme le résultat.

Voir la figure médiane_exacte.ggb sur Espar.

On peut donc placer C sur la médiane [C'G) de façon à ce que GC = 2GC'.

Ce qui fait la différence avec la séance observée, c'est que l'on considère que l'on a disposition un ordinateur avec un logiciel de géométrie et une technique d'expérimentation qui repose sur ce dispositif : c'est cela qui permet d'étendre le topos des élèves. Bien entendu, on pourrait étendre le topos des élèves de la « même manière » en utilisant une expérimentation « papier /crayon » dont il faudrait alors prévoir les modalités : par exemple, pour la figure exacte, on fera faire un triangle à chaque élève de manière à avoir une base expérimentale suffisamment étendue pour conclure. Dans les deux cas, il faudra prévoir un dispositif pour recueillir les données.

On notera pour terminer que l'on a rencontré, dans l'esquisse de développement précédent, ***deux grandes fonctions des TICE***, que nous avions également rencontrées dans le premier TD : ils permettent de fournir des ***moyens d'augmenter le topos des élèves dans la réalisation des moments exploratoire et technologico-théorique***. Bien entendu, ça n'est pas une propriété intrinsèque des TICE, elle dépend beaucoup de la constitution de l'organisation de l'étude par le professeur et de sa direction d'étude. Par exemple, dans ce qui précède, l'utilisation de l'informatique développe le topos des élèves parce que le professeur met à leur charge ***la question de la mise à l'épreuve des***

assertions qu'ils produisent. Il faudrait en outre que la constitution des figures permettant l'expérimentation soit élaborée avec la classe, même si c'est le professeur qui réalise le travail à l'ordinateur – cela pourrait bien entendu être un élève ; que la question des traces écrites soient gérées de façon à ce que les élèves disposent des éléments nécessaires pour nourrir leur réflexion ou encore que le professeur donne, à certains moments, du temps de réflexion personnelle aux élèves.

Deux questions rejoignent les problèmes que nous venons de signaler.

Comment inciter avec des mots clés les élèves à chercher pendant une séance ? Ils lâchent souvent au bout de deux-trois minutes. (3e, 8)

Réponse express
On notera d'abord que deux ou trois minutes suffisent quelquefois pour faire avancer le travail. Mais il ne faut pas négliger le fait que, si les élèves relâchent leur effort, c'est très souvent parce qu'ils ne disposent pas d'un *milieu* suffisant, soit des éléments nécessaires pour agir et valider leur propositions, que ces éléments soient relatifs aux savoirs antérieurement étudiés ou encore matériels (TICE, traces écrites suffisantes notamment). C'est cela que nous avons fait émerger dans le travail de développement précédent : nous avons enrichi le milieu de façon à ce que les élèves puissent faire des propositions, s'en saisir et examiner leur validité.

Les séances sur ordinateurs sont certes appréciées des élèves, mais tournent vite au chahut et ne laissent pas de traces écrites alors qu'ils travaillent peut-être même plus, en tout cas plus activement, que pendant une séance d'exercices « classiques » par exemple. Faut-il éventuellement la faire précéder d'une séance de préparation, ou demander un compte-rendu écrit qui pourrait être fait à la maison ? (2de, 8)

Réponse express
Les traces écrites ne se génèrent pas spontanément. Il faut prévoir un dispositif pour cela au préalable, qui ne soit pas seulement un compte rendu écrit à faire hors classe, même si une partie peut être laissée en travail hors classe. Le chahut vient souvent du fait que le professeur ne gère pas véritablement le collectif pendant ce type de séances : là encore, il faut prévoir un dispositif permettant de scander l'avancée du temps de l'étude et un retour au collectif régulier, avec des bilans d'étape.

Pour compléter, nous examinerons un extrait vidéo correspondant à la réalisation d'un moment technologico-théorique utilisant les TICE.

Commentaires développés oralement

On a notamment mis en évidence le dispositif utilisé par le professeur pour garder des traces écrites de l'expérimentation : envoyer un élève au tableau noter le travail effectué. On trouvera ci-dessous ce qui figurait dans le cahier d'un élève. Les traces écrites auraient pu être utilement complétées par quelques figures données par P à l'issue de la séance.

Pour tracer (AC) ; il faut 2 points.
Ici, on en a qu'un : le point A.
Il faudrait trouver un autre point
qui est sur (AC), et sur la feuille.

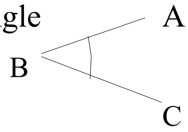
Les diagonales [AC] et [DB] se coupent, en un point O

<u>Avec le logiciel cabri-géomètre.</u>

On a tracé un parallélogramme ABCD.
On a tracé les diagonales
On mesure [BO] et [OD] pour savoir,
Si O est le milieu puis on fait pareil
avec [AO] et [OC].
On a bougé les droites et on remarque que O
est bien le milieu des segments [DB] et [AC].
<u>Propriété (admise)</u> : <u>Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses diagonales se coupent en leur milieu.</u>

3. Forum des questions

Les angles en 5e

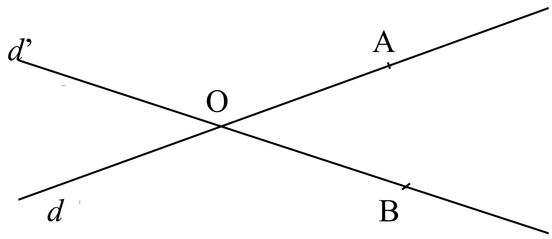
Comment différencier la notation pour les angles et la notation pour la mesure de l'angle car on note $\widehat{ABC}$ l'angle  mais on note aussi aussi $\widehat{ABC}$ = 36°. (5e, 7)

À propos de la notation des angles et de leur mesure, nous étudierons le développement suivant, extrait des notes du séminaire 2002-2003.

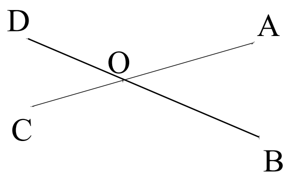
Quelle notation exiger pour les mesures d'angles ? (4e, 10)

Matériaux pour une réponse

1. Sur la figure ci-après, les droites sécantes *d* et *d'* déterminent quatre ***secteurs angulaires***.



Le secteur angulaire qu'on peut noter par exemple (pourquoi pas ?) ⟨[OA), [OB)⟩ est une ***partie du plan***, qui s'écrit encore $d'_A \cap d_B$, où d'_A est le demi-plan fermé déterminé par *d'* et contenant A et d_B le demi-plan fermé déterminé par *d* et contenant B. En revanche l'angle $\widehat{AOB}$ désigne une ***grandeur*** (d'un genre particulier !) : c'est l'***angle*** du ***secteur angulaire*** ⟨[OA), [OB)⟩, comme on parle de la ***longueur*** ℓ d'un ***segment*** [AB]. C'est ce qu'on reconnaît implicitement quand on écrit – selon l'usage – une égalité telle



$$\widehat{AOB} = \widehat{COD}$$

Celle-ci dénote en effet l'égalité de deux angles, non l'identité de deux secteurs angulaires : ici, les angles sont égaux – sont une seule et même entité – tandis que les secteurs angulaires sont deux régions du plan qui n'ont en commun que le point O. De la même façon que toutes les longueurs mesurées en kilomètres par le nombre 6 (par exemple) sont ***égales***, c'est-à-dire sont ***une seule et même longueur***, notée 6 km, de même tous les secteurs angulaires dont l'angle est mesuré en ***degrés*** par le nombre 37 sont notés 37 ° : on aura ainsi : $\widehat{AOB} = \widehat{COD} \approx 37$ °.

2. Seul le ***degré*** (décimal) est utilisé au collège. En 2de s'introduit le ***radian***, dont la notation actuelle est rad. Un angle de 60 ° est ainsi un angle de $\frac{\pi}{3}$ rad, soit environ 1,05 radian ; on a l'égalité : 60 ° = $\frac{\pi}{3}$ rad. Si traditionnel soit-il, l'oubli de l'unité d'angle a des conséquences fâcheuses, comme le

montre cet extrait d'un compte rendu d'observation d'une séance en classe de seconde :

P reporte au tableau les indications de la feuille de travail, puis, en indiquant sans autre façon que « la notation, c'est radian », complète rapidement :

$$35\ ° = \frac{7\,\pi}{36}\ \text{rad}$$

$$60\ ° = 2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$110\ ° = \frac{11}{18}\pi$$

Elle rajoute alors la notation rad, oubliée dans les deux égalités précédentes, puis continue :

$$90\ ° = \frac{\pi}{2}\ \text{rad}$$

Cela fait, elle enchaîne aussitôt : « Donc vous prenez votre cours. »

3. Sans entrer ici dans toute la complexité mathématique du problème de la mesure des angles, on peut rappeler quelques éléments ***essentiels*** que doit mettre en œuvre tout enseignement élémentaire de ce sujet.

• Pour mesurer un angle, l'idée de base est de mesurer l'arc qu'il intercepte sur un cercle de rayon R centré en son sommet.

• Cette mesure est *a priori* mal définie, puisqu'elle dépend du rayon R. Pour cette raison, on choisit une unité u de mesure ***des arcs*** qui soit proportionnelle au rayon R, et donc à la longueur d'un cercle de rayon R.

• Si l'on prend pour unité u la longueur d'un arc égal à la n-ième partie du cercle, on a $u = \frac{2\,\pi\, R}{n}\ell$, où ℓ est l'unité de longueur choisie dans le plan (centimètre, etc.). L'angle correspondant est dit alors d'un ***degré*** si $n = 360$, d'un ***grade*** si $n = 400$, etc. Ainsi, pour $n = 360$, un angle interceptant un arc dont la longueur vaut les $\frac{3}{8}$ de la longueur du cercle, soit un arc de longueur $\frac{3}{8}nu = 0{,}375\ nu$, est un angle de 135 degrés (noté 135 °).

• Si l'on prend pour unité u la longueur du cercle, c'est-à-dire si $n = 1$, on a $u = 2\pi R\ell$. L'angle correspondant est dit alors d'un ***tour***. Ainsi un angle interceptant un arc dont la longueur vaut les $\frac{3}{8}$ de la longueur du cercle, soit un arc de longueur $\frac{3}{8}u = 0{,}375u$, est alors un angle de 0,375 tour (ou de trois huitièmes de tour).

• Si l'on prend pour unité u la longueur d'un arc ayant même longueur que le rayon R du cercle, on a $u = R\ell$. L'angle correspondant est dit alors d'un ***radian*** (du latin *radius*, rayon). Ainsi un angle interceptant un arc dont la longueur vaut les $\frac{3}{8}$ de la longueur du cercle, soit un arc de longueur $\frac{3}{8}(2\pi\ u) = 0{,}75\pi\ u$ est alors un angle de 0,75π radians, ou $\frac{3\,\pi}{4}$ radians (noté 0,75π rad, etc.).

• Les conversions de mesures peuvent se faire par un calcul ***qui rend inutile tout tableau de proportionnalité***, à partir des égalités de base : 180 ° = π rad, 1 tour = 2π rad, etc. On a ainsi : $\frac{3\pi}{4}$ rad = $\frac{3}{4}$(π rad) = $\frac{3}{4} \times 180$ ° = 135 °. Inversement, 135 ° = $\frac{135}{180} \times 180$ ° = $\frac{135}{180} \times \pi$ rad = $\frac{3}{4} \times \pi$ rad = $\frac{3\pi}{4}$ rad. De même, $\frac{3\pi}{4}$ rad = $\frac{3}{8}$(2π rad) = $\frac{3}{8}$ tour = 0,375 tour.

4. Pour une unité d'angle donnée, u, soit a le réel tel que $a\,u$ = 180 ° = π rad = … Soit Cos_a et Sin_a les applications de $\left[0\,;\frac{a}{2}\right]$ définie par : $\mathrm{Cos}_a(x) = \cos x\,u$ et $\mathrm{Sin}_a(x) = \sin x\,u$, où cos et sin sont les notions définies au collège. On admet ici que l'on a : $\frac{d}{dx}\mathrm{Sin}_\pi(x) = \mathrm{Cos}_\pi(x)$. Comme $a\,u$ = π rad, il vient : $\mathrm{Sin}_a(x) = \sin x\,u = \sin\left(\frac{x}{a}\,au\right) = \sin\left(\frac{x}{a}\,\pi\ rad\right) = \sin\left(\frac{x\,\pi}{a}\ \text{rad}\right) = \mathrm{Sin}_\pi\left(\frac{x\,\pi}{a}\right)$. On a donc : $\frac{d}{dx}\mathrm{Sin}_a(x) = \frac{d}{dx}\mathrm{Sin}_\pi\left(\frac{x\,\pi}{a}\right) = \frac{\pi}{a}\mathrm{Cos}_\pi\left(\frac{x\,\pi}{a}\right) = \frac{\pi}{a}\mathrm{Cos}_a(x)$. Ainsi, on aura $\frac{d}{dx}\mathrm{Sin}_a(x) = \mathrm{Cos}_a(x)$ si et seulement si $a = \pi$, c'est-à-dire si et seulement si u = rad. Avec des notations évidentes, on aura par exemple : $\frac{d}{dx}\sin x\,° = \frac{\pi}{180}\cos x\,°$. Telle est la principale ***raison d'être de l'emploi du radian*** comme unité de mesure des angles.

Les vecteurs en seconde (suite)

Au sujet de la notion de vecteur en seconde. Le programme de seconde introduit les vecteurs par les translations. Peut-on tout de même faire le lien avec la définition utilisant le sens, direction et longueur ? (2^{de}, 2)

Nous avions examiné la dernière fois, les éléments théoriques permettant de produire une OM relative au thème des vecteurs en seconde, et nous avions mis en évidence que l'on introduit les translations, sans toutefois les étudier comme transformations du plan, pour pouvoir définir les vecteurs à l'aide des translations, et en ayant que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ si [AD] et [BC] ont le même milieu ; on fait le lien avec la caractérisation de « l'équipollence » en termes de parallélogramme ; puis on définit la somme de deux vecteurs et le produit d'un vecteur par un réel, le tout en liaison avec la géométrie plane repérée de façon à étudier des problèmes d'alignement, de parallélisme ou encore d'intersection de droites. En revanche le programme ne mentionne plus la caractérisation en termes de direction, sens et longueur. Il nous faut donc examiner plus en détail quel était l'usage de cette caractérisation.

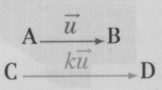
La considération d'un ouvrage de seconde conforme à l'ancien programme permet de mettre en évidence que la caractérisation en terme de longueur, sens et direction sert d'abord à définir la multiplication d'un vecteur par un scalaire.

Produit d'un vecteur par un nombre réel

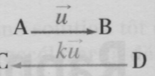
DÉFINITION 1

Soit un vecteur $\vec{u}$ et deux points A et B tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.
On appelle **produit du vecteur $\vec{u}$ par le nombre réel k**, le vecteur noté $k\vec{u}$ tel que :

- **si $k > 0$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$, le vecteur $k\vec{u}$ a même direction, même sens que $\vec{u}$ et a pour longueur kAB ;**



- **si $k < 0$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$, le vecteur $k\vec{u}$ a même direction que $\vec{u}$, est de sens contraire à $\vec{u}$ et a pour longueur $(-k)$AB ;**



- **si $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$, le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur nul $\vec{0}$.**

exemple, remarques, prolongement →

$(-1)\,\overrightarrow{AB}$ est l'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

PROPRIÉTÉS 2

Quels que soient les nombres réels h et k et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,
$h\vec{u} + k\vec{u} = (h+k)\vec{u}$, $\quad h(k\vec{u}) = (hk)\vec{u}$, $\quad k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$.

Or, la voie choisie par le nouveau programme à ce propos est autre, on l'a vu : elle repose sur le repérage et les coordonnées d'un vecteur. Les propriétés relatives à la colinéarité peuvent-elles être déduites de cette définition ?

Supposons que l'on ait l'équivalence entre $\overrightarrow{CD} = k\,\overrightarrow{AB}$ et il existe E sur (CD) tel que $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AB}$.

On obtient alors que $\overrightarrow{CD} = k\,\overrightarrow{AB}$ équivaut à (AB) et (CD) parallèles, et la caractérisation de l'alignement de trois points s'en déduit.

Les caractérisations du milieu d'un segment, $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$, $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$, s'obtiennent en utilisant la définition de l'égalité de deux vecteurs rappelée précédemment ($\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si [AD] et [BC] ont le même milieu). Si I est le milieu de [AB], [II] et [AB] ont même milieu et il vient donc que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$; réciproquement, l'égalité $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ implique que [II] et [AB] ont même milieu et que donc I est le milieu de [AB]. Comme $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ équivaut à $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} = \vec{0}$[10], on a la deuxième caractérisation et la troisième, $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$, s'obtient grâce à la relation de Chasles (que l'on peut produire avec les coordonnées) en écrivant que $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AB}$ et en utilisant la première caractérisation.

Les propriétés du type $a(\vec{u}+\vec{v}) = a\,\vec{u} + b\,\vec{v}$ s'établissent en utilisant les coordonnées.

Il reste à justifier l'équivalence entre $\overrightarrow{CD} = k\,\overrightarrow{AB}$ et il existe E sur (CD) tel que $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AB}$.

Si $\overrightarrow{CD} = k\,\overrightarrow{AB}$, on peut définir E par ses cordonnées : $x_E = x_D - \frac{1}{k}(x_D - x_c)$ et on a bien E sur (CD) et vérifiant $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AB}$. Réciproquement, s'il existe E sur (CD) tel que $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AB}$, , on considère un repère orthonormé d'origine C dont l'axe des abscisses est porté par (CD). On a alors les

10 La relation de Chasles donne que $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{II} = \vec{0}$ ce qui équivaut à $\overrightarrow{BI} = -\,\overrightarrow{IB}$. Ou encore, on peut le produire avec les coordonnées.

coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ qui sont $(x_D - x_E\,;0)$ et $x_{CD} = x_D = \dfrac{x_D}{x_D - x_E}\,(x_D - x_E) = \dfrac{x_D}{x_D - x_E}\,x_{AB}$ et on en déduit l'existence de k tel que $\overrightarrow{CD} = k\,\overrightarrow{AB}$.

L'autre utilisation de la caractérisation en terme de longueur, sens et direction était davantage technique : elle permettait de déterminer des vecteurs égaux dans une configuration. La technique consistant à repérer des parallélogrammes ou encore des segments ayant même milieu ne paraît pas d'une portée moins grande.

Il resterait à examiner la question de la satisfaction des besoins de la physique. La considération du programme de seconde de cette discipline, tout comme son document d'accompagnement, fait apparaître que la notion de force n'y est pas explicitement liée à la notion de vecteur comme permettant de la modéliser mais qu'il s'agit de mettre en évidence l'effet d'une force sur le mouvement. Cela étant, si A, B, C et D sont 4 points non alignés, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ équivaut à ABDC est un parallélogramme et équivaut donc à (AB) // (CD) (même direction), AB = CD (même norme) et D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ (même sens).

Corriger ou ne pas corriger ?

Désolé de revenir sur ce point, mais hormis pour les DS/DM/Test d'entrée/..., quels sont les critères qui permettent de remplacer une correction (exo fait à la maison / en classe) au tableau par un polycopié accompagné d'un rapport de correction ? (NC, 4^{e} & 3^{e}, 8)

La fonction de la correction d'un exercice, nous l'avons dit, participe de plusieurs moments de l'étude dont les principaux sont sans doute le travail de l'organisation mathématique mise en place et l'institutionnalisation, particulièrement des types de tâches et des techniques. On peut dès lors remplacer le travail collectif à ce propos par le dispositif évoqué par la question si (et seulement si) l'organisation mathématique enjeu de l'exercice à déjà été travaillée et mise en forme. C'est le cas par exemple quand on a fait émergé l'OM liée au(x) type(s) de tâches objet de l'exercice, qu'on a travaillé un plusieurs spécimens (3 en moyenne) et qu'on en a donné d'autres pour accroître la robustesse dans la mise en œuvre de la technique ou dans la mise en forme de la solution.

La synthèse

Quand on fait une AER et qu'on a fait apparaître plusieurs types de tâches, faut-il faire la synthèse après avoir fini l'AER ou alors alterner AER et synthèse. (2de, 8)
Quand on fait la synthèse après une activité, on réécrit les propriétés vues en activité. Les élèves ont une impression de répétition, ils se plaignent « on l'a déjà écrit ça ». Comment puis-je éviter cela ? Dois-je leur dire que l'on apprend à force de répétition ou est-ce que je ne dois pas leur faire écrire la propriété en activité ? (2de, 7)
À quelles conditions et dans quelles limites peut-on de temps en temps distribuer aux élèves un morceau de cours ou cours intégral polycopié en collège ? (4^{e} & 3^{e}, 7)

1. On signalé plusieurs fois déjà que l'institutionnalisation ne se réalise pas en une fois et par le biais d'un seul dispositif : la synthèse en est un mais il y a également les bilans d'étape ou encore les corrections d'exercices évoquées précédemment. La synthèse a pour but la mise en forme de l'organisation mathématique dans son ensemble et son amalgamation aux organisations mathématiques produites antérieurement : alterner AER et synthèse comme l'évoque la première question conduit généralement à une synthèse fragmentée et, par suite, à une organisation

mathématique diffractée, qui est davantage composée d'organisations mathématiques ponctuelles juxtaposées (montrer qu'une fonction du second degré est croissante, montrer qu'une fonction du second degré est décroissante, déterminer le minimum d'une fonction du second degré, déterminer le maximum d'une fonction du second degré, etc) que d'une organisation mathématique locale (au niveau du thème, du chapitre, ici par exemple les fonctions du second degré, qui conduira notamment à rassembler par les deux premiers types de tâches cités en un seul, déterminer les variations d'une fonction du second degré et à faire apparaître ce type de tâches comme permettant de déterminer le maximum ou le minimum d'une telle fonction), OML qui pourra venir s'amalgamer aux organisations mathématiques du secteur (variations des fonctions) et du domaine (les fonctions) concernés.

2. On voit se dégager déjà au moins une différence entre le bilan d'étape, qui prend place « au sein » de l'activité, ou du moins en relation étroite avec elle et dont les traces écrites figureront dans le cahier d'AER, et la synthèse : les bilans d'étapes distingueront des types de tâches que la synthèse viendra rassembler. Il en est une autre, que nous avons déjà mentionné, celle liée à l'exigence de formulation : on peut, et même on doit, accepter des formulations « approximatives », proches du travail effectué dans l'AER, dans les bilans d'étape, tandis que la synthèse fera place à une exigence de formulation plus grande et proche des formulations canoniques. Si l'on reprend l'exemple de la séance observée et analysée, on a vu que la propriété qui émerge, c'est que si [AA'] [BB'] [CC'] sont les médianes d'un triangle ABC et G le centre de gravité de ce triangle, on a AG = 2GA', BG = 2GB', CG = 2GC'. C'est cette formulation qui aurait dû être notée en bilan d'étape dans l'AER (avec le type de problèmes et la technique qu'elle permet de produire) et non la formulation « aux deux tiers de la médiane », qui aurait pu être produite à l'occasion d'un autre problème.

Cela suppose que la formulation des propriétés ne fasse pas entièrement partie du topos du professeur mais qu'il y ait coopération avec les élèves de ce point de vue. Et également que la synthèse soit différée après qu'une partie au moins du moment de travail ait eu lieu.

3. Dans le point de vue développé précédemment, où la synthèse ménage du topos aux élèves, il n'est pas envisageable de donner une synthèse polycopiée élaborée par le professeur : c'est d'ailleurs un aspect essentiel de la différence entre un cours et une synthèse ; alors qu'un cours donné à deux classes du même niveau aura la même mise en forme, une synthèse sera différente parce qu'elle portera la trace du travail effectué par la classe. En revanche, on peut pour gagner du temps et alléger le travail de copie, notamment au collège, mettre en place un dispositif dans lequel le travail de synthèse est réalisé en prenant des notes sur un transparent, un ordinateur ou un tableau numérique et donner ensuite à la classe le produit du travail effectué au lieu de le leur faire copier. On notera cependant que cela ne doit pas être systématique, la copie permettant à la plupart des élèves d'accomplir une partie du travail de mémorisation nécessaire.

4. Observation et analyse

Un nouveau compte rendu de séance est distribué : il a trait à l'observation d'une classe de seconde à propos du domaine des fonctions. Il s'agit d'analyser l'OM et l'OD relative à la partie de la séance relative à l'activité, dont nous reproduisons ci-dessous le compte rendu.

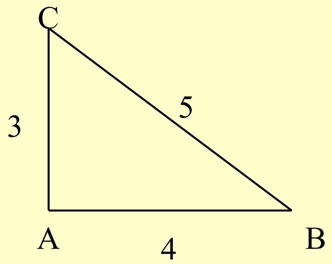
P renvoie à sa place l'élève qui était au tableau. Puis il annonce un autre exercice : « Ce sera une activité… » Il distribue l'énoncé (ci-après) et enjoint : « Vous commencez par lire l'énoncé. »

Un paysan possède un terrain qui a pour forme un triangle rectangle ABC, rectangle en A, avec AB = 4 km et AC = 3 km. Une nouvelle loi oblige notre paysan à travailler dans un champ de forme rectangulaire. Comme le paysan a construit sa grange contenant ses machines en A, il souhaite que A appartienne au champ. Enfin, pour des raisons économiques évidentes, notre paysan souhaite que son champ ait l'aire la plus grande possible. Pouvez-vous l'aider ?

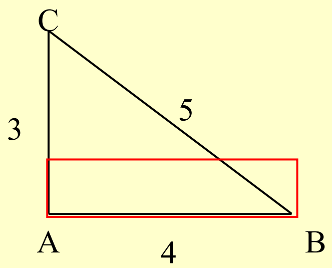
Bruissements divers. P précise que le contrôle prévu n'aura pas lieu le lendemain, mais la semaine suivante. L'élève arrivée en retard demande si elle a été appelée en AI : réponse négative. Les élèves lisent l'énoncé, certains posent des questions à ce propos. P : « Est-ce que tout le monde a lu l'énoncé ? » Réponse positive ! Il est 15 h 23. P : « Donc… »

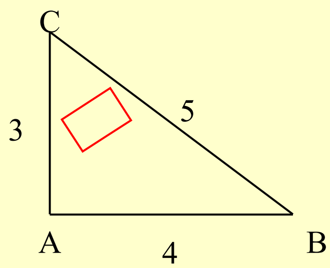
Une élève intervient : « M'sieur ! Ça a rien à voir avec les fonctions, ça ! » P réagit : « Ben si, justement, on va voir… »

L'échange avec les élèves est très vivant. P schématise la situation évoquée par l'énoncé (ci-après). Une élève pense avoir la solution ; mais ce qu'elle explique est confus. P la fait passer au tableau. Des élèves rejettent sa solution car « ça sort ». Une élève interroge : « Pourquoi ça sort ! »



P trace en rouge le rectangle proposé (ci-dessous, à gauche) ; l'élève dit avoir compris.





P précise que le rectangle doit être compris dans le triangle, parle de rectangle d'aire maximale, ajoute qu'il faut que A appartienne au rectangle… Pour le faire voir, il dessine un petit rectangle intérieur qui ne contient pas A (ci-dessus, à droite). Les élèves se récrient : le rectangle en question ne convient pas !

P : « Pour vous aider, je vais vous poser une question. » Il demande aux élèves de noter ceci :

1º) Si A est à l'intérieur ,

Il est 15 h 29. Une élève demande s'il y a un rapport avec la médiane ; P répond qu'il ne voit pas pourquoi il y en aurait un... Il poursuit :

1º) Si A est à l'intérieur , le rectangle
sort du terrain

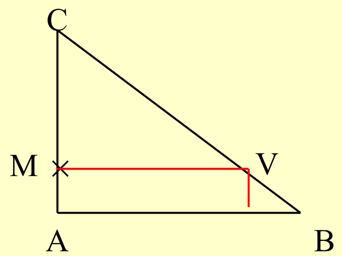
Un nouvel échange aboutit à la conclusion que A doit être un coin du rectangle. Des élèves trouvent cette conclusion évidente ; P précise : « On va l'admettre. » Il écrit :

A doit être un coin du rectangle

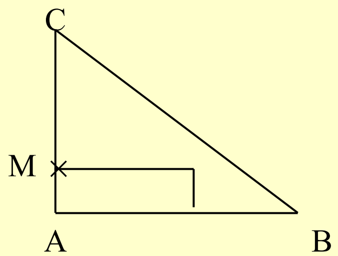
Il lance et conduit un débat de grande qualité, qui aboutit à une conclusion aussitôt mise par écrit :

Le rectangle doit être « construit sur » les côtés [AB] et [AC] du triangle

Il est 15 h 32. Une élève : « M'sieur, elle est simple, la solution ! » Mais une question est soulevée : les côtés opposés sont-ils de même longueur ? P place un point M sur [AC] et demande à l'élève au tableau de tracer le rectangle convenable ; elle le fait.



P lui demande d'expliciter ce qu'elle a fait ; elle n'y parvient qu'assez maladroitement. Puis P interroge la classe : pourquoi ne pas s'arrêter avant le bord ? Il illustre son hypothèse par un nouveau schéma :



La suggestion est rejetée : l'aire ne serait pas alors la plus grande possible !

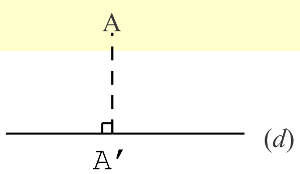
Il est 15 h 35. Une élève propose de placer M « plus haut ». P rétorque : « Justement, on va regarder. » Il écrit :

Si on prend M sur [AC]

Il s'arrête et fait préciser ce que sont les côtés du rectangle autres que ceux déjà tracés. Un élève répond fort bien. P fait ensuite préciser que l'on considère la projection… Une élève complète : « perpendiculaire ! » P poursuit sans réagir, écrivant :

Si on prend M sur [AC], on obtient le rectangle cherché,
d'aire maximale, en prenant V point d'intersection
de la parallèle à (AB) passant par M et de [BC]

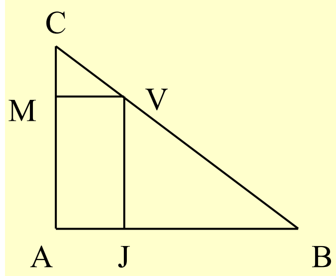
Ce faisant, P échange avec l'élève qui était déjà intervenue plusieurs fois. Il rejette sa formulation, interpelle des élèves qui parlent.



Il est 15 h 38. P parle à nouveau du « projeté orthogonal » en illustrant son propos d'une figure (ci-contre). La classe suit un peu distraitement.

Une élève conteste le vocabulaire employé et parle de projeté perpendiculaire. P précise qu'on dit « orthogonal », et fait référence à l'étymologie.

À nouveau, l'élève qui s'était déjà beaucoup manifestée prend la parole : il y a, dit-elle, plusieurs solutions. P interpelle des élèves qui ne suivent pas. (Répondant à la question « On en est où ? » que lui pose P, l'un d'eux répond avec un rien d'effronterie satisfaite : « À la dernière ligne ! ») P reprend la solution, en digressant un instant sur le thème « carré et rectangle ».



Il est 15 h 42. P rappelle que, si M est choisi, le rectangle est déterminé. L'élève : « Si on déplace M… » P fait alors un deuxième schéma (ci-contre) et interroge : « Comment on fait pour savoir lequel est le plus grand ? » Il glisse qu'on aurait obtenu le même rectangle en partant de J.

Il est 15 h 44. L'élève interventionniste fait maintenant un raisonnement à haute voix : s'autorisant de ce que les rectangles AMVJ et AJVM ont la même aire, elle conclut trop vite que tous les rectangles ont la même aire…

P écrit :

2°) Il suffit de choisir M sur [AC] pour avoir toutes les solutions au problème

Il commente : « Maintenant, on va faire varier M, etc. » Il est 15 h 46. P : « La longueur AM, qu'est-ce qu'on va en faire ? » Il clarifie sa question en y répondant : il faut prendre AM comme inconnue. Il écrit d'abord :

$AM = x$

Puis il ajoute :

$AM = x \in [0, 3]$

Il demande alors de quoi va dépendre l'aire. Les élèves répondent à côté. Il écrit :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= AM \times MV \\ &= MV \times x\end{aligned}$$

P : « Si on arrive à exprimer MV en fonction de… on aura… » Silence ! Les élèves ne voient plus. P : « L'aire va dépendre de x. Quand quelque chose varie, ça vous fait penser à quoi ? » Les élèves : « Aux fonctions ! » P s'efforce de leur faire dire que l'on va étudier le maximum de la fonction. Puis il écrit :

Calculons (exprimons) MV en fonction de x

Il est 15 h 50. P : « On est dans une configuration qui devrait vous rappeler quelque chose ! Les élèves hésitent ; débat… Finalement une élève s'écrie : « Thalès ! » P lui fait écho : « Très bien. » Les élèves applaudissent spontanément leur camarade !

P tente alors de faire expliciter le théorème : un élève y parvient, à une petite interversion près. P : « Est-ce qu'il y a un point qui n'est pas nécessaire dans cette figure ? » Des élèves : « J ! » P reprend : « Il faut l'oublier, le point J… »

Il est 15 h 55. Les élèves travaillent. La sonnerie retentit. P : « Bon, on finira demain matin ! » La séance est terminée.

On trouvera ci-dessous les traces écrites des propositions de types de tâches mathématiques enjeu de l'étude de l'activité qui ont été formulées par les élèves professeurs.

Traduire sous forme de fonctions un problème géométrique ; Traduire un énoncé par une fonction Modéliser un problème Modéliser et Schématiser une situation Optimiser une grandeur Modéliser mathématiquement une situation concrète étudier les variations d'une fonction Maximiser une fonction Chercher le maximum d'une fonction Justifier le maximum Choisir une inconnue Exprimer une longueur en fonction de l'inconnue Existence d'un rectangle d'aire maximale dans un triangle Déterminer un rectangle d'aire maximale dans un triangle

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 9: mardi 17 novembre 2009

Programme de la séance. 1. Problématique et fonctionnement du Séminaire // 2. Observation & analyse // 3. La notice Évaluation et notation // 4. Forum des questions

0. Questions de la semaine

D'une part, beaucoup trop de participants ne posent pas de questions, et cela de manière consécutive, ce qui dénote, d'un côté, une problématisation insuffisante du métier qui pénalise la progression dans le travail de formation ; d'un autre côté, une vision trop individualiste du travail de formation à accomplir. (*Développé oralement*)
D'autre part, les questions du type suivant sont encore trop peu nombreuses...

> J'ai fait une AER pour l'introduction des vecteurs dont je ne suis pas pleinement satisfaite car, si d'un point de vue compréhension de l'objet ça va, du point de vue de la nécessité d'introduire ce nouvel objet, je ne suis pas arrivé à le faire passer correctement. Auriez-vous des idées ?
>
> Est-il indispensable de justifier chaque technique ? Explication : Un des types de tâches de la classe de sixième est « savoir reconnaître des figures usuelles ». Dans un premier temps, la technique consiste à identifier les objets par rapport à leur définition (par exemple repérer un quadrilatère à quatre angles droits pour le rectangle). Donc dans la description de la technique apparaissent clairement les définitions de chaque objet, faut-il la justifier et surtout comment faire sans que ça soit rébarbatif ou trop long ?

1. Problématique et fonctionnement du Séminaire

1.1. Recherches dans les archives
La prochaine séance du séminaire aura lieu le 1er décembre 2009. Cette séance verra le travail de la rubrique « Recherches dans les archives ».

Deux exposés seront au programme de la séance du 1[er] décembre.

a) Une première recherche dans les *Archives* tentera de répondre à la question suivante :

> Que nous disent les *Archives du Séminaire* quant à la ***gestion des unités dans les calculs*** ? ***Faut-il les conserver et pourquoi*** ?

• Le compte rendu de la recherche s'efforcera de présenter (en les choisissant adéquatement) des matériaux éventuellement présents dans les *Archives* pour une réponse à la question de la semaine ci-après.

Doit-on garder les unités dans un calcul ? (JBM, 1)

• Cette recherche est confiée au trinôme formé de SC, FG et AM.

b) La deuxième recherche dans les *Archives* aura trait à la question suivante :

Que nous disent les *Archives du Séminaire* **sur la manière de mener de front l'étude de deux thèmes** ?

• Le compte rendu de la recherche s'efforcera de présenter (en les choisissant adéquatement) des matériaux éventuellement présents dans les *Archives* pour une réponse aux questions de la semaine ci-après.

Après les vacances de Toussaint on est censé « jongler » avec deux chapitres. Comment est-on censé faire ? Commencer les deux chapitres en même temps, une fois arriver au milieu d'un chapitre commencer l'autre ou bien attendre d'être arrivé aux exercices avec le premier chapitre pour commencer le deuxième ? (CP, 8) Où peut-on trouver des informations concernant l'étude de deux thèmes en parallèle ? J'ai fait des recherches dans les archives du séminaire (mot clé : « thèmes jumelés ») qui se révèlent infructueuses. (NC, 9)

• Cette recherche est confiée au trinôme formé de AB, ÉF et CP.

1.2. Faisons le point... sur la notion de PER !

On trouvera ci-dessous les réponses aux questionnaire sur les PER soumis lors de la 7^{e} séance : on rappelle qu'il s'agissait de donner un point positif et un point négatif relatif à la mise en œuvre de PER dans l'enseignement secondaire.

Elles apparaissent ci-dessous regroupées par thèmes et nous les commenterons oralement.

Un dispositif didactique plus efficace ? moins efficace ?
☺ Cela permet d'avoir une meilleure organisation didactique et de mieux comprendre le cours.

• *Installation de routines*
☺ Cela permet de travailler plus efficacement avec les élèves. On leur donne un cadre et une organisation qui deviennent familiers pour eux et leur permet de ne jamais se sentir désorientés.
☺ La dynamique de classe sera de plus en plus positive au fur et à mesure que les activités de même type apparaissent.
☺ Cela habitue les élèves à travailler sur un certain type de problèmes et crée des réflexes pour y répondre et leur permet d'acquérir une autonomie.

• *Un meilleur* topos *de l'élève*
☺ Rend vivant et cohérent l'enseignement des mathématiques. Permet de rendre les élèves acteurs dans leur processus d'apprentissage.
☺ Permet aux élèves de travailler en autonomie et mettre en commun les solutions.
☺ Les élèves construisent eux-mêmes leur « cours » ils le retiennent donc mieux.

☺ Cela entraîne les élèves à la recherche.
☺ Cela permet aux élèves de gagner en autonomie pendant les AER.

• *Une meilleure mésogenèse ?*
☺ Capitalisation des éléments didactiques qui créent le milieu pour construire en profondeur.

• *Vers une rigidification didactique ?*
☹ Cela risque de « formater » les élèves à la résolution d'un problème particulier. Ils risquent par la suite de ne pas réussir à réinvestir les notions ou techniques dans une autre situation.
☹ Occulter certains aspects d'un thème ou d'une notion. Difficulté de mise en œuvre de la notion dans une autre situation.
☹ La rigidité éventuelle d'une telle organisation, le sentiment de routine que cela peut provoquer à la longue chez l'élève.

• *Ça tue la diversité !*
☹ Les élèves sont confrontés à des problèmes « qui se ressemblent ». Ils ont donc moins l'opportunité d'utiliser des outils mathématiques dans des cadres variés.
☹ On a un peu toujours l'impression de faire la même chose, les mêmes questions.
☹ On reprend toujours le même exemple.
☹ Ils ont l'impression parfois de trop répéter les choses.
☹ Les activités seront alors moins variées.
☹ Restreindre les champs d'étude proposés aux élèves. Certains élèves peuvent ressentir une monotonie. Pour résumer : une unité s'oppose à un manque d'unité.
☹ Démotivation par manque de variété des tâches proposées.
☹ Défavorise la diversité des problèmes.
☹ Cela tue la diversité des problèmes abordés en AER.
☹ Cela borne un peu les AER et favorise moins la diversité des problèmes.
☹ Il y aura moins de diversité de cas traités.
☹ Moins d'exercices d'approfondissements et d'application (moins d'automatisme).
☹ Certains exemples conviennent mieux que d'autres à certains élèves et réciproquement. Ainsi un PER peut être un obstacle, un désavantage pour certains élèves.

C'est trop difficile pour les professeurs (débutants ?)
• *C'est dur pour les professeurs (débutants) !*
☹ Difficile à mettre en place.
☹ Difficile à mettre en place.
☹ Dur à concevoir et à mettre en place pour les enseignants débutants.
☹ C'est une organisation qui exige d'être très bien menée. J'entends par là qu'il est difficile de se raccrocher à quelque chose, si par exemple on a fait un mauvais choix d'AER.
☹ Une difficulté pour l'enseignant : il peut croire que deux ou trois problèmes sont du même type, alors qu'en dehors des apparences, ils sont de nature très différentes ; (je n'ai pas d'exemple précis en tête, mais en géométrie deux situations peuvent donner lieu à des dessins ayant beaucoup de points communs tout en étant très éloignées l'une de l'autre).

• *Le professeur doit avoir du recul ! (organisation mathématique d'un point de vue global ; raisons d'être)*
☹ Difficile à mettre en œuvre dans le sens où il faut avoir énormément de recul sur le programme et maitriser parfaitement la progression pendant l'année. Ce n'est donc certainement pas envisageable pour un enseignant n'ayant pas une grosse expérience.
☹ Déjà que trouver des raisons d'être aux différentes notions est difficile, le fait que toutes ces

raisons doivent être en grand nombre, être «similaires », ou présentées de la même façon, relève du défi… Semble difficilement envisageable dès la première année au vu du recul nécessaire sur le programme.
☹ Cela me semble difficile pour le professeur de construire un PER dans le sens où il faut avoir un recul suffisant sur plusieurs chapitres ; difficile aussi de trouver un sujet que l'on peut aborder avec plusieurs chapitres.
☹ Cela demande du recul et de la réflexion de la part du professeur pour la préparation du PER.
☹ Difficulté de mise en œuvre ; demande un point de vue global de toute l'année que l'on n'a pas forcement au début de l'année.
☹ Cela implique que l'on ait une vision à plus long terme de notre enseignement, d'une organisation assez efficace (i.e. pas préparer chapitre après chapitre).
☹ Difficile à construire, pour le professeur (car il faut un certain recul pour pouvoir travailler sur plusieurs chapitres en même temps).

• *Divers*
☹ Il est très difficile de motiver le PER.
☹ Comment mettre en place un PER ? Il est difficile de mettre en place une AER convenable, alors comment construire un PER de façon convenable ?

Cela permet de créer des liens, de décloisonner

• *On se place toujours dans le cadre des « chapitres », mais en les liant*
☺ On sait où on veut aller donc on sait dans quel ordre faire les chapitres. Les chapitres sont plus liés et l'enchaînement plus logique.
☺ Les élèves peuvent être plus attentifs, voir la problématique posée, qui justifie le chapitre à venir. Ainsi la théorie énoncée va répondre à une attente.
☺ Permet de mettre en place une démarche de raisonnement qui ne sera pas forcement restreinte à un thème donné.
☺ La progression des thèmes de géométrie est bien faite.
☺ Permet de tisser un lien entre différentes notions ou chapitres.
☺ Cela permet d'établir des passerelles entre plusieurs chapitres, ce qui est parfois dur à faire.

• *On décloisonne les chapitres, on lie plusieurs « domaines »*
☺ On peut faire les liens entre les différents chapitres et montrer aux élèves que les mathématiques ne sont pas cloisonnées.
☺ Étudier plusieurs situations, problèmes comparables peut permettre aux élèves d'établir des liens entre différents éléments théoriques, de décloisonner les chapitres.
☺ Un PER sur plusieurs chapitres peut permettre un réinvestissement des notions déjà abordées et de voir les liens entre les domaines mathématiques.
☺ Un PER permet de montrer la relation entre les différentes parties des mathématiques, ou entre différents problèmes.

• *On organise autrement le savoir*
☺ Permet de créer une synthèse en liant plusieurs domaines mathématiques.
☺ Permet d'avoir une meilleure organisation mathématique et de faire des liens entre les notions.
☺ Cela permet aux élèves de mieux voir l'imbrication entre les différentes notions, techniques qui sont ensuite détaillées dans la synthèse.
☺ Cela crée un lien entre les différentes notions où souvent les élèves ne voient pas de lien. Cela permet aussi de rentrer dans un problème, que les élèves, au niveau de l'intuition du résultat, se sont déjà approprié.
☺ Montrer le lien entre plusieurs notions différentes qui semblent souvent indépendantes aux yeux

des élèves.
☺ Permet d'avoir différentes techniques pour résoudre un problème donné (celui qui fait l'objet du PER).
☺ Extraire différentes méthodes pour réaliser un même type de tâches, ce qui permet de démarrer plus facilement les AER.
☺ Cela permet d'avoir différentes techniques pour résoudre des problèmes et des types de tâches.
☹ Les élèves risquent de confondre les différentes méthodes.

• *On organise autrement l'étude*
☺ Augmenter la cohérence de la construction du savoir mathématique des élèves.
☺ Extraire différentes méthodes pour réaliser un même type de tâches, ce qui permet de démarrer plus facilement les AER.
☺ Cohérence des différentes AER. Les élèves se repèrent peut-être mieux. Projet sur l'année « fil rouge ».
☺ Regroupe plusieurs notions, il y a un fil conducteur pour dégager plusieurs synthèses. On ne sera pas obligé à chaque fois de faire une nouvelle activité.
☺ Installer une cohérence, une unité entre les sujets d'AER. Proposer des problèmes qui ont une plus grande généricité.
☺ Prise en main plus simple de chaque activité.

Le temps

• *Lapidaires*
☺ Gain de temps.
☹ Long à réaliser.

• *La longueur engendrant la lassitude, etc.*
☹ Difficulté à maintenir l'intérêt des élèves qui identifient le PER comme « déjà vu ».
☹ Possibilité d'une perte de vue d'objectif.
☹ Un PER étant plus long sur la durée peut lasser les élèves.
☹ Il est difficile de maintenir l'intérêt des élèves sur un sujet long.
☹ Les élèves ne vont-ils pas au bout d'un certain temps oublier la problématique et le but du PER.
☹ Si c'est trop long cela peut « perdre » les élèves.
☹ Cela peut parfois avoir un air redondant. Un élève ne verra peut-être pas l'intérêt de revenir sur un problème que l'on a déjà résolu, même si c'est revenir selon un nouvel angle.
☹ Morceler dans le temps peut perdre ou ennuyer les élèves, ou, revenir au même genre de problème peut être lassant.
☹ Trop long, peut perturber les élèves.
☹ Long à réaliser avec les élèves donc nécessairement sur plusieurs séances, ce qui peut faire décrocher les élèves les plus faibles, du moment où une partie du PER n'est pas assimilée.

• *On gagne du temps car on se trouve « en pays connu »*
☺ Une fois les deux premières séances portant sur le PER lancées, les types de tâches du PER sont rapidement reconnus et permettent un démarrage rapide des AER.
☺ Gain de temps (car on reprend le même problème et on le continue).
☺ On rentrera plus vite dans le cœur de chaque AER, les élèves étant alors habitués aux types de problèmes étudiés.
☺ Les situations rencontrées d'une activité à l'autre se ressemblent : les élèves ont donc une partie de la phase de première rencontre écourtée. Cela peut également motiver les élèves (qui ont déjà rencontré cette forme de problème).
☹ [*sic*] Adopter une façon de faire qui est la même à chaque AER permet de minimiser les pertes de

temps (les figures à compléter).
☺ Cela permet de ne pas totalement oublier les éléments techniques déjà vus (la familiarité du problème « rappelle » des souvenirs).
☺ Permet de gagner du temps ; certains automatismes étant créés. Cela permettra aussi que le contexte ne perturbe pas ou peu les AER.
☺ Gain de temps car les élèves entrent plus vite dans chaque activité.
☺ PER permet une continuité dans l'étude. On n'oublie pas ce qui a été fait au début, étant donné qu'un fil rouge est mis en place par l'instauration d'une question initiale.

• *On y passe tellement de temps qu'on ne peut plus traiter le programme…*
☹ Temps de préparation pour le professeur, et le temps pris en classe pour ce genre d'activité sera du temps que l'on ne pourra plus prendre pour traiter le programme.

Des raisons d'être
☺ Permet de donner du sens à l'introduction de chaque nouvelle notion, donc de motiver les élèves.
☺ C'est une organisation qui potentiellement peut beaucoup aider les élèves à avoir les raisons d'être des savoirs et mieux les retenir.
☺ C'est attractif pour les élèves ; cela peut avoir un fort pouvoir moteur de motivation de l'étude des thèmes.

Divers
☹ Le raisonnement en mathématique, il faut qu'il soit plus explicite.

On a noté que nombre de réponses mentionnent ***les élèves*** (ou ***l'élève***) : pour les points positifs, 21 réponses sur 45, soit 47 % ; pour les points négatifs, 16 questions sur 45, soit 36 %.
On indiquera sans commenter davantage que la mention des élèves est la plupart du temps un symptôme d'une difficulté réelle pour le professeur...

Commentaires développés oralement
– On a rappelé qu'un PER est un dispositif didactique dont l'enjeu est de faire émerger une organisation mathématique regroupant plusieurs thèmes à partir d'un type de tâches qui la motive, qui en donne une raison d'être ; on a cité le PER sur le calculateur graphique (voir la notice sur le temps de l'étude) ou encore un PER centré sur l'optimisation des grandeurs qui permet de faire émerger l'essentiel de l'OM relative au domaine des fonctions en seconde. On notera à ce propos que le type de problèmes qui représente le PER peut être un enjeu de l'étude (c'est le cas pour optimiser une grandeur) ou non (c'est le cas de « calculer graphiquement », qui est une motivation qui n'appartient pas au programme du collège).
– On a noté que la « rigidification » notée par certains est un symptôme d'un rapport encore inadapté à ce que recouvre l'exploration d'un type de problèmes. C'est lié au manque de diversité invoqué par certains, qui est d'abord la conséquence d'un découpage de types de tâches « trop petits ». On y reviendra dans les séances ultérieures du séminaire.
– On a également souligné que la difficulté de mise en place d'un PER invoquée est pas sans lien avec le fait que ce dispositif ne renvoie pas à un dispositif analogue existant dans les praxéologies de la profession, comme c'est le cas avec les AER par exemple.

2. Observation & analyse

Un nouveau compte rendu de séance a été distribué lors de la dernière séance : il a trait à l'observation d'une classe de seconde à propos du domaine des fonctions. Il s'agit d'analyser l'OM et l'OD qui sont mises en place dans la partie de la séance relative à l'activité.

On trouvera ci-dessous les traces écrites des propositions de types de tâches mathématiques enjeu de l'étude de l'activité qui ont été formulées par les élèves professeurs lors de la dernière séance.

Traduire sous forme de fonctions un problème géométrique ;
Traduire un énoncé par une fonction
Modéliser un problème
Modéliser et Schématiser une situation
Optimiser une grandeur
Modéliser mathématiquement une situation concrète
étudier les variations d'une fonction
Maximiser une fonction
Chercher le maximum d'une fonction
Justifier le maximum
Choisir une inconnue
Exprimer une longueur en fonction de l'inconnue
Existence d'un rectangle d'aire maximale dans un triangle
Déterminer un rectangle d'aire maximale dans un triangle

Nous poursuivrons le travail en tentant de mettre sous les types de tâches identifiés des spécimens de ces types de tâches issus du compte rendu de manière à choisir parmi les formulations proposées voire les retoucher et/ou les améliorer.

Travail collectif dirigé.

On trouvera ci-dessous les traces écrites du travail effectué.

Le problème posé :

> Un paysan possède un terrain qui a pour forme un triangle rectangle ABC, rectangle en A, avec AB = 4 km et AC = 3 km. Une nouvelle loi oblige notre paysan à travailler dans un champ de forme rectangulaire. Comme le paysan a construit sa grange contenant ses machines en A, il souhaite que A appartienne au champ. Enfin, pour des raisons économiques évidentes, notre paysan souhaite que son champ ait l'aire la plus grande possible. Pouvez-vous l'aider ?

Est un spécimen de :

Modéliser une situation ou Modéliser mathématiquement une situation concrète.
Optimiser une grandeur ou plus précisément maximiser une grandeur

Cela nous a amené à reformuler le type de tâches de la façon suivante :

T : Maximiser une grandeur *a* attachée à un système *S*

Pour accomplir ce type de tâches, la classe modélise d'abord la situation géométriquement ;

puis, le modèle géométrique permet d'obtenir un modèle analytique : on montre dans un premier temps que a ne dépend que d'un paramètre attaché au système S ; puis, à ce paramètre, on associe une grandeur ℓ, attachée au système S, et on exprime a en fonction de ce paramètre. On aura alors $a = f(\ell)$.

Nous avons noté que le type de tâches :

Déterminer un rectangle d'aire maximale dans un triangle

est rencontré dans le travail de modélisation ; Nous n'avons pas les moyens, avec ce que nous avons dans la séance, de savoir s'il fait partie de l'OM. Cela va dépendre de la décision du professeur de faire travailler et d'institutionnaliser ce type de problèmes. Quelquefois, la considération des programmes permet de mettre en évidence que le type de tâches dégagé et dont on doute de l'insertion dans l'OM devrait y être inséré, mais ça n'est pas le cas ici.

3. Notice Évaluation & notation

33 questions ont été choisies. On trouvera ci-dessous la liste de ces questions avec le nombre de fois qu'elles apparaissent dans les travaux reçus avant le 15 novembre 19 h.

53	7
23	7
9	5
56	5
52	4
63	3
32	3
34	3
1	3
33	2
7	2
19	2
45	2
48	2
35	2
15	2
13	2
51	1
37	1
54	1
3	1
12	1
43	1
46	1
64	1
38	1
10	1
42	1
26	1
22	1
25	1

8	1
18	1

Nous examinerons d'abord les neuf questions qui ont été choisies par au moins trois groupes.

1. Est-ce une bonne idée que de faire une interrogation courte (10 min) chaque semaine pour vérifier le travail des élèves ?

23. Lors du rendu d'une interrogation, doit-on toujours faire la correction avec les élèves, seulement corriger les points qui ont posé problème, distribuer une correction polycopiée avec uniquement quelques commentaires oraux ?

32. Sur quoi ou sur qui dois-je me baser pour construire un contrôle, faire un barème ? Si un des élèves a 20 sur 20, dois-je considérer que c'était un travail réalisable ? Comment faire si le niveau des élèves est très hétérogène ?

34. Comment composer le premier devoir surveillé, plus précisément, à quel niveau le mettre et doit-il recouvrir tout ce que l'on a fait ou juste quelques points très précis ?

52. Comment noter un DM quand plusieurs élèves rendent exactement le même devoir ? (fautes, phrases, ...)

53. Pour les DM, trop d'élèves se contentent de recopier le travail de certains de leurs camarades. Comment l'éviter ?

56. Si des élèves sont absents à un DS trimestriel (sachant qu'il y en aura trois), faut-il leur faire rattraper ?

9. Un élève me demande de refaire un DS alors qu'il était absent. Puis-je refuser qu'il refasse ce devoir en raison des problèmes d'organisation que cela entraîne ?

63. Est-il intéressant de faire un exercice « bonus » dans un contrôle et de mettre des points de présentation ?

Nous débuterons notre examen par les deux questions suivantes.

52. Comment noter un DM quand plusieurs élèves rendent exactement le même devoir ? (fautes, phrases, ...)

53. Pour les DM, trop d'élèves se contentent de recopier le travail de certains de leurs camarades. Comment l'éviter ?

L'essentiel des réponses cite le paragraphe 5.6 de la notice, partiellement ou dans sa totalité, comme il en va dans les réponses ci-dessous :

5.6. Les DM relèvent en principe des mêmes règles que les DS, qu'ils précèdent dans le temps de l'étude. A la différence des devoirs de contrôle, cependant, ces travaux ne sont pas « surveillés » et ne se font pas en « temps limité » : ils sont accomplis dans des conditions de ressources a priori « illimitées », ce qui, au désespoir ou au scandale de beaucoup de professeurs, inclut la possibilité de recopier le devoir d'un camarade. Contre ces pratiques, on peut décider que le DM fera l'objet d'un contrôle, sous la forme d'une micro-épreuve, par exemple selon le calendrier suivant, qui n'est bien sûr qu'indicatif.

...

On retrouve ici le principe d'un dispositif tout classique : lorsqu'une personne présente un travail écrit élaboré librement, il est d'usage de contrôler, par une « soutenance » en principe orale, que cette personne est capable de répondre de ce travail, en ce sens qu'elle peut l'exposer et répondre à des questions à son propos. Faute de pouvoir mettre en place un tel dispositif, on peut instituer un dispositif simple de contrôle écrit : en ce cas, la note « de DM » ne sera pas attribuée au DM seul mais à l'ensemble DM plus micro-contrôle du DM. On pourra par exemple noter le DM sur 8 et le micro-contrôle (sans documents) sur 12, le

DM apparaissant ainsi comme un travail préparatoire au micro-contrôle.

Contre ces pratiques, on peut décider que le DM fera l'objet d'un contrôle, sous la forme d'une micro-épreuve, par exemple selon le calendrier suivant, qui n'est bien sûr qu'indicatif .

1. Chaque jeudi, hormis les semaines précédant un contrôle, les élèves reçoivent l'énoncé d'un DM et l'examinent rapidement sous la direction du professeur.
2. Une foire aux questions relative au DM a lieu lors de la séance du lundi suivant.
3. Les élèves rendent leur DM le jeudi qui suit, et sont soumis aussitôt à une micro-épreuve de contrôle (10 min) portant sur une question du DM (ou à une mini-épreuve dont une partie porte sur le DM).
4. La correction en classe du DM (incluant une reprise appropriée de la synthèse relative aux thèmes d'étude concernés) est faite le lundi d'après.
5. Une ou plusieurs questions du DM pourront réapparaître dans le DS qui clora l'étude du ou des thèmes concernés.

(...) on peut instituer un dispositif simple de contrôle écrit : en ce cas, la note « de DM » ne sera pas attribuée au DM seul mais à l'ensemble DM plus micro-contrôle du DM. On pourra par exemple noter le DM sur 8 et le micro-contrôle (sans documents) sur 12, le DM apparaissant ainsi comme un travail préparatoire au micro-contrôle. Dans ces conditions, le travail aidé (par des camarades ou non) retrouve son sens véritable : il doit permettre à l'élève d'étudier et d'apprendre pour occuper (ou retrouver) sa place dans le projet collectif d'étude.
Qu'il aura effectivement appris, l'élève en fera la preuve d'abord par sa « copie » (une par élève), ensuite et surtout par le contrôle en classe auquel il se soumettra lors de la remise de son travail écrit.

À la différence des devoirs de contrôle, les DM sont accomplis dans des conditions de ressources a priori «illimitées», ce qui, au désespoir ou au scandale de beaucoup de professeurs, inclut la possibilité de recopier le devoir d'un camarade. Contre ces pratiques, on peut décider que le DM fera l'objet d'un contrôle, sous la forme d'une micro-épreuve, par exemple selon le calendrier suivant, qui n'est bien sûr qu'indicatif.
1. Chaque *jeudi*, hormis les semaines précédant un contrôle, les élèves reçoivent l'énoncé d'un DM et l'examinent rapidement sous la direction du professeur.
2. Une *foire aux questions* relative au DM a lieu lors de la séance du *lundi suivant*.
3. Les élèves rendent leur DM le *jeudi qui suit*, et sont soumis aussitôt à une *micro-épreuve de contrôle* (10 min) portant sur une question du DM (ou à une mini-épreuve dont une partie porte sur le DM).
4. La *correction* en classe du DM (incluant une reprise appropriée de la synthèse relative aux thèmes d'étude concernés) est faite le *lundi d'après*.
5.Une ou plusieurs questions du DM pourront réapparaître dans le DS qui clora l'étude du ou des thèmes concernés.

On retrouve ici le principe d'un dispositif tout classique : lorsqu'une personne présente un travail écrit élaboré librement, il est d'usage (à l'université pour un mémoire de thèse, au lycée dans le cadre des TPE, etc.) de contrôler, par une « soutenance » en principe orale, que cette personne est capable de *répondre de ce travail*, en ce sens qu'elle peut l'exposer et répondre à des questions à son propos. Faute de pouvoir mettre en place un tel dispositif, on peut instituer un dispositif simple de contrôle écrit : en ce cas, la note « de DM » ne sera pas attribuée au DM seul mais à l'ensemble DM *plus* micro-contrôle du DM. On pourra par exemple noter le DM sur 8 et le micro-contrôle (sans documents) sur 12, le DM apparaissant ainsi comme *un travail préparatoire au micro-contrôle*. Dans faire un ces conditions, le travail aidé (par des camarades ou non) retrouve son sens véritable : il doit permettre à l'élève d'étudier et d'apprendre pour occuper (ou retrouver) sa place dans le projet collectif d'étude. Qu'il aura effectivement appris, l'élève en fera la preuve d'abord par sa « copie » (une par élève), ensuite et surtout par le contrôle en classe auquel il se soumettra lors de la remise de son travail écrit.

Commentaires : à propos de la pertinence des éléments non cités dans certaines réponses ; ce sont pour l'essentiel des éléments technologico-théoriques qui ont été supprimés, ingrédients qui justifient et/ou rendent intelligibles les pratiques d'évaluation envisagées.

32. Sur quoi ou sur qui dois-je me baser pour construire un contrôle, faire un barème ? Si un des élèves a 20 sur 20, dois-je considérer que c'était un travail réalisable ? Comment faire si le niveau des élèves est très hétérogène ?

34. Comment composer le premier devoir surveillé, plus précisément, à quel niveau le mettre et doit-il recouvrir tout ce que l'on a fait ou juste quelques points très précis ?

C'est le paragraphe 5.4 dans son entier qui est cité ici pour l'essentiel.

5.4. Le bon calibrage des tâches proposées dans un DS ne dépend pas de l'« intuition » du professeur mais de *prises d'information* qu'il aura multipliées. Il convient en tout premier lieu que les tâches proposées relèvent de *types* de tâches *effectivement étudiés en classe* – autrement dit, et sauf exception, se situent dans la ZEN. Mais il faut encore que le professeur se soit assuré de la maîtrise progressive par les élèves des organisations mathématiques construites autour de ces types de tâches. Pour cela, il devra conjuguer *l'observation et l'analyse cliniques* – en principe *sans évaluation* – du travail ordinaire de la classe avec des prises d'information réalisées dans des conditions d'autonomie plus proches de celles propres à un devoir de contrôle, telles des *micro-épreuves* ou des mini-épreuves [11] qui permettront une évaluation (notée ou non) de la part du professeur et une *auto-évaluation* de la part de l'élève, relançant en cela le projet collectif d'étude et préparant la classe à s'affronter au devoir de contrôle.

Un élève professeur cite le paragraphe 4.7 :

4.7. Dans le cas qu'on vient d'examiner, comment noter ? La réponse dépend de la position didactique de la classe par rapport à la question traitée. Ou bien ce qui vient d'être indiqué est bien connu par « la classe », mais non par tel élève : en ce cas, ce dernier devra être pénalisé – par le retrait d'une fraction des points prévus d'autant plus petite que l'enjeu didactique du contrôle sera plus clairement la maîtrise du calcul sur des puissances, et non pas la maîtrise de la distinction décimal / non-décimal (ou encore l'usage de la calculatrice à des fins de contrôle de ses résultats). Ou bien il s'agira là d'une erreur touchant un type de tâches *non encore travaillé* (à tort ou à raison), celui de *l'écriture décimale éventuelle d'une puissance*. En ce cas, l'erreur produite sera surtout regardée comme un point d'entrée dans l'étude de ce type de tâches, dont, ultérieurement, la synthèse se fera alors clairement l'écho : pour l'élève « fautif », on se bornera en conséquence à un avertissement sans frais.

Et un binôme ajoute au paragraphe 5.4 le paragraphe 5.1. :

5.1. La construction d'un DS ou d'un DM propose des difficultés qu'il convient d'aborder à la lumière des principes et repères établis jusqu'ici, complétés par des notions simples sur lesquelles on s'arrête ici brièvement. On désigne par zone d'étude normale (ZEN) l'ensemble des types de problèmes relevant des organisations mathématiques élaborées en classe. On distingue de la ZEN la ZEP, zone d'étude proche, ensemble (flou) des types de problèmes que les praxéologies mathématico-didactiques de la ZEN permettent de résoudre moyennant une petite aide de l'énoncé. (Par contraste, on distinguera la ZEL, zone d'étude lointaine, dans laquelle on ne devrait pas pénétrer à l'occasion d'un DM ou d'un DS.)

Commentaires :

On aurait pu ajouter les paragraphes 3.5 et 3.7 :

11 Au collège en particulier, on pourra parler de *micro-épreuve* pour désigner une « interrogation écrite courte » de 10 minutes, de *mini-épreuve* pour un « interrogation écrite courte » de 20 à 30 minutes, enfin d'*épreuve*, tout court, lorsque la durée est supérieure à la demi-heure. Il est judicieux, pour scander et impulser adéquatement l'effort didactique de la classe, de prévoir dans l'emploi du temps *hebdomadaire* un créneau fixe (par exemple le jeudi de 10 h 50 à 11 h 10) pour ce qui serait alternativement une micro-épreuve et une mini-épreuve – hormis les semaines où est programmé un DS.

3.5. Revenons à l'évaluation du travail de l'élève x. Un tel travail présente, à telle question Q à étudier, une réponse R_x qu'il convient de situer dans le *projet collectif* de la classe : construire une réponse $R^♥$ (consistant par exemple en un fragment de praxéologie ponctuelle) destinée à nourrir la construction par la classe de certaines organisations mathématiques commandées par le programme de la classe. C'est de ce point de vue qu'il convient d'évaluer le travail présenté, le principe de sa valeur se trouvant dans ce que la réponse R_x peut apporter *au projet didactique de la classe*.

3.7. Dans le cadre d'un devoir rédigé et *noté* (DM, DS, etc.), un élément non négligeable indiquant l'importance accordée *a priori* par le professeur – qui peut le négocier –, dans le cadre d'un projet collectif d'étude toujours en construction, à tel « problème » dont se compose ce devoir, voire à différentes parties de ce problème, est constitué par le dispositif du *barème* [12]. Savoir que telle « partie » est notée sur 5 alors que telle autre l'est sur 3 *signifie* une différence quant à la valeur reconnue provisoirement à chacune de ces parties pour la construction dans laquelle les résultats du travail demandé s'intègreront. Un tel barème, bien entendu, ne saurait être qu'approximatif, mais il le sera d'autant moins que l'on se rapprochera de l'aboutissement de la construction globale engagée. On notera en revanche que l'usage d'un barème – plutôt que la référence à un projet partagé de développement – se révèle à l'observation ne pas constituer un rempart efficace contre les écarts de notation entre correcteurs [13].

Et également le passage suivant du paragraphe 7.3. relatif à l'établissement de la note qui éclaire la question du niveau très hétérogène de la classe :

7.3. Le mode de fabrication des notes, le « bricolage algorithmique » auquel se livre le professeur souvent sans en avoir conscience a des effets *didactiques*, en ce sens qu'il crée des conditions qui se révèleront favorables ou au contraire hostiles à la poursuite ou à la relance de l'étude. Le fait qu'une classe apparaisse « rassemblée » est sans doute essentiel pour que ses membres puissent concevoir de partager un projet d'étude *commun* : dans une classe trop « éclatée », l'enseignement devient, à la limite, impossible. À cet égard, le bricolage algorithmique des notes peut conduire à un meilleur rassemblement ou, au contraire, favoriser l'éclatement de la classe. On va voir, de ce point de vue, que le rassemblement de la classe à l'occasion d'un devoir se produit notamment lorsque les diverses questions Q_1, … Q_ℓ ne sont pas réussies ou échouées par les *mêmes* élèves.

1. Est-ce une bonne idée que de faire une interrogation courte (10 min) chaque semaine pour vérifier le travail des élèves ?

Voici les éléments relevés par un groupe de cinq élèves-professeurs :

« C'est de ce point de vue qu'il convient d'évaluer le travail présenté, le principe de sa valeur se trouvant dans ce que la réponse R_x peut apporter au projet didactique de la classe. » (page 3)
La mise en place de micro évaluation permet par l'étude des réponses R_x d'apporter des éléments pour la construction de la réponse $R^♥$.

---

12 Le mot de *barème* est la reprise, avec altération graphique, d'un *nom propre*, celui de François Barrême (1638-1703), expert auprès de la Chambre des comptes de Paris et auteur d'un ouvrage qui eut un immense et durable succès attesté par de nombreuses éditions : *Le livre des comptes-faits* (1670), « où l'on trouve les Supputations qui se font par les Multiplications, pour la valeur de quelque chose que l'on puisse s'imaginer, & à telles sommes qu'elles puissent monter. Ouvrage très utile à tous Trésoriers, Officiers, Entrepreneurs, Négociants, & même à ceux qui ne savent pas l'Arithmétique ». Cette origine, jointe à l'incertitude de l'orthographe ancienne des noms propres, expliquent peut-être les vacillations de certains auteurs actuels, que l'on se gardera d'imiter.

13 Dans sa *Sociologie de l'évaluation scolaire* (PUF, 1998), Pierre Merle écrit ainsi (*op. cit.*, p. 12) : « … l'utilisation d'un barème de notation au point près, voire au demi-point près, ne constitue pas une garantie de précision de la correction. De fait, les écarts de notation peuvent être nuls ou très limités entre les correcteurs sur des questions notées sur deux ou trois points ; et inversement, une grande incertitude peut caractériser la notation d'une question sur un point, voire un demi-point. »

« Pour cela, il devra conjuguer l'observation et l'analyse cliniques – en principe sans évaluation – du travail ordinaire de la classe avec des prises d'information réalisées dans des conditions d'autonomie plus proches de celles propres à un devoir de contrôle, telles des micro-épreuves ou des mini- épreuves[3] qui permettront une évaluation (notée ou non) de la part du professeur et une auto-évaluation de la part de l'élève, relançant en cela le projet collectif d'étude et préparant la classe à s'affronter au devoir de contrôle. » (page 8)
L'idée de faire des évaluations courtes pour vérifier le travail de l'élève n'est pas fausse mais l'évaluation à trois apports, un premier non négligeable pour le professeur afin de vérifier le bon fonctionnement de son processus d'étude, le deuxième pour l'auto-évaluation de l'élève et le troisième de préparer le contrôle bilan. Il est donc important de faire des évaluations courtes.
« Contre ces pratiques, on peut décider que le DM fera l'objet d'un contrôle, sous la forme d'une micro-épreuve, par exemple selon le calendrier suivant, qui n'est bien sûr qu'indicatif :
1. Chaque *jeudi*, hormis les semaines précédant un contrôle, les élèves reçoivent l'énoncé d'un DM et l'examinent rapidement sous la direction du professeur.
2. Une *foire aux questions* relative au DM a lieu lors de la séance du *lundi suivant*.
3. Les élèves rendent leur DM le *jeudi qui suit*, et sont soumis aussitôt à une *micro-épreuve de contrôle* (10 min) portant sur une question du DM (ou à une mini-épreuve dont une partie porte sur le DM).
4. La *correction* en classe du DM (incluant une reprise appropriée de la synthèse relative aux thèmes d'étude concernés) est faite le *lundi d'après*.
5.Une ou plusieurs questions du DM pourront réapparaître dans le DS qui clora l'étude du ou des thèmes concernés. » (page 9)
Un exemple de calendrier possible pour la mise en place d'un processus d'évaluation montre la place importante de celles-ci.

Un autre élève professeur note :
[I]l faut rester dans la ZEN (zone d'étude normale) et donc avoir travaillé les types de tâches auparavant. Elle peut prendre place dans un créneau fixe hebdomadaire qui rythme le travail de la classe. La micro-épreuve doit être une nécessité didactique et ne pas être imposée artificiellement : « elle doit venir à son heure en créant de judicieuses relances au double plan individuel et collectif, dans le processus d'étude ».

56. Si des élèves sont absents à un DS trimestriel (sachant qu'il y en aura trois), faut-il leur faire rattraper ?

9. Un élève me demande de refaire un DS alors qu'il était absent. Puis-je refuser qu'il refasse ce devoir en raison des problèmes d'organisation que cela entraîne ?

L'essentiel des travaux citent le paragraphe 5.7, en totalité ou partiellement comme le fait le trinôme suivant *:*

5.7. « Un autre problème classique est celui des absences (volontaires ou non) lors des devoirs de contrôle. […] Pour ceux qui auraient été « absents au contrôle », il est normal que soit organisée une *deuxième* session du contrôle – même si elle doit l'être sous des contraintes de temps, de lieu, de moyens parfois peu généreuses. Le contenu de l'épreuve de la deuxième session n'a nullement à se comparer *directement* au contenu de la première. En certains cas il serait même « injuste » que l'épreuve de la deuxième session réservée aux absents ne propose que des variations minimes par rapport à l'épreuve de la première session. Un contenu d'épreuve doit être un moyen adéquat de contrôler la maîtrise qu'ont les élèves des praxéologies mathématiques sur lesquelles porte le contrôle […], et cela compte tenu du degré attendu de maîtrise des contenus mathématiques en question. […] Un dispositif judicieux consiste à élaborer *deux* épreuves de contrôle, regardées par le professeur comme *également utilisables* : afin de ne pas s'abuser soi-même à cet égard, celui-ci pourra d'ailleurs s'imposer de tirer au sort – assez tôt pour assurer la reprographie nécessaire – celle de ces épreuves qui sera utilisée pour la première session.»

Commentaires sur les passages exclus : même remarque que précédemment ; ce sont les éléments technologico-théoriques qui sont exclus. Ça prive le professeur de contrôle sur ses praxéologies, de possibilité de les faire évoluer et d'en produire de nouvelles notamment.

Certains ajoutent le paragraphe 3.2. :

Des éléments de réponse sont apportés au paragraphe 3.2 page3 de « Les matériaux fournis par l'observation... » à « si bref soit il » et au paragraphe 5.7 page 9 de « Un autre problème classique... » à « deux visions très légèrement différentes ».

Ces éléments de réponses nous indiquent que **OUI, il faut que les élèves absents puissent être évalués sur le DS passé en organisant une deuxième session du DS**.

CAR: l'évaluation des élèvent s'inscrit dans la praxéologie mathématique mise en place avec la classe, en effet, le moment de l'évaluation permet d'évaluer l'organisation mathématique elle même.

De plus chaque élève doit être contrôlé pour deux ordres de raisons: les unes didactiques et internes, les autres institutionnelles et externes à la classe.

La mise en place de cette deuxième session consiste à refaire un sujet non identique au précédent sujet (ni trop proche par soucis de justice) mais également utilisable pour le professeur (qui doit contrôler la maîtrise qu'ont les élèves des praxéologies mathématiques sur lesquelles porte te contrôle)et les élèves absents (qui doivent s'évaluer et comprendre leurs erreurs et éventuellement prendre des décisions d'orientation).

3.2. Les matériaux fournis par l'observation, l'analyse, l'évaluation de réponses $R^{\lozenge}$ servent à bâtir la réponse $R^{\blacktriangledown}$ visée plus ou moins précisément. Une telle réponse $R^{\blacktriangledown}$ est, sinon toujours une praxéologie « complète », du moins un « ingrédient » praxéologique devant s'intégrer à terme dans une praxéologie complète. Sa construction se structure en différents *moments d'étude* ayant pour objet les différentes composantes d'une praxéologie qu'on peut supposer *locale*, c'est-à-dire de la forme $O = [T_i/\tau_i/\theta/\Theta]_{1\leq i\leq n}$. Plus précisément, étant donné une organisation mathématique ponctuelle $O_i = [T_i/\tau_i/\theta_i/\Theta_i] \subset O$, où θ_i et Θ_i sont les « parties » de θ et Θ permettant de justifier le bloc $[T_i/\tau_i]$, on distingue le moment *de la première rencontre* avec le type de tâches T_i ; le moment *exploratoire*, qui conjugue *l'exploration* du type de tâches T_i et *l'émergence de la technique* τ_i ; le moment *technologico-théorique*, qui voit *la création du bloc* $[\theta_i/\Theta_i]$; le moment *du travail* de l'organisation mathématique créée, et en particulier *de la technique*, où *l'on fait travailler* les éléments de l'organisation mathématique ponctuelle élaborée pour s'assurer qu'ils « résistent » (et, le cas échéant, pour les améliorer), et où, en même temps, on *travaille sa maîtrise* de cette organisation mathématique, et en particulier de la technique τ_i ; le moment *de l'institutionnalisation*, où l'on *met en forme* l'organisation mathématique $[T_i/\tau_i/\theta_i/\Theta_i]$, en précisant chacun de ses composants, et en l'amalgamant à l'organisation déjà institutionnalisée, ce qui aboutit à une *synthèse* nouvelle ; le moment *de l'évaluation*, où l'on apprécie sa maîtrise de l'organisation mathématique créée, mais aussi où l'on évalue cette organisation mathématique elle-même, ce qui pourra conduire à retoucher la synthèse élaborée. Chacun de ces moments, rappelons-le aussi, peut se réaliser en *plusieurs fois*, non seulement parce que l'on procède par épisodes *limités dans le temps*, mais aussi parce que, par exemple, un épisode de travail de la technique peut conduire à retoucher l'organisation mathématique mise en place (et donc éventuellement à vivre un nouvel épisode technologico-théorique), et en tout cas à envisager un autre épisode d'institutionnalisation, si bref soit-il.

Commentaire : Par contraste, ici, ce sont au contraire des éléments technologico-théoriques qui sont ajoutés.

D'autres proposent la synthèse suivante :

Mise à part le fait de faire travailler les élèves régulièrement et, de ce fait, contrôler ses connaissances il est intéressant de faire des micro-épreuves pour plusieurs raisons :

- Relancer le projet collectif d'étude.
- Préparer la classe à s'affronter au devoir de contrôle.

En effet, les petits contrôles ont pour but non seulement de voir si les élèves ont assimilés les enjeux mathématiques mais de remettre en cause l'O.M et la didactique du professeur qui pourra reprendre si bon lui semble quelques points essentiels mal compris par l'élève.

Commentaires

23. Lors du rendu d'une interrogation, doit-on toujours faire la correction avec les élèves, seulement corriger les points qui ont posé problème, distribuer une correction polycopiée avec uniquement quelques commentaires oraux ?

Voici ce qui est proposé par trois élèves-professeurs :

Pour répondre à cette question, nous pourrons consulter le deuxième paragraphe de la partie correction et erreurs cité ci-après :
4.2. La « correction » en classe d'un DM ou d'un DS répond à un schéma qu'une note due au groupe de mathématiques de l'Inspection générale de l'éducation nationale (27 mars 1997), *Les travaux écrits des élèves en mathématiques au collège et au lycée*, brosse avec vigueur :

… les travaux individuels de rédaction (et notamment les « devoirs à la maison »), dont les fonctions sont multiples (…) peuvent et doivent prendre des formes variées (résolution individuelle, ou en petits groupes, d'un problème comportant éventuellement des questions ouvertes et aboutissant à une rédaction individuelle, compte rendu et synthèse d'une séance de travaux dirigés, recherche d'exemples, constitution d'un dossier sur un thème donné, mise au point et rédaction de solutions d'exercices dont l'étude a été engagée en classe…). Ils font l'objet d'une rédaction individuelle sur copie, d'une correction détaillée des copies par le professeur, et d'un rapport de correction destiné notamment à rectifier les erreurs les plus courantes et à dégager les méthodes essentielles.

Dans la perspective ouverte jusqu'ici, le *rapport de correction* établi par le professeur à propos d'un DM ou d'un DS doit recenser *l'ensemble* des aspects significatifs, soit positifs, soit négatifs, en mettant en avant, en règle générale, ce fait que l'activité collégiale de la classe produit des matériaux qui devraient normalement permettre de fabriquer une réponse $R^{\heartsuit}$ de bon aloi. Ce rapport de correction, à la charge du professeur, se sera construit dans une dialectique avec la correction et la notation des copies (si notation il y a), la note assignée à la copie de x devant être en consonance avec l'apport estimé de cette copie au projet collectif.

Trois autres ont la même contribution tandis que certains y ajoutent le paragraphe 4.6., sur les erreurs :

4.6. Le travail sur les erreurs est au fond justifié *lorsqu'il ouvre une voie de progrès* qui l'intègrera au projet didactique collectif, et non pour « faire disparaître » l'erreur constatée – qui pourra disparaître d'elle-même avec l'avancée du travail de formation, sans traitement spécifique. *Etc…*

Voici la contribution de notre groupe de cinq sur cette question :

« Dans la perspective ouverte jusqu'ici, le rapport de correction établi par le professeur à propos d'un DM ou d'un DS doit recenser l'ensemble des aspects significatifs, soit positifs, soit négatifs, en mettant en avant, en règle générale, ce fait que l'activité collégiale de la classe produit des matériaux qui devraient normalement permettre de fabriquer une réponse $R^{\heartsuit}$ de bon aloi. Ce rapport de correction, à la charge du professeur, se sera construit dans une dialectique avec la correction et la notation des copies (si notation il y a), la note assignée à la copie de x devant être en consonance avec l'apport estimé de cette copie au projet collectif. » (page 5)
La correction doit se faire par le professeur en indiquant les réussites et les échecs des élèves ce qui permettra par la suite de donner la réponse souhaitée $R^{\heartsuit}$.
« Il convient de s'arrêter brièvement sur la question des erreurs. » (page 5)
Il ne faut pas insister sur les erreurs afin de ne pas les ancrer dans la tête des élèves.
« 4.6. Le travail sur les erreurs est au fond justifié lorsqu'il ouvre une voie de progrès qui s'intègrera au projet didactique collectif, et non pour « faire disparaître » l'erreur constatée – qui pourra disparaître d'elle-même avec l'avancée du travail de formation, sans traitement spécifique. Un élève de 4^{e} a écrit : 1/34 = 3–4 = 0,0003. Que s'est-il passé ? L'habitus, ancien, est ici de donner une expression décimale d'un résultat numérique : voilà la cause agissante que l'erreur révèle. En ce cas encore la « correction » (collective !) ne pourra sans doute pas faire apparaître ce qu'il y a de mathématiquement fort derrière ce fourvoiement. »

(page 6)
La correction doit être collective afin de faire progresser les élèves dans le cadre du projet didactique.
« 4. La correction en classe du DM (incluant une reprise appropriée de la synthèse relative aux thèmes d'étude concernés) est faite le lundi d'après. » (page 9)
Là encore, la correction collective effectuée en classe est indiquée afin de reprendre la synthèse concernant les thèmes étudiés en classe.

Et enfin celle d'un trinôme sur la question 48, qui est fort proche :

48. *Quelle est la meilleure façon de corriger un DS ? Photocopie ou correction intégrale au tableau ? Voire juste revenir sur les points où tous les élèves se sont trompés ?*

Comment corriger un DS ? Un rapport de correction permet de mettre en avant les points positifs et les points qu'il faudra encore travailler.
« Les travaux individuels de rédaction […] font l'objet d'une rédaction individuelle sur copie, d'une correction détaillée des copies par le professeur et d'un rapport de correction destiné notamment à rectifier les erreurs les plus courantes et à dégager les méthodes essentielles ».
« Dans la perspective ouverte jusqu'ici, le *rapport de correction* établi par le professeur à propos d'un DM ou d'un DS doit recenser *l'ensemble* des aspects significatifs, soit positifs, soit négatifs, en mettant en avant, en règle générale, ce fait que l'activité collégiale de la classe produit des matériaux qui devraient normalement permettre de fabriquer une réponse *R*♥ de bon aloi. »

Comment faire ce rapport ?
« Ce rapport de correction, à la charge du professeur, se sera construit dans une dialectique avec la correction et la notation des copies (si notation il y a), la note assignée à la copie de *x* devant être en consonance avec l'apport estimé de cette copie au projet collectif. »

Faire suivre ce rapport d'un mini-contrôle :
« La part de l'épreuve située en ZEP engendre une plus grande incertitude, même si celle-ci peut être réduite par l'observation et l'analyse du travail effectué en classe et en DM. En tout état de cause, les tâches relevant de la ZEP ne devraient occuper qu'une place réduite dans le contrôle. On notera que, en sens inverse, lorsqu'un devoir de contrôle se situe entièrement dans la ZEN, il n'est pas anormal que rien de substantiellement neuf n'y émerge : en un tel cas, le travail réalisé par la classe en cette occasion peut n'apporter aucun matériau nouveau à la synthèse. Deux observations s'imposent cependant. Tout d'abord, le fait ne pas modifier la synthèse à l'issue d'un DS doit apparaître, non comme une décision par défaut, presque automatique, mais comme la conclusion d'un examen explicite fait par la classe sous la direction du professeur. Ensuite, il est rare que tous les élèves d'une classe aient accompli de manière entièrement satisfaisante toutes les tâches proposées. On peut donc prendre des dispositions pour compléter l'étude sur les points les moins réussis. Cela pourra se faire par exemple sous la forme d'un DM suivi d'un micro-contrôle, ou simplement d'un micro-contrôle dont le programme sera alors clairement annoncé et justifié. »

Les limites de la correction collective :
« Le travail sur les erreurs est au fond justifié *lorsqu'il ouvre une voie de progrès* qui s'intègrera au projet didactique collectif, et non pour « faire disparaître » l'erreur constatée – qui pourra disparaître d'elle-même avec l'avancée du travail de formation, sans traitement spécifique. Un élève de 4e a écrit : 1/34 = 3–4 = 0,0003. Que s'est-il passé ? L'*habitus*, ancien, est ici de donner une expression *décimale* d'un résultat numérique : voilà la cause agissante que l'erreur révèle. En ce cas encore la « correction (collective !) ne pourra sans doute pas faire apparaître ce qu'il y a de mathématiquement *fort* derrière ce fourvoiement : comme il en va du nombre 10–4 en base 10, *en base* 3 le nombre 3–4 s'écrit 0,0001, puisque en ce cas 0,0001 = 0 +0/31 +0/32 +0/33 +/1/34. Mais elle devra revenir aux faits suivants, qui trouveront éventuellement un écho dans la synthèse : 1) tout nombre n'a pas forcément d'écriture décimale finie, c'est-à-dire tout nombre n'est pas forcément un *décimal* : si *a*=1/34 était décimal (comme on le suppose en l'égalant à 0,0003), il en serait ainsi de 27*a* =1/3, ce qu'on sait n'être pas le cas, etc. ; 2) tout calcul doit être vérifié à l'aide d'une calculatrice ; or ici la calculatrice affiche ceci : 0,012345679012 ; 3) une vérification

grossière, à la main, est souvent possible et utile : on a $1/34 = 1/(9 \times 9) \approx 1/(10 \times 10) = 0{,}01$, ce qui est très supérieur à 0,0003. »

Commentaires : le paragraphe 5.3. et la distinction suivant l'état du processus d'apprentissage de la classe.

63. Est-il intéressant de faire un exercice « bonus » dans un contrôle et de mettre des points de présentation ?

Voici les extraits retenus par certains :

<u>Page 9, paragraphe 5.5</u>
La part de l'épreuve située en ZEP engendre une plus grande incertitude, même si celle-ci peut être réduite par l'observation et l'analyse du travail effectué en classe et en DM. En tout état de cause, les tâches relevant de la ZEP ne devraient occuper qu'une place réduite dans le contrôle. On notera que, en sens inverse, lorsqu'un devoir de contrôle se situe entièrement dans la ZEN, il n'est pas anormal que rien de substantiellement neuf n'y émerge : en un tel cas, le travail réalisé par la classe en cette occasion peut n'apporter aucun matériau nouveau à la synthèse. Deux observations s'imposent cependant. Tout d'abord, le fait ne pas modifier la synthèse à l'issue d'un DS doit apparaître, non comme une décision par défaut, presque automatique, mais comme la conclusion d'un examen explicite fait par la classe sous la direction du professeur. Ensuite, il est rare que tous les élèves d'une classe aient accompli de manière entièrement satisfaisante toutes les tâches proposées. On peut donc prendre des dispositions pour compléter l'étude sur les points les moins réussis. Cela pourra se faire par exemple sous la forme d'un DM suivi d'un micro-contrôle, ou simplement d'un micro-contrôle dont le programme sera alors clairement annoncé et justifié.

<u>Page 10, paragraphe 6.1</u>
Cette distribution « en J » montre bien, justement, qu'on peut désormais *aller plus loin*, qu'on peut *avancer*, et qu'il convient pour cela de signifier par une note plus resserrée une exigence nouvelle, par exemple en matière de « rigueur » dans l'expression mathématique et/ou dans l'expression tout court.

<u>Page 14, paragraphe 7.5</u> :
S'il est bon, lorsqu'un groupe doit continuer à oeuvrer, que ce groupe n'apparaisse pas, *à lui-même et aux autres*, comme trop éclaté, ce qui mettrait en cause la faisabilité de l'enseignement projeté, il est des cas où, en sens inverse, on cherche à sélectionner une fraction « supérieure » du groupe : ainsi en va-t-il dans le cas d'un *concours*. Dans un tel cas, si la question Q_i notée sur N_i points fait, dans le groupe Ω, l'objet de notes très peu dispersées sur l'intervalle $[0 ; N_i]$, par exemple parce que la notation est d'une sévérité extrême, cette question, qui contribuera bien sûr à « rassembler » le groupe, n'aura guère d'influence sur le « classement » – à la limite, si l'écart type $s(X_i)$ est nul, c'est-à-dire si X_i est constante sur Ω, les notes globales seront simplement translatées d'une valeur identique pour tous les membres du groupe. En d'autres termes, la question Q_i jouera un rôle faible ou nul sur la réussite audit concours. La même chose pourrait être dite d'un devoir D prenant place dans une série d'épreuves d'un concours : c'est ainsi que la série des notes sur 10 évoquée ci-dessus et dont l'écart type est de 0,65 correspond au tableau d'effectifs suivant.....

Et les éléments apportés par d'autres :

Oui, à condition que cela s'inscrive dans le projet didactique de la classe.

> *« Revenons à l'évaluation du travail de l'élève x. Un tel travail présente, à telle question Q à étudier,une réponse Rx qu'il convient de situer dans le projet collectif de la classe : construire une réponse R♥ (consistant par exemple en un fragment de praxéologie ponctuelle) destinée à nourrir la construction par la classe de certaines organisations mathématiques commandées par le programme de la classe. C'est de ce point de vue qu'il convient d'évaluer le travail présenté, le principe de sa valeur se trouvant dans ce que la réponse Rx peut apporter au projet*

didactique de la classe. »

Un exercice « bonus » s'il participe au projet didactique de a classe peut aussi avoir un effet positif car il ne pénalise pas l'élève mais au contraire récompense seulement la réussite. Cela s'accorde tout a fait avec ce qui est noté en 4.1 :

> *« Le principe fondamental, on l'a souligné, est que la valeur d'une production d'élève ou d'équipe d'élèves tient dans ce qu'elle apporte au projet didactique de la classe. Cela conduit le professeur à porter son regard, en premier lieu, non sur la « réunion » des échecs des élèves, mais bien sur la réunion de leurs réussites. »*

Il faut toutefois faire attention de ne pas trop s'éloigner de la ZEN.

> *«… (Par contraste, on distinguera la ZEL, zone d'étude lointaine, dans laquelle on ne devrait pas pénétrer à l'occasion d'un DM ou d'un DS.) »* 5.1
>
> « *Le bon calibrage des tâches proposées dans un DS ne dépend pas de l'« intuition » du professeur mais de prises d'information qu'il aura multipliées. Il convient en tout premier lieu que les tâches proposées relèvent de types de tâches effectivement étudiés en classe – autrement dit, et sauf exception, se situent dans la ZEN.* » 5.4

Un exercice « bonus » se placerait plutôt de la ZEP, il doit occuper une place très réduite dans le contrôle.

> *«… En tout état de cause, les tâches relevant de la ZEP ne devraient occuper qu'une place réduite dans le contrôle… »* 5.5

Nous poursuivrons ce travail lors de la prochaine séance du séminaire.

4. Forum des questions

Rechercher sur internet...

Une élève dans ma classe a une calculatrice HP. Le problème c'est que je n'ai aucune idée du fonctionnement d'une telle calculatrice. Où puis-je trouver des ressources pour apprendre à manipuler cette calculatrice ? (CG, 2^{de}, 9)

Le premier site à consulter dans ce type de recherche est le site du constructeur. Ici, à l'adresse suivante, http://www.calculatrices-hp.com/, on trouvera le site consacré aux calculatrices de marque HP, et une navigation dans le site (Télécharger/manuels et guides) donne la page cherchée : http://www.calculatrices-hp.com/index.php?page=manuels-et-guides&hl=fr_FR. On notera que cette page contient un lien vers l'institut Fourier de Grenoble. Un peu de recherche met en évidence que le logiciel de CAS inclus dans les modèles les plus perfectionnés de HP est principalement dû à Bernard Parisse : sa page personnelle sur le site de l'UJF, http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/#calc, contient un grand nombre de documents utiles.

Remplir les bulletins...

Comment bien formuler les appréciations sur le bulletin trimestriel ? Y a-t-il des expressions à éviter ? (BCL, 5^e, 9) Les premiers conseils de classe approchent et avec eux, nous allons devoir remplir les bulletins ; quels éléments doivent apparaître ? Doit-on s'adresser à l'élève ou parler de l'élève à la troisième personne ? (EM, 2^{de},9) Qu'écrire sur un bulletin trimestriel quand on pense qu'un élève peut faire mieux sans justement utiliser « Peut mieux faire » ? Un élève fait des efforts, mais les résultats ne suivent pas. Comment le garder motivé avec les appréciations ? (GBR, 2^{de},7)

Le texte ci-après ainsi que le modèle de bulletin trimestriel figurant à sa suite apportent des éléments éclairants sur les interrogations soulevées.

Présentation et contenu des bulletins trimestriels

BO n° 28 du 15 juillet 1999

Dans le cadre des mesures pour « le collège des années 2000 », il a été décidé de modifier la forme et le contenu des bulletins trimestriels afin de mieux les inscrire dans une démarche pédagogique et éducative. Il s'agit d'abord d'encourager l'élève à progresser plutôt que de l'enfermer dans une évaluation-sanction. La sévérité, pour être utile, doit être associée à un regard positif et prospectif.

Remplir un bulletin scolaire est une tâche exigeante et difficile pour les équipes enseignantes mais d'une importance capitale pour les élèves.

S'agissant des performances scolaires, les informations portées sur le bulletin doivent être suffisamment précises et complètes. Ainsi, pour les notes trimestrielles, il convient de distinguer les notes obtenues à l'oral et à l'écrit et, pour ces dernières, d'indiquer à combien de contrôles et de devoirs elles correspondent. L'évaluation de l'oral porte sur des compétences précises et pas seulement sur la participation de l'élève. Il y a lieu, également, de faire figurer, pour chaque discipline, la note moyenne de la classe ainsi que les notes minimale et maximale attribuées aux élèves de la classe. Il y a des efforts qui doivent être reconnus même s'ils ne débouchent pas sur de bonnes notes. Il faut donc expliquer pourquoi et comment progresser.

Il est utile également de prendre en compte, dans l'évaluation du travail et des activités des élèves, des compétences qui ne portent pas directement sur les performances scolaires : sens de l'initiative, autonomie, prise de responsabilité, travail fourni.

Les commentaires relatifs à chaque élève doivent comporter, d'une part, une appréciation sur ses performances scolaires, valorisant ses points forts et l'encourageant à progresser et, d'autre part, des conseils précis sur les moyens d'améliorer ses résultats. Il convient que les appréciations portées soient suffisamment détaillées et nuancées ainsi que respectueuses de la personne de l'élève. Il est demandé de bannir tout vocabulaire trop vague (« peut mieux faire », « moyen »), réducteur (« faible », « insuffisant ») voire humiliant (« inexistant », « nul », « terne ») qui n'aide aucunement l'élève. Il faut dire à l'élève ce qu'il fait et ce qu'il doit faire et privilégier les appréciations de nature à l'encourager pour que le bulletin trimestriel remplisse réellement son rôle éducatif.

Le bulletin et sa fonction doivent être expliqués devant la classe, dans leur principe. Le bulletin individuel peut faire l'objet d'une analyse au cours d'un entretien avec l'élève en présence ou non des parents, en particulier pour les élèves qui ont besoin d'être soutenus et encouragés.

Enfin, des propositions de documents d'auto-évaluation à remplir par l'élève au cours de l'heure de vie de classe, seront disponibles au centre départemental de documentation pédagogique et sur le site Internet (www.cndp.fr/college). Les équipes pédagogiques sont invitées à les utiliser : ils permettront de mieux comprendre certaines des difficultés rencontrées par les élèves et d'éclairer les enseignants sur les raisons de certains points faibles des élèves, tant au niveau des apprentissages qu'à celui du comportement.

Le modèle de bulletin trimestriel annexé à la présente circulaire peut être complété par l'établissement (la taille du modèle est celle d'un format A3).

La ministre déléguée, chargée de l'enseignement scolaire
Ségolène ROYAL

2) Le bulletin s'adresse donc en priorité aux élèves, qu'il doit aider, par le diagnostic et le conseil, à progresser. Notons en particulier cette indication : « Il y a des efforts qui doivent être reconnus même s'ils ne débouchent pas sur de bonnes notes. » Il ne faut pas oublier, en effet, qu'une note est un « instantané », une coupe dans une dynamique d'apprentissage (ou, quelquefois, de désapprentissage) et que, comme on l'a vu dans la notice sur l'évaluation, ça n'est en rien une mesure.

3) Les jugements portés sur un élève, éventuellement sous la forme de « conseils », ne découlent pas toujours *stricto sensu* des résultats scolaires obtenus – lesquels ne sont pas eux-mêmes toujours exempts de divers biais, liés à tel ou tel trait de la personne de l'élève. Fréquemment, divers stéréotypes influencent l'appréciation portée sur le ***travail*** de l'élève, en positif ou en négatif. Une gestion juste de la ***diversité des élèves*** suppose alors que, loin de reprendre à son compte de tels stéréotypes ***souvent non conscients*** (sur le genre, sur l'origine socioculturelle supposée, sur l'apparence physique, etc.), ***on travaille à s'en déprendre***, en commençant par les identifier. On en trouvera un exemple dans les Archives du Séminaire 2006-2007.

BULLETIN TRIMESTRIEL

Disciplines	Notes (élève)	(classe) moy	m	M	Appréciations générales (savoirs, savoir-faire, comportement)	Progrès et efforts faits dans les matières et dans le comportement	Conseils pour progresser
	E						
	O						
Disciplines classées par ordre alphabétique. Seules celles concernant l'élève sont reportées.							
	E						
	O						
	E						
	O						
	E						
	O						
	E						
	O						
	E						
	O						
	E						
	O						
	E						
	O						

E : écrit ; O : oral ; moy : moyenne ; m : note minimale ; M : note maximale

Assiduité (nombre d'absences, de retards, justifiés, non justifiés) :
Comportement au sein de l'établissement : - sens de l'initiative - autonomie - prise de responsabilité
Appréciation globale de l'équipe pédagogique :

Signature du chef d'établissement

Penser en termes de fonctions de l'étude

1. Peut-on donner des activités à faire à la maison et les corriger en classe ou doit-on les découvrir en classe ? (SC, 2[de] & 1[re] S, 9)

2. Faut-il poser des problèmes « ouverts » (c'est-à-dire une seule question posée où les élèves doivent faire la démarche) dans les DM ? (ME, 2de, 9)

3. Selon quels critères peut-on évaluer un devoir maison consistant à faire une biographie de Pythagore et Thalès ? Certains se sont contentés de faire des copiés-collés de sites Internet. D'autres ont fait au contraire quelque chose de trop court et manuscrit. (AL, 4^{e} & 3^{e}, 9)

L'essentiel des réponses à ces questions réside dans les fonctions didactiques que l'on attribue aux types de tâches évoqués.

Pour la première question, que l'on a déjà examiné lors d'une séance antérieure du séminaire, si on donne une « activité à faire à la maison », cela veut dire que l'on laisse à la charge des élèves en autonomie la réalisation substantielle des moments de première rencontre, exploratoire et technologico-théoriques... ce qui paraît hors de propos.

Pour la deuxième question, c'est encore la question de ce que l'on laisse à faire en autonomie à l'élève du point de vue de l'étude qui permet d'avancer : si le problème « ouvert » considéré est un type de problèmes neuf, on est dans la situation précédente, et la même conclusion s'impose. Si le problème considéré relève d'un type de problèmes étudié par la classe, on pourra le donner à faire dans un devoir à la maison, en s'assurant que la classe a reconnu le type de problèmes dont il s'agit.

On l'a vu dans la notice sur l'évaluation et la notation, on n'évalue pas dans l'absolu mais en relation avec un projet d'étude : il s'agit donc d'abord de se demander quel était la fonction didactique du travail demandé relativement à la mise en place des organisations mathématiques au programme de la classe... On se demandera ensuite si le type de tâches demandé avait déjà été travaillé ou s'il était inédit, etc. Il semble a priori qu'il n'y ait pas grand lien entre ce devoir et l'étude des organisations mathématiques au programme de la classe, et que ce type de tâches étant inédit pour les élèves, ils aient dû se fabriquer une technique « avec les moyens du bord », seuls pour certains, avec des aides à l'étude pour d'autres, ce qui explique les divergences entre les techniques mises en œuvre et, corrélativement, la difficulté du professeur à constituer des « critères d'évaluation ».

Travaux dirigés de didactique des mathématiques

➔ Séance 2 : mardi 17 novembre 2009

Programme de la séance. 1. Questions de statistique et étude statistique // 2. Une AER de statistique : le démarrage

1. Questions de statistique et étude statistique

1.1. Questions de statistique

En statistique, on s'efforce de répondre à des questions comme celles-ci :

- Un bébé qui pèse 3,4 kg à la naissance, c'est un gros bébé ?
- Un éléphant de deux tonnes, c'est un gros éléphant ou c'est un petit éléphant, ou c'est ni l'un ni l'autre ?
- Quand on dit qu'un joueur de foot a marqué beaucoup de buts dans une saison, ça veut dire qu'il en a marqué au moins combien ?
- Est-il exact que les trois derniers jours ont été exceptionnellement froids ?
- Cet article est-il cher pour ce que c'est ?
- Ça a combien d'habitants, une grande ville ?

Les exemples de questions proposées se réfèrent ***de façon floue*** à plusieurs des entités cardinales de la problématique statistique : on y évoque d'abord une ***population*** (celle des bébés, celle des éléphants, celles des footballeurs, etc.), un ***caractère*** ou ***variable*** plus ou moins clairement défini sur cette population (le poids d'un bébé, celui d'un éléphant, le nombre de buts marqués dans une saison par un footballeur, etc.) ; on s'y demande alors si telle valeur du caractère est « grande », ou à partir de quelle valeur on peut dire qu'une valeur du caractère est une grande valeur…

1.2. Études statistiques

Pour répondre aux questions précédentes, on doit mener à bien, chaque fois, une *étude statistique* comportant plusieurs étapes.

L'objectif est toujours le même. Considérons la troisième question ci-dessus : « Quand on dit qu'un joueur de foot a marqué beaucoup de buts dans une saison, ça veut dire qu'il en a marqué au moins combien ? » Supposons qu'on ait relevé le nombre de but marqués par les joueurs de football européens de ligue 1 en 2008-2009 :

– si l'on trouvait que, par exemple, 47 % de ces joueurs ont marqué un nombre de buts inférieur ou égal à 34, c'est-à-dire que 100 % – 47 % = 53 % ont marqué un nombre de buts strictement supérieur à 34, on pourra conclure que, par rapport à l'ensemble des joueurs considérés, 34 *n'est pas* un nombre de buts très élevé ;

– si, au contraire, on trouvait que, par exemple, 78 % des joueurs ont marqué un nombre de buts inférieur ou égal à 34, et donc que seulement 100 % – 78 % = 22 % des joueurs ont marqué un nombre de buts strictement supérieur à 34, on pourra conclure que 34 est un nombre de buts *assez élevé*.

2. Une AER de statistique : le démarrage

On considère le fichier ods (ou xls) disponible dans le dossier PCL2/2009-2010 d'Espar : il contient des données sur le poids et la taille d'enfants de 4 à 7 ans issues d'un fichier pris sur Internet.

Question 1. Précisez comment il faudrait faire pour savoir si un enfant de 5 ans qui pèse 19 kg est un enfant trop maigre pour son âge.

Question 2 : Élaborer, à partir de ces données, une étude statistique permettant de répondre à la question suivante : un enfant de 5 ans qui pèse 21,5 kg est-il trop gros pour son âge ? On utilisera les connaissances statistiques au programme du collège.

La classe sera répartie en équipes. On notera soigneusement les étapes de l'étude menée, mêmes celles qui n'ont pas abouti. Chaque équipe rendra à la fin de la séance un fichier texte relatant l'étude menée ainsi qu'un fichier « tableur » contenant le travail numérique.

Remarque : on a fixé qu'un enfant de 5 ans serait un enfant de 60 à 71 mois.

La question suivante n'a pas eu le temps d'être examinée ; elle sera reprise en Séminaire à partir des travaux rendus par les groupes.

Question 3 : Élaborer, à partir de cette étude, le guide d'une AER pour une classe de collège dont on choisira le niveau ou pour une classe de seconde.

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2009-2010

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 10: mardi 1er décembre 2009

Programme de la séance. 1. Observation & analyse // 2. Forum des questions // 3. Recherche dans les archives

1. Observation & analyse

On rappelle ci-dessous la situation qu'il s'agissait d'étudier :

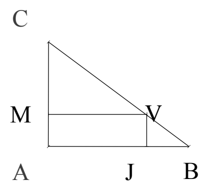
Un paysan possède un terrain qui a pour forme un triangle rectangle ABC, rectangle en A, avec AB = 4 km et AC = 3 km. Une nouvelle loi oblige notre paysan à travailler dans un champ de forme rectangulaire. Comme le paysan a construit sa grange contenant ses machines en A, il souhaite que A appartienne au champ. Enfin, pour des raisons économiques évidentes, notre paysan souhaite que son champ ait l'aire la plus grande possible. Pouvez-vous l'aider ?

On a à déterminer « l'aire la plus grande possible », soit la valeur maximale d'une grandeur, a, qui est ici une « grandeur produit », l'aire.

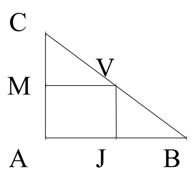
Le problème que l'on a à étudier apparaît donc comme un spécimen d'un type de tâches que l'on peut d'abord formuler ainsi :

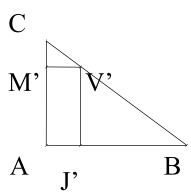
Étant donné un système $\mathcal{S}$ et une grandeur a attachée à ce système, déterminer la valeur maximale prise par la grandeur a.

Le premier modèle effectué est matérialisé par le graphique suivant :



Il permet d'abord de mettre en évidence que la grandeur a est variable :





On peut par exemple, pour s'en convaincre, mesurer les longueurs AM et MV et effectuer leur produit. Une autre manière de faire est d'utiliser un logiciel de géométrie dynamique – les deux techniques n'étant pas exclusives et pouvant être complémentaires.

On voit ensuite apparaître géométriquement, à partir du travail précédent, qu'une fois M fixé (ou V, ou encore J), ***tous les autres éléments sont fixés***. En d'autres termes, si l'on choisit le point M ***comme paramètre***, l'aire a est alors une fonction (inconnue) de M $\in$ [AC] : $a = \varphi(M)$. Si l'on repère M sur [AC] par la distance AM = x, alors il existe une fonction f (dont l'expression nous est inconnue pour le moment) telle que $a = f(x)$.

Le type de tâches dont relève le problème soumis aux élèves peut alors être formulé ainsi :

Étant donné un système $\mathcal{S}$ et deux grandeurs ℓ et a attachées à ce système, telles que la seconde apparaisse comme dépendant – comme une *fonction* – de la première, déterminer la valeur de la grandeur ℓ pour laquelle la grandeur a prend une valeur maximale.

Et la technique peut se laisser analyser de la façon suivante :

En utilisant les propriétés du type de systèmes dont $\mathcal{S}$ est un spécimen, exprimer a en fonction de ℓ : $a = f(\ell)$; étudier alors le maximum de f sur l'ensemble des valeurs admissibles (possibles) de ℓ.

D'une manière générale, étant donné un système $\mathcal{S}_0$, qui peut être non mathématique (comme le champ du paysan, ci-dessus), pour produire des connaissances sur $\mathcal{S}_0$ on cherche à le « modéliser » par un système $\mathcal{S}_1$ ***mathématique*** – on parle alors de ***modélisation mathématique***. Il reste ensuite à « faire parler » $\mathcal{S}_1$, ce qu'on réalisera généralement par la construction d'une chaîne de modèles mathématiques $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$, etc.

La problématique de la modélisation est clairement présente dans les programmes actuels. On citera ici ce passage du programme de 6^{e} entré en vigueur à la rentrée 2005 :

Les connaissances géométriques permettent de modéliser des situations (par exemple représenter un champ par un rectangle) et de résoudre ainsi des problèmes posés dans l'espace ordinaire. Les formes géométriques (figures planes, solides) se trouvent dans de nombreux domaines : architecture, œuvres d'art, éléments naturels, objets d'usage courant. Ces mises en relation permettent peu à peu de dégager le caractère universel des objets géométriques par rapport à leurs diverses réalisations naturelles ou artificielles.

Voici comment les notes du Séminaire 2004-2005 développaient cette question :

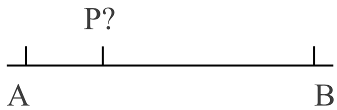
① Ce dernier développement insiste sur le fait que la géométrie est un outil de mathématisation, et plus exactement de… ***géométrisation***, c'est-à-dire de construction de ***modèles géométriques*** de ce que les textes examinés nomment des ***situations*** et que nous avons appelé plus des ***systèmes*** – le terme s'appliquant aussi bien à des entités mathématiques qu'à des réalités extramathématiques.

② D'une façon générale, le travail mathématique vise à rendre disponibles des outils de modélisation mathématique. Les systèmes de nombres et les calculs numériques, le calcul algébrique ainsi que le « calcul » sur les équations et inéquations, le calcul trigonométrique, le calcul vectoriel, le « calcul » des fonctions, le calcul des probabilités, etc., ont pour raison d'être essentielle le fait d'être des outils de modélisation mathématique – dont le rôle spécifique doit être chaque fois précisé –, c'est-à-dire des outils de ***construction de modèles*** et de ***travail*** de ces modèles – on les « travaille » pour les « faire parler ».

❶ Notons que, en beaucoup de cas, lorsque le système initial $\mathcal{S}_0$ est extramathématique, le premier modèle mathématique $\mathcal{S}_1$ est ***géométrique***. C'est ***ensuite*** que se déploient les outils numériques, algébriques, etc., afin de modéliser plus « efficacement » ce premier modèle. Un exemple historique de ce phénomène par ailleurs banal est fourni par un épisode qui prend place le 19 février 1795, lors de la quatrième leçon que Laplace (1749-1827) donne dans le cadre de l'éphémère École normale de l'an III en examinant le problème de physique suivant :

Deux lumières dont l'une [B] est quatre fois plus intense que l'autre [A], étant séparées par un intervalle de trois pieds, déterminer sur la droite qui les joint le point [P] qu'elles éclairent également.

Le premier modèle est ici un mixte de géométrie (voir le schéma ci-après) et de physique (la « force » de la lumière émise par une source décroît en $\frac{1}{x^2}$).



Ce premier modèle laisse place à un second modèle en forme d'équation : la droite (AB) étant munie d'un repère tel que $\overline{AB} = 3$, posons $x = \overline{AP}$; on a alors au point P cherché : $\frac{1}{x^2} = \frac{4}{(3-x)^2}$. Le travail de ce modèle révèle l'existence non pas d'***une*** mais de ***deux*** solutions ! L'équation est en effet équivalente à $4x^2 - (3-x)^2 = 0$ et on a : $4x^2 - (3-x)^2 = 3(x-1)[x-(-3)]$. L'équation étudiée équivaut donc à $(x-1)[x-(-3)] = 0$: elle a ainsi deux solutions, l'une positive ($x = 1$) et qui correspond à un point P situé ***entre*** les deux lumières – ce à quoi l'on s'attendait –, l'autre ***négative*** ($x = -3$), et qui correspond au point P' symétrique de B par rapport à A – un point dont on aurait pu tout aussi bien, sans le secours de l'algèbre, ignorer l'existence, comme le souligne Laplace dans un bref panégyrique de l'outillage algébrique :

Ces solutions inattendues nous prouvent la richesse de la langue algébrique, à la généralité de laquelle rien n'échappe quand on la sait bien lire.

Deux générations avant Laplace, pourtant, on tenait encore les solutions négatives pour absurdes !

❷ Lorsque le système à propos duquel on s'interroge est déjà mathématique, la modélisation ne passe pas nécessairement par la géométrie. (...)

Nous avons poursuivi ce travail par l'analyse des moments de l'étude présents dans la réalisation de l'AER. Les élèves professeurs ont été invités à travailler sur cette question et à rendre, par trinôme, une synthèse de leur analyse. Nous partirons de ces travaux la semaine prochaine pour poursuivre l'analyse et envisager l'évaluation et le développement.

2. Forum des questions

AER sur les vecteurs en seconde

J'ai fait une AER pour l'introduction des vecteurs dont je ne suis pas pleinement satisfaite car, si d'un point de vue compréhension de l'objet ça va, du point de vue de la nécessité d'introduire ce nouvel objet, je ne suis pas arrivé à le faire passer correctement. Auriez-vous des idées ? (JLH, 2de, 9)

On notera d'abord que , dans ce type de question, il est pertinent de fournir, éventuellement par mel, l'AER dont il s'agit de façon à pouvoir explorer une ou plusieurs voie de développement. Faute du matériel évoqué, nous considèrerons l'activité suivante, observée lors d'une première visite, ainsi que l'extrait de rapport qui lui est consacré :

Activité de découverte :

On a construit un « M » par les points A,B,C,D et E dans le repère ci contre.

Lire les coordonnées de ces points.

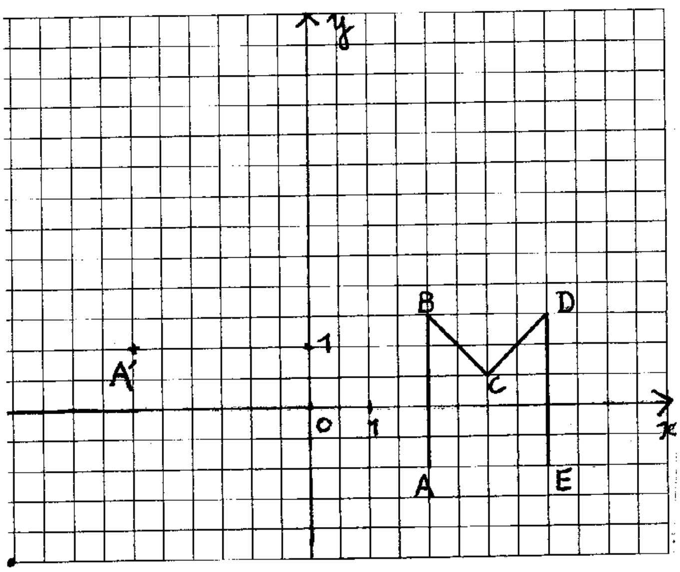
A(;),B(;),C(;)

D(;), E(;).

On souhaite reconstruire la figure en Déplaçant le point A sur le point A'.

1) Construire sur le repère la figure ainsi déplacée et représenter par une flèche les déplacements des points A,B,C,D,E

2) Lire les coordonnées des points A',B',C',D' et E' de la figure ainsi reconstruite.



3) Que peut-on conjecturer sur les quadrilatères AA'B'B, AA'C'C, AA'D'D et AA'E'E?

« 2. Le travail effectué respecte le texte du programme de mathématiques de la classe relatif à ce thème, et la question du déplacement d'une figure est pertinente pour faire émerger une partie de l'organisation mathématique liée à la translation et aux vecteurs. On notera également positivement que P s'efforce de mettre en place une structure ternaire de l'étude. En revanche, certains éléments de l'organisation mathématique et de sa mise en place sont perfectibles.

3. On notera d'abord que P donne une activité qui est déjà partiellement problématisée par des questions. Il aurait fallu partir de la donnée de la figure et de la question principale : Comment reproduire la figure à partir du point A' ? En outre, la donnée du quadrillage, si elle permet d'obtenir une technique « simple » de reproduction, ne motive pas l'apparition du parallélogramme. Il aurait donc fallu donner le travail à effectuer sur papier blanc. La reproduction du point B' aurait alors sans doute conduit à plusieurs stratégies dont l'une serait de reproduire le déplacement de A en A', ce qui conduirait à tracer la parallèle à (AA') passant par B puis à choisir B' tel que AA' = BB' de façon à ce que B'BAA' soit un parallélogramme. C'est tout cela qu'on aurait pu faire émerger du travail et qui est masqué par les techniques permises par l'existence du quadrillage – ce qui limite donc de fait le *topos* des élèves. »

Développement oral et au tableau

Supposons ainsi que l'on ait à reproduire à la règle et au compas la figure suivante à partir du point

A’ comme suit.

Voici une description de deux voies de construction d’un point de la figure, B’ par exemple, qui repose sur la même technique de construction :

a. On trace la parallèle à (AB) passant par A’ : pour cela, on trace la droite (AB) ; et on considère les intersections H et K de (AB) et d’un cercle de sommet A’. On construit la médiatrice de [HK], d. Puis on considère les points I et J intersection d’un cercle de centre A’ et de d. On construit alors la médiatrice de [IJ], d’, puis les points d’intersection de d’ avec le cercle de centre A’ et de rayon AB. Le point B’ est le point tel que ABB’A’ est un parallélogramme.

b. On trace la parallèle à (AA’) passant par B.

Cette construction est complexe (7 cercles et 3 droites sont à construire). On peut simplifier en considérant que l’on doit obtenir que ABB’A est un parallélogramme. Il suffit lors de construire le milieu du segment [BA’], O, en construisant la médiatrice de ce segment, puis le symétrique de A par rapport à O (on est amené à construire 3 cercles et 3 droites : le gain est de 4 cercles...). [On notera qu’une autre technique peut être mise en œuvre : celle qui consiste à construire le cercle de entre A’ et de rayon AB et le cercle de centre B et de rayon AA’. Il faut alors choisir pour B’ le point tel que ABB’A est un parallélogramme ; cette construction est plus rapide que les précédentes (2 cercles et 1 segment).]

C’est ce type d’exploration du problème de construction que le professeur doit réaliser pour permettre la constitution d’une AER et notamment d’une arborescence de questions cruciales.

On ajoutera que, en dehors de la question du déplacement, l’intérêt des vecteurs consiste principalement à permettre le repérage. On consultera sur ce point les archives du séminaire.

AER sur les puissances en classe de 4^e

1. Pour le thème « puissances » en classe de 4^e, je pense qu’une raison d’être des puissances de 10 serait « donner un ordre de grandeur ». Cela s’applique aussi à l’écriture scientifique mais pas aux puissances d’autres nombres. Comment peut-on motiver cette dernière notion ? (NC, 4^e, 10)

2. Comment puis-je mettre en place une véritable AER sur le thème puissance en 4^e ? Comment ne pas proposer quelque chose d’artificiel à propos de cette nouvelle notation ? Quelle situation concrète proposer pour découvrir toutes les propriétés ? (J’ai une idée pour introduire la notation, moins pour les propriétés suivantes.) (MC, 4^e, 9)

Examinons d’abord ce que contient le programme de quatrième sur le thème des puissances.

La pratique du calcul numérique (exact ou approché) sous ses différentes formes en interaction (calcul mental, calcul à la main, calcul à la machine ou avec un ordinateur) permet la maîtrise des procédures de calcul effectivement utilisées, l'acquisition de savoir-faire dans la comparaison des nombres ainsi que la réflexion et l'initiative dans le choix de l'écriture appropriée d'un nombre suivant la situation. (...)

Connaissances
Puissances d'exposant entier relatif [Thème de convergence]
Notation scientifique
Capacités
Comprendre les notations a^n et a^{-n} et savoir les utiliser sur des exemples numériques, pour des exposants très simples et pour des égalités telles que : $a^2 \times a^3 = a^5$; $(ab)^2 = a^2b^2$; $\frac{a^2}{a^5} = a^{-3}$, où a et b sont des nombres relatifs non nuls.
Utiliser sur des exemples numériques les égalités : $10^m \times 10^n = 10^{m+n}$; $\frac{1}{10^n} = 10^{-n}$; $(10^m)^n = 10^{m \times n}$ où m et n sont des entiers relatifs.
Sur des exemples numériques, écrire et interpréter un nombre décimal sous différentes formes faisant intervenir des puissances de 10.
Utiliser la notation scientifique pour obtenir un encadrement ou un ordre de grandeur du résultat d'un calcul.

Commentaires
Pour des nombres autres que 10, seuls des exposants simples sont utilisés. Les résultats sont obtenus en s'appuyant sur la signification de la notation puissance et non par l'application de formules.
Par exemple, le nombre 25 698,236 peut se mettre sous la forme : 2,569 823 6 ⊣ 10 4 ou 25 698 236 ⊣ 10 – 3 ou 25,698 236 ⊣ 10 3.

Commentaire développé oralement sur la détermination de l'OM à partir des programmes.

L'introduction du domaine Nombres et calcul donne ainsi un premier élément relatif à la raison d'être de la notion de puissance : la « pratique du calcul numérique (exact ou approché) sous ses différentes formes ». La consultation des documents ressources permet d'augmenter ce résultat d'un lien avec les grandeurs.

À partir de la classe de 4^e, on peut mettre à profit le calcul sur les puissances, dont les règles de calcul s'étendent aux calculs sur les grandeurs : 1 cm^2 = $(10^{-2}$ m$)^2$ = 10^{-4} m^2 …

3.5 Masses

L'essentiel a été installé à l'école à ce sujet. Le calcul sur les masses, plutôt que sur leurs seules mesures, facilite les conversions, rendant inutiles l'emploi d'un tableau. L'emploi des puissances de 10 permet d'éviter le recours à des fractions décimales. Par exemple :
23 g = 23 (1/100 kg) = (23 × 1/100) kg = 23/100 kg = 0,23 kg.

La consultation des archives du Séminaire permet de compléter substantiellement ces premiers résultats d'enquête. Voici par exemple un extrait de ce que l'on trouve dans les notes du Séminaire 2003-2004 et que nous commenterons oralement.

Des puissances, pour quoi ?

Que serait une AER possible pour l'introduction de la notation 10^n ? Mon idée est de présenter un nombre tel que 1 000 000 000 000 000 …, de leur faire remarquer qu'un nombre aussi long à écrire peut être difficile à comparer ou à multiplier (il faut compter les zéros). Mais comment ne pas

« balancer » la notation 10^n ? (4e, 11)

① Historiquement, la notation exponentielle ne s'est imposée que très lentement.

❶ Le passage suivant de l'ouvrage classique de Florian Cajori, *A History of Mathematical Notations* (Dover, 1993) permettra de s'en convaincre.

An important step was taken by Romanus [Adrien Romain, Adriaan van Roomen (1561-1615)] who uses letters and writes bases as well as the exponents in expressions like

$$A(4)+B(4)+4A(3) \textit{ in } B+6A(2) \textit{ in } B(2)+4A \textit{ in } B(3)$$

which signifies $A^4+B^4+4A^3B+6A^2B^2+4AB^3$. A similar suggestion came from the Frenchman, Pierre Hérigone [1580-1643], a mathematician who had a passion for new notations. He wrote our a^3 as $a3$, our $2b^4$ as $2b4$, and our $2ba^2$ as $2ba2$. The coefficient was placed *before* the letter, the exponent *after*. In 1636 James Hume brought out an edition of the algebra of Vieta [*L'Algèbre de Viète, d'une méthode nouvelle claire et facile*, Paris, 1636], in which he introduced a superior notation, writing down the base and elevating the exponent to a position above the regular line and a little to the right. The exponent was expressed in Roman numerals. Thus, he wrote A^{iii} for A^3. Except for the use of the Roman numerals, one has here our modern notation. Thus, this Scotsman, residing in Paris, had almost hit upon the exponential symbolism which has become universal through the writings of Descartes.

❷ C'est dans sa *Géométrie* de 1637 que Descartes introduisit la notation aujourd'hui adoptée. À ce propos, Cajori note encore :

Hérigone and Hume almost hit upon the scheme of Descartes. The only difference was, in one case, the position of the exponent, and, in the other, the exponent written in Roman numerals. Descartes expressed the exponent in Arabic numerals and assigned it to an elevated position. Where Hume would write $5a^{\text{iv}}$ and Hérigone would write $5a4$, Descartes wrote $5a^4$. From the standpoint of the printer, Hérigone's notation was the simplest. But Descartes' elevated exponent offered certain advantages in interpretation which the judgment of subsequent centuries has sustained.

② En conséquence de ce qui précède, il n'est aucunement question de faire « inventer » par les élèves la notation 10^5 pour 100 000, etc. ! La conception d'une AER à ce sujet gagnera à prendre place au sein d'un PER fondé sur la question :

Q. Comment calculer avec des « grands nombres » ?

On se borne dans ce qui suit à quelques observations préalables à l'élaboration d'un tel PER.

❶ Dans une première étape, on peut par exemple s'être arrêté sur une notation non terminale permettant une ébauche de règles de calcul, comme le montre le calcul suivant :

342 000 000 + 480 000 = 342[6] + 48[4] = 34200[4] + 48[4] = 34248[4] = 342480000.

❷ Il n'y a aucune raison ici pour que la notation exponentielle apparaisse : cette dernière est en effet liée, non à l'addition mais à la ***multiplication*** : une AER convenable devra ainsi conduire à vouloir exprimer ***multiplicativement*** sous la forme 48 × 100 ou même 48 × 10 × 10 le nombre que, dans la notation précédemment introduite on écrirait 48[2]. Voir que l'on a

$$48[n] = 48 \underbrace{\times 10 \times \ldots \times}\, 10$$

n facteurs

est la difficulté à vaincre ; le passage, ensuite, de l'écriture $48 \times 10 \times \ldots \times 10$ à l'écriture 48×10^n est simplement commode et ne pose pas de difficulté conceptuelle majeure…

③ Que peut-on viser avec une classe de 4ᵉ ? On s'en tiendra à quelques notations en vrac.

❶ Soit le nombre $a = 123456789$, dont on veut calculer le carré. On a en fait : $a^2 = 123456789^2 = 15241578750190521$.

❷ Supposons que la calculatrice disponible ne fournisse pas le résultat (ou pas le résultat exact) : on songera ici, par exemple, à la calculatrice disponible sur certains modèles de téléphones mobiles. On aura par exemple $12345^2 = 152399025$ mais la calculatrice se refusera à donner 123456^2…

❸ On peut alors procéder ainsi : on écrit d'abord que $123456789 = 1234 \times 10^5 + 56789$. Il vient alors : $123456789^2 = (1234 \times 10^5 + 56789)^2 = 1234^2 \times 10^{10} + 2 \times 1234 \times 56789 \times 10^5 + 56789^2$. La calculette disponible permet d'obtenir les produits utiles ; il vient : $123456789^2 = 1522756 \times 10^{10} + 140155252 \times 10^5 + 3224990521 = (152275600000 + 140155252) \times 10^5 + 3224990521$. On procède alors à deux additions successives « à la main », qui donne le résultat attendu.

• On examine à la lueur de ce qui précède deux nouvelles questions.

① La première question est la suivante :

Exposants négatifs ?

Dans le chapitre sur les puissances, comment motiver le fait de calculer des puissances de nombres négatifs pour des élèves de 4ᵉ ? (4ᵉ + soutien & IDD en 5ᵉ, 13)

❶ Le travail fait sur les puissances a montré jusqu'à présent deux grands types d'emplois : les puissances servent à ***calculer*** (comme ci-dessus), et elles servent à ***modéliser*** (comme dans la séance observée en 4ᵉ). L'utilité des puissances de nombres négatifs devra être recherchée dans ces deux champs d'intervention. On laissera ici le problème ***ouvert*** – et ***à chercher*** – et on se bornera, à titre d'illustration, à examiner le type de problèmes auquel il appartient sur l'exemple des ***exposants*** négatifs : « comment motiver le fait de calculer des puissances d'exposant négatif pour des élèves de 4ᵉ ? »

❷ Supposons une population de bactéries qui double chaque heure ; un comptage a permis d'établir que l'effectif courant est $N = 1792$. Quel était l'effectif il y a trois heures ? Quel sera l'effectif dans cinq heures ? La réponse à la seconde question est donnée par l'expression $N \times 2^5 = 1792 \times 32 = 57344$ tandis que la réponse à la première question sera donnée par : $N \times 2^{-3} = 1792 \times 0{,}125 = 224$. C'est autour de tels questionnements que l'on pourra faire surgir l'emploi de la notation a^{-n}.

❸ S'agissant du calcul, le programme lui-même apporte ce commentaire :

Modifier l'écriture d'un nombre comme 25 698, 236 sous la forme $2{,}5698236 \times 10^4$ ou $25\,698\,236 \times 10^{-2}$ ou $25{,}698236 \times 10^3$ est une activité que doivent pratiquer les élèves.

Bien entendu, l'intérêt de telles activités de calcul doit être précisé. On aura par exemple :

$1{,}77245385^2 = (177245385 \times 10^{-8})^2 = 177245385^2 \times 10^{-16} = (17724 \times 10^4 + 5385)^2 \times 10^{-16} =$

$(17724^2 \times 10^8 + 2 \times 17724 \times 5385 \times 10^4 + 5385^2) \times 10^{-16} = 17724^2 \times 10^{-8} + 2 \times 17724 \times 5385 \times 10^{-12} + 5385^2 \times 10^{-16} = 3{,}14140176 + 0{,}00019088748 + 28998225 \times 10^{-16}$.

Il vient :

$$\begin{array}{r} 3{,}14140176 \\ 0{,}00019088748 \\ 0{,}0000000028998225 \\ \hline 3{,}1415926503798225 \end{array}$$

On observera que l'on a : $\pi = 3{,}14159265358\ldots$ Le nombre a dont on a calculé le carré vérifie donc : $\sqrt{\pi} - a = \dfrac{\pi - a^2}{\sqrt{\pi} + a}$. On a : $\sqrt{\pi} + a > 2a > 2 \times 1{,}7724 = 3{,}5448$. Par ailleurs, il vient : $\pi - a^2 < (3{,}59 - 0{,}37) \times 10^{-9} = 3{,}22 \times 10^{-9}$. On a ainsi : $\dfrac{\pi - a^2}{\sqrt{\pi} + a} < \dfrac{3{,}22}{3{,}55} \times 10^{-9}$ et donc : $\sqrt{\pi} - 1{,}77245385 < 10^{-9}$.

On laissera les participants poursuivre le travail d'enquête dans les archives.

Nous travaillerons la semaine prochaine, entre autres, sur les deux questions suivantes :

Algorithmique en seconde

1. Les élèves en classe de 2de doivent faire de l'algorithmique. Mais j'ai du mal à leur expliquer la notion de boucle (tant que... fin tant que) et à leur faire appliquer un algorithme donné. Comment présenter l'algorithmique pour que cette notion soit comprise ? Puis-je exiger d'eux qu'ils sachent appliquer un algorithme alors qu'ils ne maîtrisent pas la théorie mathématique (dichotomie, convergence,...) sous-jacente ? (PB, 2de, 10)
2. À propos de l'algorithmique en classe de seconde, je ne trouve que des exemples très simples (algorithme pour écrire une fonction « je choisis un réel, je lui ajoute 4, je multiplie l'ensemble par le nombre choisi...) ou alors des algorithmes complexes (dichotomie pour trouver le zéro d'une fonction). Je n'imagine pas les élèves capables de trouver un tel algorithme, ni d'utiliser les outils de programmation... Je n'ai pas non plus envie d'y passer deux heures. J'aimerais avoir votre avis sur la question. (BC, 2de, 8)

3. Recherches dans les archives

Deux exposés sont au programme de cette séance.

a) Une première recherche dans les *Archives* tentera de répondre à la question suivante :

Que nous disent les *Archives du Séminaire* quant à la ***gestion des unités dans les calculs*** ? ***Faut-il les conserver et pourquoi*** ?

• Le compte rendu de la recherche s'efforcera de présenter (en les choisissant adéquatement) des matériaux éventuellement présents dans les *Archives* pour une réponse à la question de la semaine ci-après.

Doit-on garder les unités dans un calcul ? (JBM, 1)

• Cette recherche est confiée au trinôme formé de SC, FG et AM.

b) La deuxième recherche dans les *Archives* aura trait à la question suivante :

Que nous disent les *Archives du Séminaire* **sur la manière de mener de front l'étude de deux thèmes** ?

• Le compte rendu de la recherche s'efforcera de présenter (en les choisissant adéquatement) des matériaux éventuellement présents dans les *Archives* pour une réponse aux questions de la semaine ci-après.

Après les vacances de Toussaint on est censé « jongler » avec deux chapitres. Comment est-on censé faire ? Commencer les deux chapitres en même temps, une fois arriver au milieu d'un chapitre commencer l'autre ou bien attendre d'être arrivé aux exercices avec le premier chapitre pour commencer le deuxième ? (CP, 8) Où peut-on trouver des informations concernant l'étude de deux thèmes en parallèle ? J'ai fait des recherches dans les archives du séminaire (mot clé : « thèmes jumelés ») qui se révèlent infructueuses. (NC, 9)

• Cette recherche est confiée au trinôme formé de AB, ÉF et CP.

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2009-2010

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 11 : mardi 8 décembre 2009

Programme de la séance. 1. Questions de la semaine // 2. La notice Évaluation et notation // 3. Forum des questions // 4. Observation & analyse

0. Règles de vie et de travail

Développé oralement

1. Questions de la semaine

On note un net progrès de certains dans la problématisation du métier. On citera par exemple les questions suivantes posées pour l'essentiel la semaine dernière :

Avec ma classe de 4^e, on a résolu ensemble des exercices dont le type de tâches était de sommer deux nombres en écriture fractionnaire. Lors du contrôle, le type de tâches d'un exercice consistait à sommer plusieurs nombres en écriture fractionnaire. La moitié de la classe n'est pas arrivée à résoudre l'exercice. Pour moi, ces deux types de tâches sont pourtant identiques. Où est le souci ?

J'ai proposé une activité à mes élèves de troisième pour faire émerger la propriété suivante : la section d'une sphère par un plan perpendiculaire est un cercle. Pour cela, l'activité était un exercice qui demandait de calculer la longueur de la section obtenue. Le plan perpendiculaire était situé à une distance connue du centre de la sphère, et le rayon de la sphère était connu. Pour leur faire trouver la propriété, j'ai fait une expérience afin qu'ils visualisent et qu'ils me disent eux-mêmes ce qu'était la section. Est-ce que cette méthode satisfait aux conditions d'une AER ? Expérience : j'ai pris une balle de ping pong, je l'ai sectionnée avec une scie, et j'ai reporté une partie de la balle sur un tampon encreur puis sur une feuille blanche. Et les élèves ont vu la trace d'un cercle.

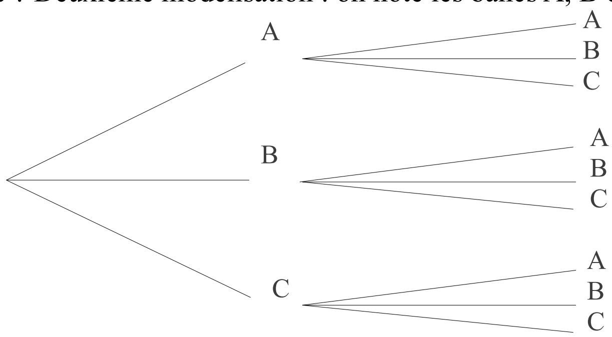
Quelle est le rythme scolaire pour les DM et devoirs ? Je veux dire, par exemple, on finit les activités et la leçon ; pour la semaine d'après, ils ont un DM à faire, on le corrige le lundi qui suit et le DS a lieu le jeudi ou vendredi. Est-ce trop étalé dans le temps ?

Comment appréhender une chapitre dont la plupart des notions sont connues (exemple : statistique en seconde) ? Difficile de fabriquer l'AER pour faire émerger des connaissances déjà vues. Quel doit alors être le but de l'AER ?

Je remarque dans ma classe une amélioration flagrante de comportement et d'investissement. J'impute partiellement ceci à l'approche du conseil de classe. Y a-t-il des techniques qui permettent de s'appuyer sur ce phénomène pour, par exemple, le prolonger ?

Lors d'une AER sur les puissances en 4^e, les élèves ont rencontré des difficultés pour poser une multiplication d'un grand nombre par 5. Je m'en étais pas rendu compte sur des exercices de calcul mental car ils sont appliqués sur des petits nombres, mais le problème est réel. Dois-je y revenir à travers des exercices sur ces notions de 6e ?

Dans les documents ressources pour la seconde en proba-stat, un exemple fait l'objet de deux modélisations qui conduisent à deux probabilités différentes pour un même événement. J'ai l'impression que la deuxième modélisation contient une erreur. Est-ce le cas ? Il s'agit du problème suivant : deux personnes s'assoient successivement, au hasard, sur trois bancs de deux places. Quelle est la probabilité qu'elles soient côte à côte ? Deuxième modélisation : on note les bancs A, B et C.



Conclusion : la probabilité que les deux personnes soient sur le même banc est donc $\frac{1}{3}$. Cette conclusion part du principe qu'il y a équiprobabilité entre (A, A) et (A, B) or ce n'est pas le cas, si ?

Comment créer du topos pour les élèves lors des séances de synthèse ?

Il y a encore trop d'élèves professeurs qui ne posent pas régulièrement de questions : par exemple; sur les 4 dernières semaines, un élève professeur n'a posé aucune question et dix n'en ont posé qu'une.

2. La notice sur l'évaluation

Dans la notice « Évaluation et notation », il est écrit que mettre des demi-points rassemble la classe au niveau des résultats. Faut-il dans le barème, lors d'une correction de question se dire : si l'élève a tout mis je lui mets 2/2, s'il manque ça 0,5 points en moins, s'il manque deux choses 1 point en moins, etc. A priori, que ce soit du point de vue de l'IUFM de physique[14] ou des inspecteurs, cela éparpille la classe. Faut-il alors voir les réponses des élèves de manière plus globales ? (MH, 2de, 11)

On reproduit ci-dessous le passage de la notice auquel il est fait référence :

7. L'arithmétique des notes : ses vertus et ses faiblesses

7.1. Considérons à nouveau un devoir D comportant trois questions, Q_1 notée sur 2, Q_2 notée sur 3, Q_3 notée sur 5. Et soit d'abord un professeur notant en J, comme sur les tableaux suivants.

Note /2	0	1	2
Effectif	1	7	20

Note /3	0	1	2	3
Effectif	1	4	8	15

Note /5	0	1	2	3	4	5
Effectif	1	3	4	4	7	9

Il est clair qu'on ne peut passer sans plus d'information de ces tableaux au tableau des notes sur 10 obtenues par les élèves au devoir D : il faut pour cela savoir quel élève a obtenu quelles notes aux questions Q_1, Q_2, Q_3. En supposant ainsi une certaine assignation de notes compatible avec les distributions précédentes, on arrive par exemple à la distribution de notes sur 10 ci-après (voir le diagramme ci-après à gauche).

14 On notera que l'auteur de la question veut sans doute désigner ici la filière « Sciences physiques - Chimie » de l'IUFM d'Aix-Marseille.

Note sur 10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectif	0	1	1	1	0	4	2	5	0	5	9

La moyenne des notes ainsi « fabriquées » est de 7,43 environ. Considérons maintenant un professeur notant plutôt « en cloche ».

Note /2	0	1	2
Effectif	3	16	9

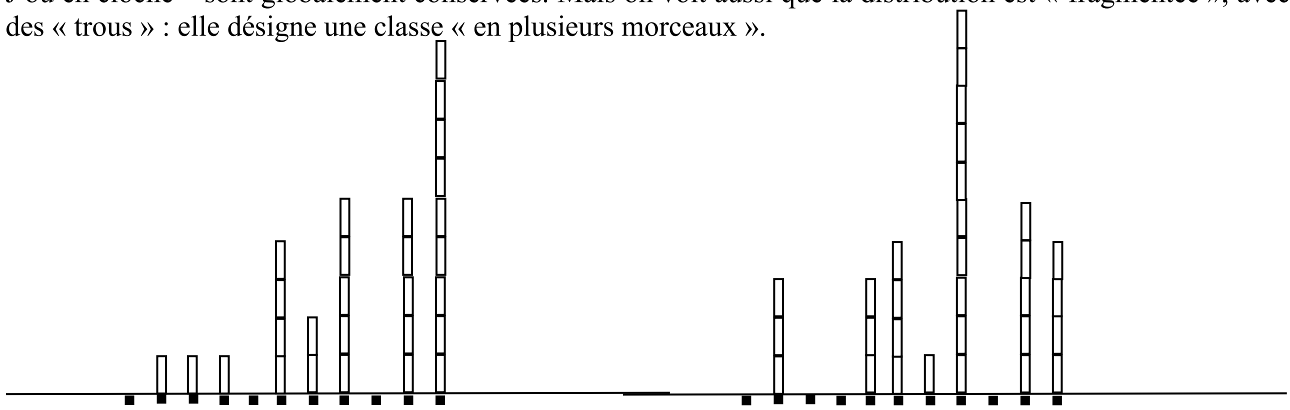
Note /3	0	1	2	3
Effectif	2	5	16	5

Note /5	0	1	2	3	4	5
Effectif	1	2	8	10	5	2

À nouveau, on suppose une certain assignation de notes aux 28 élèves de la classe qui conduise aux distributions précédentes ; on arrive alors à la distribution de notes sur 10 ci-après (voir le diagramme ci-après à droite).

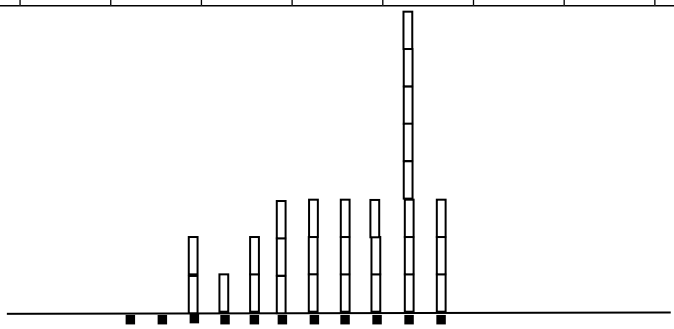
Note sur 10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectif	0	3	0	0	3	4	1	8	0	5	4

La moyenne, ici, est de 6,5 : la chute est sensible, de l'ordre de 12,5 %. Cela noté, on voit que les allures – en J ou en cloche – sont globalement conservées. Mais on voit aussi que la distribution est « fragmentée », avec des « trous » : elle désigne une classe « en plusieurs morceaux ».



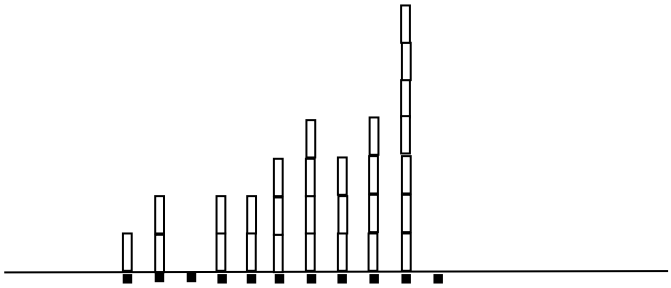
7.2. Reprenons les notes des 28 élèves conduisant aux distributions « en J » ci-dessus, mais en leur ajoutant aléatoirement –0,5, 0 ou 0,5. La distribution des notes sur 10 est alors la suivante.

Note sur 10	[0 ; 1[	[1 ; 2[	[2 ; 3[	[3 ; 4[	[4 ; 5[	[5 ; 6[	[6 ; 7[	[7 ; 8[	[8 ; 9[	[9 ; 10[	10
Effectif	0	0	2	1	2	3	3	3	3	8	3



La moyenne baisse un peu : elle vaut maintenant 7,21 environ. De la même façon, reprenons les notes des 28 élèves conduisant aux distributions « en cloche » ci-dessus, en leurs ajoutant –0,5, 0 ou 0,5 de façon aléatoire.

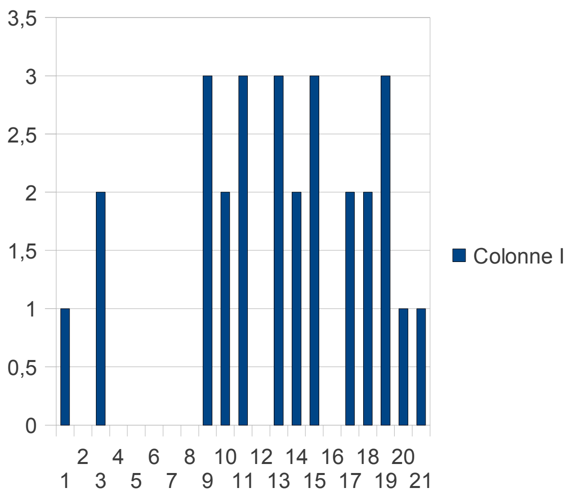
Note sur 10	[0 ; 1[	[1 ; 2[	[2 ; 3[	[3 ; 4[	[4 ; 5[	[5 ; 6[	[6 ; 7[	[7 ; 8[	[8 ; 9[	[9 ; 10[	10
Effectif	1	2	0	2	2	3	4	3	4	7	0



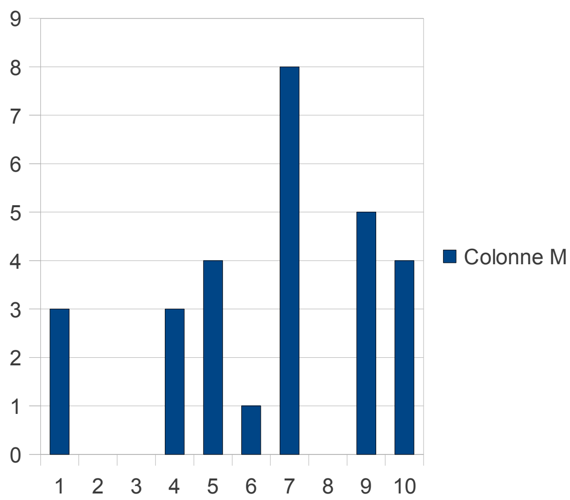
À nouveau, la moyenne baisse légèrement : elle est ici de 6,36 environ. Mais les distributions « avec demi-points » donnent l'image d'une classe *davantage rassemblée*. Alors que l'écart type des notes « en J » *sans* demi-points est de 2,61 environ, celui des notes « en J » *avec* demi-points est d'environ 2,38. De même, alors que l'écart type des notes « en cloche » *sans* demi-points est de 2,68 environ, celui des notes *avec* demi-points est à peu près de 2,60. (Les coefficients de variation sont respectivement de 35,1 % et de 41,2 % *sans* demi-points, ils sont de 32,9 % et de 41 % *avec* demi-points.) Le resserrement, sans doute limité numériquement, est graphiquement sensible. On voit ainsi que l'usage des demi-points a une vertu cachée : faire apparaître la classe comme plus « homogène » qu'elle n'apparaîtrait sinon.

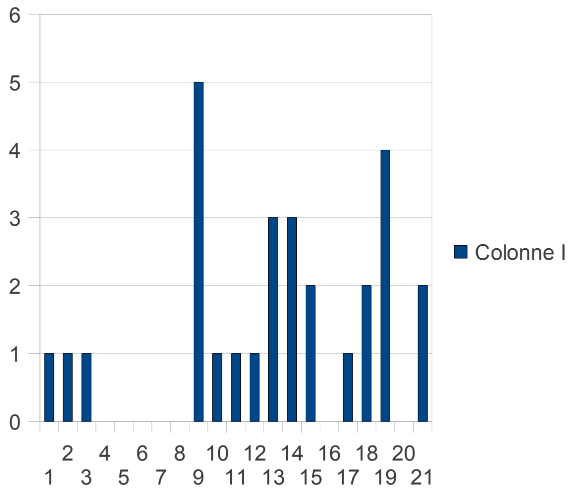
Le passage met l'accent sur un effet de la notation avec des demi-points : elle fait apparaître « graphiquement » la classe comme davantage rassemblée. On trouvera ci-dessous quelques graphiques qui l'illustrent obtenus avec le tableur d'openoffice (voir le fichier notes.ods sur Espar)

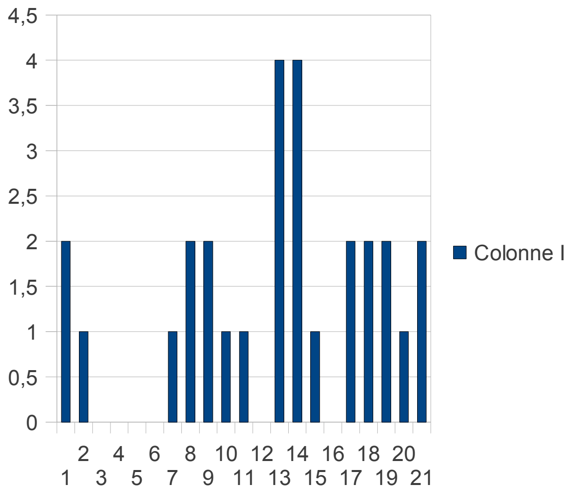
Écart type : 2,57



écart type 2,68







Écart type : 2,69 écart type 2,8

Même quand l'écart type est supérieur, la classe apparaît graphiquement davantage rassemblée, à cause des points intermédiaires qui apparaissent.

Tout dépend donc ce que l'on entend par « rassembler » et « éparpiller » la classe. En effet, on a moins d'élèves qui ont la même note, et en ce sens on peut dire que la classe se trouve éparpillée ; mais de ce fait même, la distribution est « plus continue » et la classe apparaît davantage rassemblée. Contrairement à ce que la question peut laisser entendre, ce qui est contenu dans la notice ne donne aucune directive sur l'utilisation ou pas des demi-points : elle éclaire sur les phénomènes que cette utilisation peut produire, et le professeur pourra ainsi choisir, suivant son projet didactique, d'utiliser ou pas ce type de notations. On ajoutera pour terminer qu'il faut garder en mémoire que la note que l'on obtient n'est pas une mesure, et que sa fabrication doit être en adéquation avec le projet didactique poursuivi par le professeur ; dans cette perspective, il est important de ne pas avoir une classe « coupée en deux », ou du moins qui se vit comme telle, notamment pour que les élèves en difficulté puissent s'identifier comme « pas trop loin » de l'objectif à atteindre – ce qui peut justifier la notation avec demi-points si elle permet à la classe d'avoir une image davantage rassemblée.

Pour clore le travail sur cette notice, nous examinerons des questions relatives à la prise en charge de la dyslexie, de la dyspraxie,...

Voici les réponses apportées par trois trinômes à deux questions, fort proches, sur ce sujet :

13. J'ai des élèves qui sont dyslexiques, dyspraxiques, dys… ; Quels sont les dispositifs à mettre en place pour eux ? Exiger moins d'exercices ou noter plus largement ?

T1

Aucun élément de réponse

T2

Le passage trouvé en page 8 et cité-ci après n'est pas explicitement spécifique aux élèves «dyslexiques, dyspraxiques ou autres « dys...» mais peut apporter un élément de réponse à la question précédente.

<u>*Page 8, paragraphe 5.4*</u> :

Le bon calibrage des tâches proposées dans un DS ne dépend pas de l'« intuition » du professeur mais de *prises d'information* qu'il aura multipliées. Il convient en tout premier lieu que les tâches proposées relèvent de *types* de tâches *effectivement étudiés en classe* – autrement dit, et sauf exception, se situent dans la ZEN. Mais il faut encore que le professeur se soit assuré de la maîtrise progressive par les élèves des organisations mathématiques construites autour de ces types de tâches. Pour cela, il devra conjuguer *l'observation et l'analyse cliniques* – en principe *sans évaluation* – du travail ordinaire de la classe avec des prises d'information réalisées dans des conditions d'autonomie plus proches de celles propres à un devoir de contrôle, telles des *micro-épreuves* ou des mini-épreuves 6 qui permettront une évaluation (notée ou non) de la part du professeur et une *auto-évaluation* de la part de l'élève, relançant en cela le projet collectif d'étude et préparant la classe à s'affronter au devoir de contrôle.

58. Comment adapter le travail pour des élèves ayant des problèmes (dys…) ? Faut-il mettre en place un autre système de notation ?

T

Page 1

La valeur d'une « copie » d'élève, par exemple, ce sera donc sa valeur pour un certain projet individuel et/ou collectif – point de vue qui éloigne définitivement de l'aporie de la « vraie note », et que l'on s'efforcera d'expliciter dans les développements qui suivent.

Page 5

4. Correction et erreurs

4.1. Le principe fondamental, on l'a souligné, est que la valeur d'une production d'élève ou d'équipe d'élèves tient dans ce qu'elle apporte au projet didactique de la classe.

Page 9/10

Chaque élève doit être « contrôlé », pour deux ordres de raisons : les unes sont didactiques et internes à la classe, les autres institutionnelles et externes à la classe. La première fonction est évidemment de permettre au professeur comme aux élèves de prendre d'éventuelles décisions, à portée individuelle ou collective, concernant l'étude des organisations mathématiques sur lesquelles porte le contrôle : en arrêter l'étude, la poursuivre à propos de tel ou tel sujet, en reprendre certains aspects collectivement ou avec quelques élèves seulement, etc. La seconde fonction conduira à des décisions d'orientation formelle ou informelle, qu'on n'examinera pas plus avant ici. Cela noté, un tel contrôle prend ordinairement la forme d'une *épreuve commune* à l'ensemble des élèves de la classe. Mais rien ne l'impose : il en irait autrement s'il s'agissait d'un contrôle *oral* par exemple. Le fait que la classe affronte une même épreuve dans un même temps et en un même lieu est un problème *d'économie* scolaire, non un problème *d'équité*.

Page 10

Un contenu d'épreuve doit être un moyen adéquat de contrôler la maîtrise qu'ont les élèves des praxéologies mathématiques sur lesquelles porte le contrôle (en sa première comme en sa deuxième session), et cela compte tenu du degré attendu de maîtrise des contenus mathématiques en question. Le fait que les deux épreuves soient quelque peu différentes – par exemple parce qu'elles porteraient sur des ensembles de types de tâches en partie distincts – doit bien sûr avoir été clairement explicité, non seulement à titre de disposition institutionnelle mais aussi comme une exigence didactique qui va de soi : *par sa nature même*, le degré de maîtrise mathématique requis doit en effet pouvoir être contrôlé, le cas échéant, par le moyen de *plusieurs* prises d'information *différentes*. Un dispositif judicieux consiste à élaborer *deux* épreuves de contrôle, regardées par le professeur comme *également utilisables* : afin de ne pas s'abuser soi-même à cet égard, celui-ci pourra d'ailleurs s'imposer de tirer au sort – assez tôt pour assurer la reprographie nécessaire – celle de ces épreuves qui sera utilisée pour la première session. Cela n'empêchera pas que, pour prémunir les élèves contre la tentation d'échanger avec leurs voisins lors de l'épreuve, l'énoncé choisi fasse l'objet de deux versions très légèrement différentes.

On notera d'abord que ce sont ici des éléments technologico-théoriques qui sont livrés, et qu'ils sont réputés permettre de fabriquer une ou des techniques relatives aux types de tâches évoqués par les questions. Voyons cela.

Travail collectif dirigé.

Synthèse : On a mis en évidence que les éléments relevés dans la notice par les élèves professeurs justifient le fait de donner aux élèves deux épreuves de contrôle différentes : de la même manière que, lorsque les élèves sont absents, on effectue un devoir surveillé « de rattrapage » différent, on peut évaluer certains élèves sur une épreuve différente. La différence peut consister à enlever un des exercices proposés, le choix de l'exercice pouvant être obtenu par tirage au sort. On peut également prendre quelques minutes au début du contrôle pour lire oralement les énoncés des exercices – même si ce dispositif devra progressivement d'alléger au cours du collège de manière à ce que les élèves puissent arriver en 3e en s'en dispensant. On peut également avoir une notation prenant en charge certains efforts des élèves. Par exemple, on notera généreusement un élève qui a des problèmes d'expression en français et qui arrive à produire une mise en forme approximative mais marquant un progrès par rapport à ses productions précédentes. Il faut garder en tête que la note n'est pas une mesure mais permet d'évaluer le degré de maîtrise d'une OM par rapport à un projet d'étude ; dans le cadre de ce projet, pour ne pas que les élèves se découragent, il est important de valoriser les progrès.

2. Forum des questions

Algorithmique en seconde

1. Les élèves en classe de 2de doivent faire de l'algorithmique. Mais j'ai du mal à leur expliquer la notion de boucle (tant que... fin tant que) et à leur faire appliquer un algorithme donné. Comment présenter l'algorithmique pour que cette notion soit comprise ? Puis-je exiger d'eux qu'ils sachent appliquer un algorithme alors qu'ils ne maîtrisent pas la théorie mathématique (dichotomie, convergence,...) sous-jacente ? (PB, 2de, 10)
2. À propos de l'algorithmique en classe de seconde, je ne trouve que des exemples très simples (algorithme pour écrire une fonction « je choisis un réel, je lui ajoute 4, je multiplie l'ensemble par le nombre choisi...) ou alors des algorithmes complexes (dichotomie pour trouver le zéro d'une fonction). Je n'imagine pas les élèves capables de trouver un tel algorithme, ni d'utiliser les outils de programmation... Je n'ai pas non plus envie d'y passer deux heures. J'aimerais avoir votre avis sur la question. (BG, 2de, 8)
3. En seconde, les élèves sont initiés à l'algorithmique. Je ne sais pas si je dois passer beaucoup de temps pour étudier des exemples ou si la compréhension doit se faire de façon progressive. De même, j'hésite à rassembler tous les algorithmes dans une leçon : par exemple, pour voir si deux droites sont parallèles, on peut construire un algorithme. Faut-il l'énoncer dans le chapitre sur les droites ? Dans le cours sur les algorithmes ? De même, la notion de boucle / fin de boucle doit-elle être formalisée ? Ou dois-je n'attendre de mes élèves qu'une capacité à utiliser un algorithme ? (PB, 2de, 11)
4. Quel est le meilleur logiciel d'algo ? (TT, 9)

1. On notera d'abord que la rédaction de la deuxième question témoigne d'une posture dont il faut se déprendre : la travail à effectuer à propos de l'algorithmique n'est pas une question d'envie du professeur ou encore d'opinion des formateurs mais s'imposent à tous par le biais du programme.

Voici, donc, ce que recèle le programme de seconde à propos de l'enseignement de l'algorithmique.

Les capacités attendues dans le domaine de l'algorithmique d'une part et du raisonnement d'autre part, sont transversales et doivent être développées à l'intérieur de chacune des trois parties. Des activités de type algorithmique possibles sont signalées dans les différentes parties du programme et précédées du symbole ◇.
(...)

◇Même si les logiciels traceurs de courbes permettent d'obtenir rapidement la représentation graphique d'une fonction définie par une formule algébrique, il est intéressant, notamment pour les fonctions définies par morceaux, de faire écrire aux élèves un algorithme de tracé de courbe.
◇ Encadrer une racine d'une équation grâce à un algorithme de dichotomie.
(...)
◇ Le cadre de la géométrie repérée offre la possibilité de traduire numériquement des propriétés géométriques et permet de résoudre certains problèmes par la mise en œuvre d'algorithmes simples.
(...)
À l'occasion de la mise en place d'une simulation, on peut :
• utiliser les fonctions logiques d'un tableur ou d'une calculatrice,
◇ mettre en place des instructions conditionnelles dans un algorithme.
◇ La répétition d'expériences aléatoires peut donner lieu à l'écriture d'algorithmes (marches aléatoires).
(...)

Algorithmique (objectifs pour le lycée)

La démarche algorithmique est, depuis les origines, une composante essentielle de l'activité mathématique. Au collège, les élèves ont rencontré des algorithmes (algorithmes opératoires, algorithme des différences, algorithme d'Euclide, algorithmes de construction en géométrie). Ce qui est proposé dans le programme est une formalisation en langage naturel propre à donner lieu à traduction sur une calculatrice ou à l'aide d'un logiciel. Il s'agit de familiariser les élèves avec les grands principes d'organisation d'un algorithme : gestion des entrées-sorties, affectation d'une valeur et mise en forme d'un calcul.

Dans le cadre de cette activité algorithmique, les élèves sont entraînés :
• à décrire certains algorithmes en langage naturel ou dans un langage symbolique ;
• à en réaliser quelques uns à l'aide d'un tableur ou d'un petit programme réalisé sur une calculatrice ou avec un logiciel adapté ;
• à interpréter des algorithmes plus complexes.
Aucun langage, aucun logiciel n'est imposé.

L'algorithmique a une place naturelle dans tous les champs des mathématiques et les problèmes posés doivent être en relation avec les autres parties du programme (fonctions, géométrie, statistiques et probabilité, logique) mais aussi avec les autres disciplines ou la vie courante.

À l'occasion de l'écriture d'algorithmes et de petits programmes, il convient de donner aux élèves de bonnes habitudes de rigueur et de les entraîner aux pratiques systématiques de vérification et de contrôle.

Instructions élémentaires (affectation, calcul, entrée, sortie). Les élèves, dans le cadre d'une résolution de problèmes, doivent être capables : •d'écrire une formule permettant un calcul ; • d'écrire un programme calculant et donnant la valeur d'une fonction ; ainsi que les instructions d'entrées et sorties nécessaires au traitement.
Boucle et itérateur, instruction conditionnelle Les élèves, dans le cadre d'une résolution de problèmes, doivent être capables : • de programmer un calcul itératif, le nombre d'itérations étant donné ; • de programmer une instruction conditionnelle, un calcul itératif, avec une fin de boucle conditionnelle.

Commentaires développés oralement

- On attend que l'algorithmique soit développée dans chacun des domaines du programme lorsque le besoin s'en fait sentir, par exemple pour calculer les valeurs d'une fonction de façon à réaliser un tableau de valeurs qui ne soit pas « à pas constant », ou encore déterminer l'équation d'une droite passant par deux points. Ils ont ainsi à écrire des algorithmes, et pas uniquement à en utiliser.
- Les objectifs qui figurent dans le programme de seconde sont les objectifs pour le lycée : on peut donc en seconde se donner des objectifs plus limités, et par exemple ne pas aborder la notion de

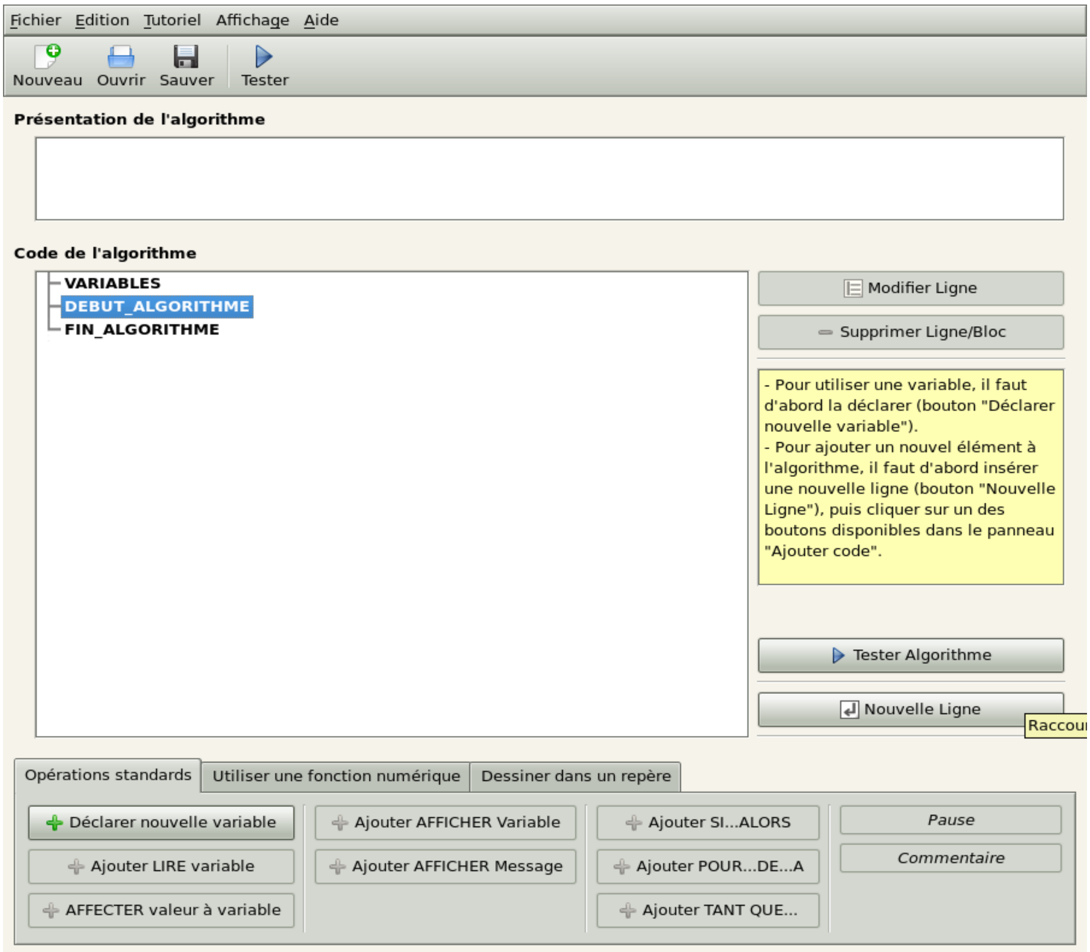
boucle ou encore ne pas en exiger la maîtrise. Comme toujours, c'est la motivation et la mise en fonction qui prime. On utilisera la notion de boucle si et seulement si elle s'avère utile.

La troisième question mentionne : « pour voir si deux droites sont parallèles, on peut construire un algorithme. Faut-il l'énoncer dans le chapitre sur les droites ? Dans le cours sur les algorithmes ? » Comme on vient de le voir, il ne s'agit pas de faire « un cours » sur les algorithmes, bien que l'on ait à synthétiser « régulièrement » les praxéologies relatives à l'algorithmique qui ont émergée ; les algorithmes produits resteront dans les domaines qui auront motivé leur production. On notera que l'on a ici un algorithme « simple » que l'on peut mettre en œuvre et programmer facilement, de la même façon que l'on peut mettre en place un algorithme qui donne l'expression d'une fonction affine quand on en connaît deux points, l'équation d'une droite passant par deux points ou donnée par son coefficient directeur et passant par un point, qui permettront aux élèves d'avoir un moyen de contrôle de leurs résultats.

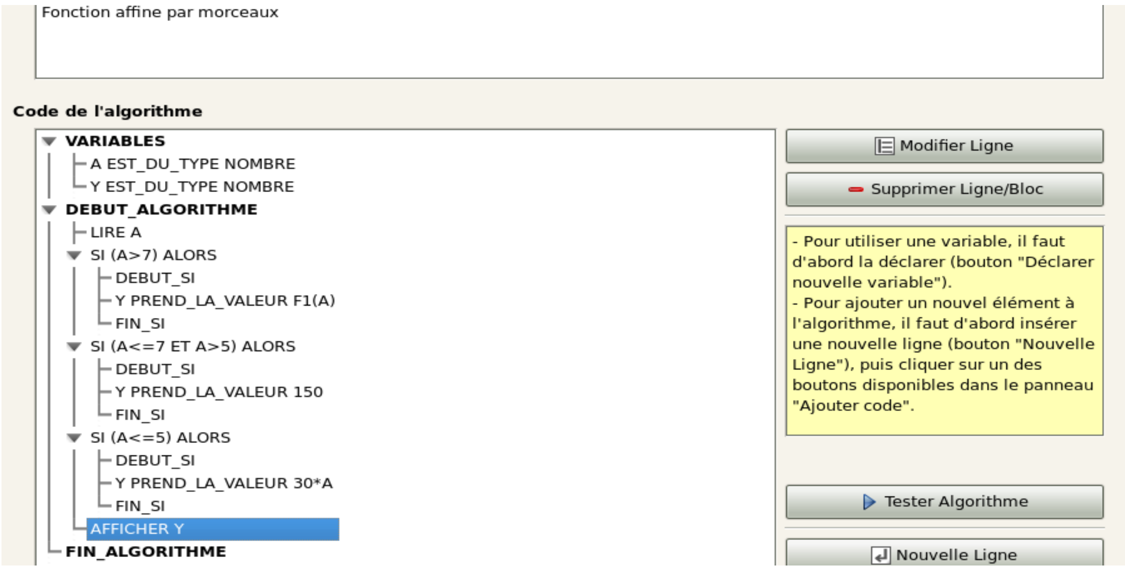
Pour amorcer le travail à ce propos, on se placera dans le domaine des fonctions et on supposera que les élèves ont à étudier la situation suivante :
Farida doit louer des véhicules pour les commerciaux de sa société pour un nombre de jours compris entre 1 et 30. Elle se voit proposer trois tarifs. 1. 150 € pour la première semaine et 25 € par jour supplémentaire ; 2. 30 € par jour ; 3. 25 € par jour plus 50 € de frais de dossier. Comment devra-t-elle choisir le tarif ? Déterminer une table de valeurs du tarif le plus avantageux qui lui permettra d'établir le budget prévisionnel des déplacements.

Le problème d'une expérimentation avec la calculatrice va se poser, par exemple pour la constitution d'une table de valeurs, ou encore pour le tracé de la courbe de la fonction f qui à x compris entre 1 et 30 associe le prix de la location. On peut donc légitimement poser le problème de trouver un moyen de tracer la courbe de cette fonction ou encore d'en constituer une table de valeurs sachant que la calculatrice sait tracer les courbes des fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4, où $f_1(x)=150$, $f_2(x)=150+25(x-7)$, $f_3(x)=50+25x$ et $f_4(x)=30x$.
Une première mise en forme, en langage naturel, appuyée sur une expérimentation avec Geogebra par exemple, conduit à écrire : si x est compris entre 1 et 5, $f(x)=f_4(x)$; si x est compris entre 5 et 7, $f(x)=f_1(x)$, et si x est supérieur à 7, $f(x)=f_2(x)$. Voilà un premier algorithme, en langue naturelle.
Il reste à examiner comment faire exécuter cet algorithme à une calculatrice ou à un logiciel d'algorithmique pour le calcul des valeurs d'abord, puis pour la représentation graphique (nous ne traiterons pas cet aspect ici). On peut également vouloir obtenir un moyen de vérifier la modélisation effectuée.

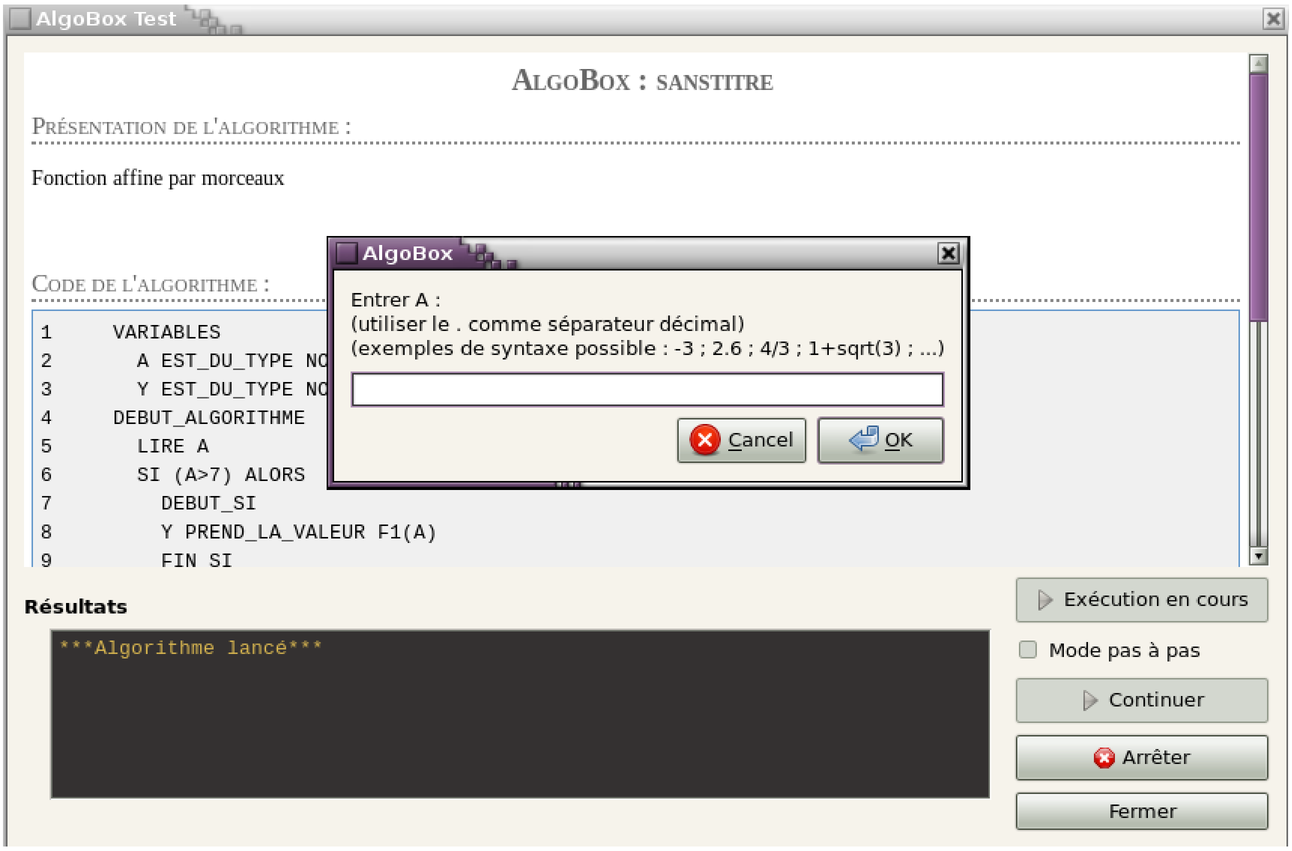
L'intérêt principal des logiciels d'algorithmique prévus pour l'enseignement réside dans le fait qu'ils contrôlent la structure des algorithmes réalisés et que les instructions figurent généralement sur la fenêtre : ils peuvent donc constituer une étape intermédiaire pour fabriquer l'algorithme avant de passer à la programmation sur la calculatrice. Voici par exemple la fenêtre du logiciel Algobox (http://www.xm1math.net/algobox/index.html), qui a l'avantage d'être disponible pour les 3 systèmes d'exploitation.



Voici ce que donne un algorithme permettant de calculer les valeurs de la fonction f définie ci-dessus :



Le test de l'algorithme est également possible :



On soulignera que le mode de test possède « un mode pas à pas » qui peut être très utile pour mettre en évidence ce que fait l'algorithme à chaque pas et qui sert de milieu pour comprendre les dysfonctionnements dans l'élaboration de l'algorithme.
Dans un second temps, on pourra améliorer l'algorithme pour obtenir directement la liste de valeurs cherchée, qui nécessite l'utilisation d'une boucle et d'une liste, et qu'on ne cherchera à mettre en place que lorsque l'on aura pratiqué des algorithmes simples.

Pour contrôler la modélisation obtenue, l'algorithme suivant s'avère suffisant :

```
Lire A
Si A < 7 alors
   Début Si
   Y prend la valeur 150
   Sinon
   Y prend la valeur 150 + 25*(A-7)
   Fin Si
C prend la valeur 30*A
Si C < Y alors
   Début Si
   Y prend la valeur C
   Fin Si
C prend la valeur 25*A+50
Si C < Y alors
   Début Si
   Y prend la valeur C
   Fin Si
```

Afficher Y

Pour terminer, au moins provisoirement, sur cette question, on soulignera que les techniques de construction mises en place au collège fournissent des exemples d'algorithmes que l'on fait exécuter, quelquefois en les modifiant, aux logiciels de géométrie dynamique.

Quelle est l'alternative gratuite à Geospace sur Mac ? (EO, 2[de], 10)

Il semble que la seule possibilité est d'utiliser le logiciel CaRMetal, disponible à l'adresse suivante : http://db-maths.nuxit.net/CaRMetal/, même s'il n'est pas une véritable alternative à Geospace.

Dans le programme d'accompagnement de 6[e], il est demandé de justifier la technique de multiplication , par exemple :

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times\ 12 \\ 30 \\ 150 \\ 180 \end{array}$$

Comment le faire alors que l'on ne sait pas développer ? (FA, 6[e], 11)

Voici le passage du document d'accompagnement du programme de collège concerné :

Les techniques posées de la multiplication de deux entiers et de la division euclidienne ont fait l'objet d'un apprentissage à l'école élémentaire. Toutefois, pour les élèves qui en début de collège ne maîtrise pas encore la technique de la multiplication posée, il convient de travailler d'une part, la maîtrise des tables et d'autre part, la justification de la technique en lien avec la numération, comme par exemple en incitant à écrire à côté de chaque étape de la multiplication posée le calcul lui correspondant, ce qui permet de donner du sens au « décalage de rangs » :

$$\begin{array}{rrrrl} & 1 & 3 & 2 & \\ \times & & 2 & 7 & \\ \hline & 9 & 2 & 4 & \quad 132 \times 7 \\ 2 & 6 & 4 & 0 & \quad 132 \times 20 = 132 \times 2 \times 10 \\ \hline 3 & 5 & 6 & 4 & \end{array}$$

On voit donc, d'abord, que la technique n'a pas à être justifiée à tout coup, mais seulement quand elle n'est pas robuste ; ensuite, qu'il est demandé de *travailler* la justification et non de la produire, ce qui suggère que cela a dû être fait à l'école primaire. Considérons ainsi les documents d'accompagnements des programmes de l'école primaire qui avaient cours jusqu'en 2008. On peut y lire à propos de la multiplication :

La compréhension de la technique usuelle de la multiplication nécessite la coordination de plusieurs types de connaissances :
– tables de multiplication ;
– numération décimale pour la gestion des retenues, dans les multiplications intermédiaires puis dans l'addition finale ;
– règle des 0 : passage du résultat de la multiplication d'un nombre par 3 à la multiplication de ce même

nombre par 30, par 300... ;
– distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

Certaines de ces connaissances commencent à être travaillées au cycle 2, mais la maîtrise nécessaire à la compréhension de la technique de la multiplication posée ne commence à être assurée qu'au cours de la première année du cycle 3.
Le cas de la technique de multiplication de nombres à deux ou trois chiffres... par un nombre à un chiffre est plus simple et sa maîtrise constitue un préalable à celle de la multiplication par un nombre à plusieurs chiffres. Elle repose sur les principes de la numération décimale et la connaissance des produits des nombres à un chiffre (les tables de multiplication) ainsi que sur la commutativité et la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ($27 \times 6 = 7 \times 6 + 20 \times 6$). Au cours d'une première étape, certains élèves peuvent être autorisés à utiliser un répertoire écrit de ces tables pour alléger la charge de travail. Cette technique peut être mise en relation avec le calcul de l'addition itérée (posée) d'un même nombre.
Le cas de la technique de la multiplication par un nombre à plusieurs chiffres intervient plus tard. Sa compréhension nécessite d'avoir assimilé l'utilisation de la « règle des 0 » et de la distributivité de la multiplication sur l'addition (multiplier 523 par 205 revient à multiplier 523 par 200 et par 5 et à additionner les deux résultats obtenus). Il est donc prudent d'attendre la fin de la première année ou la deuxième année du cycle 3.
Dans tous les cas, les élèves sont aidés par l'écriture explicite des « 0 » (qui doit être préférée au traditionnel principe de décalage), ainsi que par celle des produits partiels en marge du calcul à effectuer, comme dans l'exemple ci-dessous :

$$\begin{array}{cccccccl}
 & & & 5 & 2 & 3 & \\
 & & \times & 2 & 0 & 5 & \\
\hline
 & & 2 & 6 & 1 & 5 & \leftarrow 523 \times 5 \\
1 & 0 & 4 & 6 & 0 & 0 & \leftarrow 523 \times 200 \\
\hline
1 & 0 & 7 & 2 & 1 & 5 &
\end{array}$$

Multiplication d'un décimal par un entier

Une explication possible de la technique tient au fait que, par exemple, le résultat de $157{,}23 \times 45$ peut être obtenu en calculant d'abord $15\,723 \times 45$, puis en divisant le résultat par 100, car 157,23 c'est 15 723 divisé par 100. Le travail sur cette technique suppose donc une bonne compréhension des nombres décimaux (valeur des chiffres en fonction de leur position dans l'écriture à virgule), ainsi que celle de la multiplication et de la division par 10, 100..., dont on sait qu'elle est source de difficultés pour de nombreux élèves.
La mise en place de cette technique relève donc de la fin de cycle 3.

Reprenons l'exemple de 27 × 6 cité dans le document précédent.
27 fois 6, c'est 6 + 6 + 6 + ... + 6 27 fois ; comme 27, c'est 20 + 7, c'est encore 6 + 6 + 6 + ... + 6 20 fois ajouté à 6 + 6 + 6 + ... + 6 7 fois, c'est donc 20 × 6 + 7 × 6, soit 42 + 120 soit encore 162.

C'est cela qui a été mis en place à l'école primaire, à partir de la définition de la multiplication comme addition réitérée, et qui y a été travaillé depuis le CE2. Les élèves arrivant en 6e doivent donc avoir dans leur équipement praxéologique que 27 × 6 = 20 × 6 + 7 × 6, ou encore que 523 × 205 c'est 523 × 200 + 523 × 5, ce que l'on peut déduire de la définition de la multiplication comme addition réitérée. Nul besoin, donc, de « développer » pour cela. On trouvera ci-dessous pour preuve un exemple de productions d'élèves de CE2 données à analyser à un concours du CRPE : ces élèves avaient à résoudre sans calculatrice le problème suivant : « Le directeur d'une école achète 45 tables à 89 € ; combien d'argent a-t-il dépensé ? »

élève A

45 x 90 = 4050
4050 – 45 = 4005

élève B

~~45 + 89 = 134~~
9 x 89 = 801
~~801 x 4 = 3204~~
801 x 5 = 4005

élève C

10 x 89 = 890

89 +89 +89 +89 +89 = 445

3560 + 445 = 4005

890 +890 +890 +890 = 3560

10 x 89 = 890 4 x 890 = 3560
5 x 89 = 445 3560 + 445 = 4005

élève D

~~89 x 45 = 445 il a dépensé 445 €~~

89 + 89 + 89 + 89 + 89 + 89 + 89 + 89 +
89 + 89 + 89 + 89 + 89 + 89 + 89 + 89 +
89 + 89 + 89 + 89 + 89 + 89 + 89 + 89 +
89 + 89 + 89 + 89 + 89 + 89 + 89 + 89 +
89 + 89 + 89 + 89 + 89 + 89 + 89 + 89 +
89 + 89 + 89 + 89 + 89

élève E

4	3				
89	89	89	89	89	89
x 5	x 4	x 5	x 4	x 5	x 4
445	356	445	356	445	356

445 + 356 = 801801 + 801 = 1602
1602 + 801 = 2303

2303 + 1602 = 3905 3905 + 1602 = 5507

5 + 4 + 5 + 4 + 5 + 4 + 5 + 4 + 5 + 4 = 45

élève F

10 x 89 = 890
2 x 890 = 1780
2 x 890 = 1780
1780 + 1780 = 3560
20 x 89 = 1780
30 x 89 = 2670
40 x 89 = 3560
5 x 89 = 445
3560 + 445 = 4005

Le directeur va payer 4 005 euros.

élève G

10 x 89 = 890 4 x 890 = 3560
5 x 89 = 445 445 + 3560 = 4005

Il a dépensé 4 005 €

élève H

4 x 890 = 3560 5 x 89 = 445 3560 + 445 = 4005

Il a dépensé 4 005 €

Ce que l'on a donc à faire en 6e c'est, pour les élèves qui ont des difficultés à effectuer la technique de la multiplication posée, revenir aux justifications de cet algorithme, soit aux éléments technologiques qui ont permis de le produire à l'école primaire, de manière à leur donner des moyens de contrôle. On notera que cet usage de la technologie comme moyen de contrôle est un phénomène général.

Je suis en train de faire un chapitre sur les vecteurs. En ce qui concerne la somme de vecteurs, les exercices ne sont pas pratiques à corriger au tableau. On en a corrigé un en classe entière. Ils ont également deux méthodes dans leur synthèse. Je pensais leur donner une feuille d'exercices avec des constructions de somme de vecteurs à faire chez eux, la ramasser, ne pas la noter (car ce sont des exercices d'application) et voir au cas par cas les élèves ayant des problèmes dessus. Est-ce une bonne idée ? Faut-il faire nécessairement une mise en commun ? Dois-je distribuer une correction écrite de cette fiche ?
NB. : les exercices de ce type ne sont pas évidents à corriger au tableau car il faut dessiner le quadrillage au tableau (ce qui fait perdre du temps et j'en ai déjà perdu en les faisant pour la construction de translatés) ou bien utiliser le compas (mais je n'ai pas de compas et je ne suis pas sûre que cette technique soit bien comprise par les élèves quand elle est réalisée au tableau). (FD, 2de, 11)

Réponse express

1. Il faut penser à utiliser un rétropojecteur avec un transparent comportant un quadrillage pour disposer d'un tableau quadrillé, ou alors faire travailler les élèves directement sur le transparent, ce qui permet d'utiliser un compas « standard ». On peut également fabriquer un compas de fortune avec une ficelle.
2. Il est nécessaire de corriger et de faire une mise en commun des problèmes rencontrés ; la distribution d'une correction écrite et du dispositif décrit (examen des exercices) permet de réaliser la correction mais il faut en faire une mise en commun ; on peut également penser à donner la correction écrite et à demander aux élèves de comparer leur travail avec cette correction et de signaler les problèmes rencontrés (travail en autonomie pendant que le professeur passe dans les rangs), que l'on consigne au tableau et que l'on examine collectivement ce qui permet d'éventuellement retoucher les techniques présentes dans la synthèse.

Avec ma classe de 4^e, on a résolu ensemble des exercices dont le type de tâches était de sommer deux nombres en écriture fractionnaire. Lors du contrôle, le type de tâches d'un exercice consistait à sommer plusieurs nombres en écriture fractionnaire. La moitié de la classe n'est pas arrivée à résoudre l'exercice. Pour moi, ces deux types de tâches sont pourtant identiques. Où est le souci ? (LA, 4^e, 11)

Réponse express

Si c'est le même type de tâches, il peut être accompli avec la même technique. Voyons cela.

$1\cdot \frac{2}{5}+\frac{3}{2}=\frac{4}{10}+\frac{15}{10}=\frac{19}{10}$

2. $\frac{2}{5}+\frac{3}{2}+\frac{1}{4}+\frac{7}{3}=\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{7}{3}\right)=\frac{19}{10}+\left(\frac{3}{12}+\frac{28}{12}\right)=\frac{19}{10}+\frac{31}{12}=\frac{114}{60}+\frac{155}{60}=\frac{269}{60}$.

On a dans le deuxième cas au moins une étape supplémentaire : il faut grouper les termes deux par deux, un autre ingrédient étant de les grouper « judicieusement » de façon à minimiser le travail sur les fractions équivalentes. Le deuxième type de tâches se situe donc, d'après la situation décrite, dans la ZEP et non dans la ZEN. De fait, la fabrication de l'organisation mathématique devrait aboutir à ce que ce soit le deuxième type de tâches qui figure dans l'OM, ce qui sera sans doute le cas ici après la correction du contrôle et retouche de la synthèse.

Dans le programme de sixième, beaucoup de types de tâches ne semblent pas entrer dans la structure « types de tâches, techniques, éléments technologiques » !?! Pour certains je ne vois pas comment parler d'élément technologique (établir un ordre de grandeur, savoir effectuer les opérations sous diverses formes de calcul,...) et pour d'autres je ne vois même pas de technique (choisir les opérations qui conviennent...). (BP, 6^e, 11)

La difficulté rencontrée et décrite tient autant à la difficulté (surtout pour un débutant) à découper des types de tâches qu'à celle de repérer les ingrédients de mathématiques pertinents dans le cas de types de tâches qui sont « naturalisés et routinisés ». Voyons cela à propos des trois types de tâches cités : T_1 : « établir un ordre de grandeur » ; T_2 : « savoir effectuer les opérations sous diverses formes de calcul » ; T_3 : « choisir les opérations qui conviennent » que nous considérerons dans cet ordre.

1. Pour réaliser ce genre d'analyse, on peut examiner ce qui existe dans les ouvrages pour la classe de 6^{e}. On considérera d'abord l'ouvrage de la collection « nouveau Prisme », des éditions Belin.

Voici par exemple ce qu'il propose dans le chapitre traitant de l'addition et de la soustraction (page 29) :

D Ordre de grandeur d'une somme, d'une différence

Un **ordre de grandeur** d'une somme ou d'une différence fournit une estimation de cette somme ou de cette différence. Il permet d'anticiper ou de contrôler un résultat.

Règle Pour déterminer un **ordre de grandeur** d'une somme ou d'une différence, on additionne ou on soustrait des ordres de grandeur de chaque terme de cette somme ou de cette différence.

Exemple 1 Calculer un ordre de grandeur de la somme 101 + 998.
101 est proche de 100 et 998 est proche de 1 000. Or, 100 + 1 000 = 1 100, donc 101 + 998 est proche de 1 100. Ainsi, 1 100 est un **ordre de grandeur** de la somme 101 + 998.
On note : 101 + 998 ≈ 1 100. La **valeur exacte** de la somme 101 + 998 est 1 099.

Exemple 2 Calculer un ordre de grandeur de la différence 1 005 – 98,9.
1 005 est proche de 1 000 et 98,9 est proche de 100. Or, 1 000 – 100 = 900, donc 1005 – 98,9 est proche de 900. Ainsi, 900 est un **ordre de grandeur** de la différence 1 005 – 98,9.
On note : 1 005 – 98,9 ≈ 900. La **valeur exacte** de la différence 1 005 – 98,9 est 906,1.

On a extrait de cet ouvrage de 6^{e} quelques spécimens de T_1 que nous reproduisons ci-dessous, avec une solution, en bleu, qui nous semble conforme à ce qui figure ci-dessus.

Calculer un ordre de grandeur de chaque somme pour dire lequel des résultats proposés est faux.
a. 19 + 51 + 29 ; résultats proposés : 819 et 99 ;
b. 407 + 989 +296 + 97 ; résultats proposés : 2 662 et 1 789
c. 3,07 + 19,8 + 9,05 ; résultats proposés : 31,92 et 3 192

a. 19 est proche de 20 ; 51 proche de 50 et 29 proche de 30 ; donc 19 + 51 + 29 est proche de 20 + 50 + 30 = 100. Un ordre de grandeur de la somme est donc 100 ; 819 est donc un résultat faux.
b. 407 est proche de 400, 989 est proche de 1000, 296 proche de 300 et 97 proche de 100 ; un ordre de grandeur de 407 + 989 +296 + 97 est donc 400 + 1000 + 300 + 100 = 1800. 2 662 est donc un résultat faux.
c. Un ordre de grandeur de 3,07 + 19,8 + 9,05 est 3 + 20 + 9, soit 32. le résultat 3 192 est donc faux.

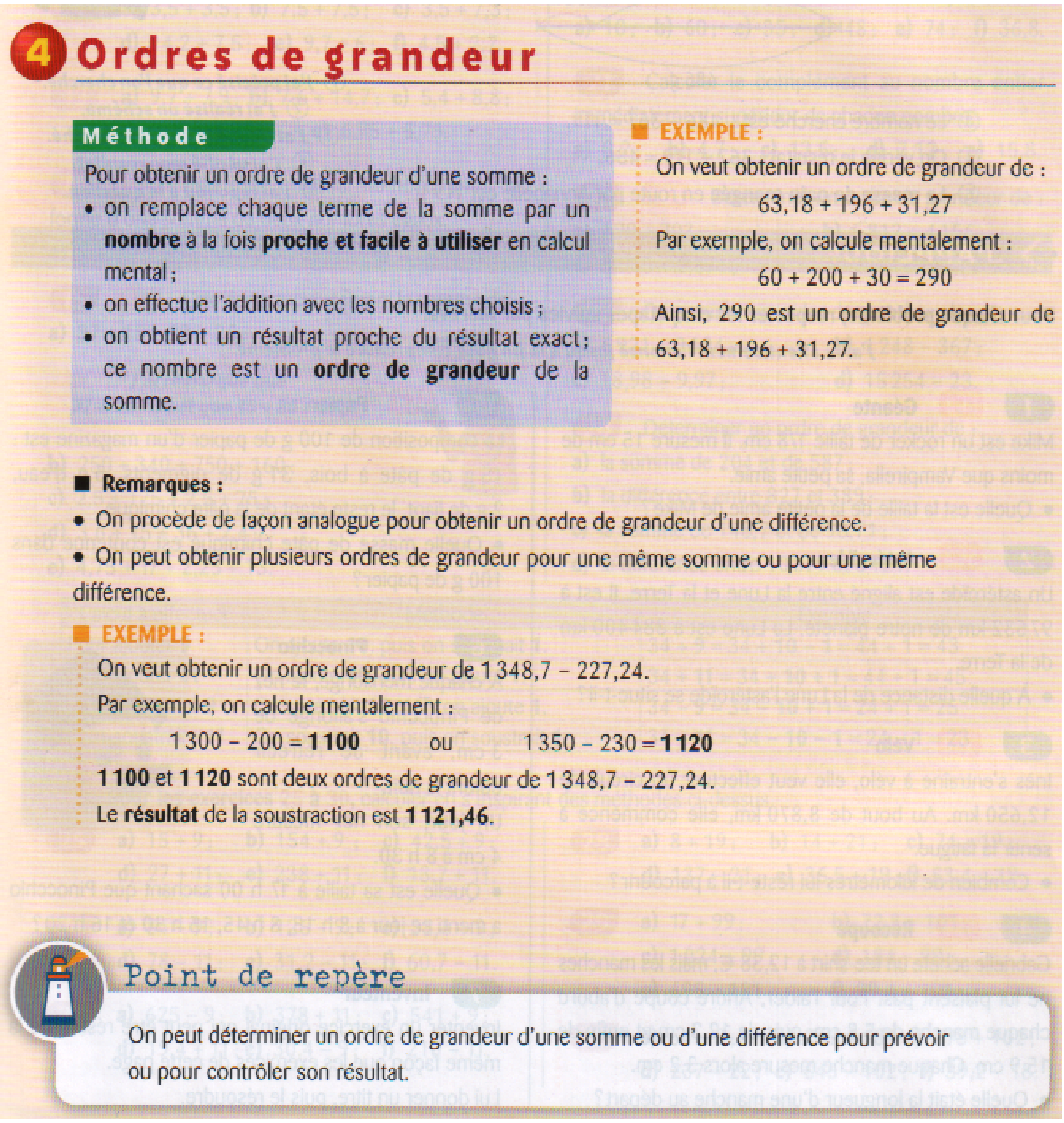
Loïc a 10 euros en poche. Il souhaite acheter un lot de cinq effaceurs à 3,97 €, un cahier grand format à 1,95 € et une pochette de papier calque à 3,05 €. Trouver un ordre de grandeur du prix de chaque article et prévoir si Loïc pourra régler ses achats.

Le prix du lot d'effaceurs est proche de 4 €, celui du cahier proche de 2 € et celui du papier calque de 3 € ; Un ordre de grandeur du prix de l'ensemble des articles est donc 4 € + 2 € + 3 €, soit 9 €, ce qui est inférieur à 10 €. Loïc devrait donc pouvoir régler ses achats.

Déterminer un ordre de grandeur de chacune des différences suivantes :
a. 10 009 – 999,5 ; ***b***. 99 987,5 – (999,8+2,3).

Un ordre de grandeur de 10 009 – 999,5 est 10 000 – 1 000 = 9 000.
Un ordre de grandeur de 99 987,5 – (999,8+2,3) est 100 000 – 1 000 = 99 000.

Voici maintenant ce que propose un autre ouvrage, celui de la collection Phare, aux éditions Hachette éducation, dans le même chapitre (page 49).



4 Ordres de grandeur

Méthode

Pour obtenir un ordre de grandeur d'une somme :
- on remplace chaque terme de la somme par un **nombre** à la fois **proche et facile à utiliser** en calcul mental ;
- on effectue l'addition avec les nombres choisis ;
- on obtient un résultat proche du résultat exact ; ce nombre est un **ordre de grandeur** de la somme.

EXEMPLE :

On veut obtenir un ordre de grandeur de :
63,18 + 196 + 31,27
Par exemple, on calcule mentalement :
60 + 200 + 30 = 290
Ainsi, 290 est un ordre de grandeur de 63,18 + 196 + 31,27.

Remarques :
- On procède de façon analogue pour obtenir un ordre de grandeur d'une différence.
- On peut obtenir plusieurs ordres de grandeur pour une même somme ou pour une même différence.

EXEMPLE :

On veut obtenir un ordre de grandeur de 1 348,7 – 227,24.
Par exemple, on calcule mentalement :
1 300 – 200 = **1 100** ou 1 350 – 230 = **1 120**
1 100 et **1 120** sont deux ordres de grandeur de 1 348,7 – 227,24.
Le **résultat** de la soustraction est **1 121,46**.

Point de repère

On peut déterminer un ordre de grandeur d'une somme ou d'une différence pour prévoir ou pour contrôler son résultat.

Quels sont les éléments qui viennent justifier la technique explicitée ?
Il en est un, la définition de ce qu'est un ordre de grandeur, qui est donné dans l'encadré « méthode » et que nous reformulons quelque peu pour lui donner une portée plus grande : Un ordre de grandeur du résultat d'une opération est un nombre proche de ce résultat.
On en a une raison d'être dans le point de repère : il est utile pour prévoir et contrôler le résultat d'une opération. On retrouve ces deux ingrédients, formulés un peu différemment dans le premier ouvrage cité.

On notera que les deux ouvrages ne parlent pas d'ordre de grandeur d'un nombre (voir *infra*).
Ce qu'il faudrait ajouter, c'est pourquoi la technique employée permet d'obtenir un nombre proche du résultat de l'opération : cela repose sur la compatibilité de l'ordre des nombres positifs avec les opérations. Par exemple, pour l'addition, si x est compris entre $a - e$ et $a + e$ et si y est compris entre $b - e'$ et $b + e'$ alors $x + y$ sera compris entre $a + b - (e + e')$ et $a + b + (e + e')$. Bien entendu, cela ne peut pas être formellement mis en place en 6e, où la justification sera donc expérimentale.

On soulignera que l'emploi de l'expression « ordre de grandeur » est conforme ici à un sens qui est celui du langage courant, tandis que la notion d'***ordre de grandeur d'un nombre*** est définie en classe de 4e. Nous la présenterons dans ce qui suit.

Soit un réel $a > 1$; on nomme échelle de base a l'ensemble des réels a^n, où $n \in \mathbb{Z}$, qui « couvre » l'ensemble des réels strictement positifs $\mathbb{R}_+^*$: pour tout réel $x > 0$, il existe un unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $a^n \leq x < a^{n+1}$. Il existe alors un unique réel $k \in [1 ; a[$ tel que $x = k \cdot a^n$. Lorsque $a = 10$, qui est la base utilisée traditionnellement en physique, $k \cdot a^n$ est appelée ***l'écriture scientifique*** de x. On notera que les physiciens ne sauraient utiliser la totalité de l'échelle de base 10, ainsi que le souligne fortement l'un d'eux dans le passage qui suit. (http://www.lacosmo.com/Nature39.html).

> Un résultat résume bien la situation concernant l'échelle du monde physique : quand on les représente sous forme de puissances de 10, les nombres que les physiciens manipulent ont des exposants se situant, grosso modo, entre –100 et +100. Autrement dit ces exposants comportent seulement deux chiffres [1. L'indication est donnée sans souci de précision et ne veut servir qu'à fixer les idées. Dans un calcul physique ou dans des théories très exotiques pourra apparaître exceptionnellement un exposant de trois chiffres, avec un nombre tel que 10^{120} par exemple.]. Par exemple le nombre d'atomes dans l'Univers visible est de l'ordre de 10^{80} et le plus petit temps imaginable (ou temps de Planck) vaut 5×10^{-44} seconde.

➔ L'***ordre de grandeur*** d'un réel > 0 dans l'échelle $\{ a^n / n \in \mathbb{Z} \}$ est l'une des puissances a^n, et non autre chose. En base 10, par exemple, 6 745 239 a pour ordre de grandeur 10^7 = 10 000 000, et non, disons, 7 000 000.

➔ Si $a^n \leq x < a^{n+1}$, l'ordre de grandeur en base a de x est soit a^n, soit a^{n+1}. Mais où faut-il « couper » l'intervalle $[a^n ; a^{n+1}[$? Le principe de la réponse est le suivant : l'ordre de grandeur de x est celle des extrémités de l'intervalle $[a^n ; a^{n+1}[$ qui est ***la plus proche*** de x. Mais comment « mesurer » la distance de x à a^n et a^{n+1} ? Fondée sur le fait que l'échelle est ***géométrique*** (les rapports « géométriques » a^{n+1}/a^n sont constants) et non pas ***arithmétique*** (les rapports « arithmétiques » $a^{n+1} - a^n$ ne le sont pas), la bonne réponse est celle-ci (même si on la rencontre bien rarement dans les « archives du métier ») : si $y \leq x < z$, on dit que x est (strictement) plus proche de y que de z, non pas si $x - y < z - x$, mais si $\frac{x}{y} < \frac{z}{x}$. Ainsi x est plus proche de a^n que de a^{n+1} si et seulement si $\frac{x}{a^n} < \frac{a^{n+1}}{x}$ c'est-à-dire si $x^2 < a^{2n+1}$, soit encore si $x < \sqrt{a} \cdot a^n$. Si donc $a^n \leq x < \sqrt{a} \cdot a^n$, l'ordre de grandeur de x est a^n ; et si $\sqrt{a} \cdot a^n \leq x < a^{n+1}$, l'ordre de grandeur de x est a^{n+1}. Dans le cas où $a = 10$, le « séparateur » entre 10^n et 10^{n+1} est donc $\sqrt{10} \cdot 10^n$ ($\approx 3{,}1623 \cdot 10^n$), en sorte que l'ordre de grandeur de 4 076 883 = 4,076 883 · 10^6 est 10^7, tandis que l'ordre de grandeur de 3 076 883 est 10^6. [Pour plus de détail, on se reportera au traitement de la question qu'on trouve consigné dans les notes de la séance 10 du Séminaire 2004-2005 et pour des précisions sur la ***dénomination*** des puissances de 10, on pourra se reporter par exemple à l'article « Échelles longue et courte » de l'encyclopédie *Wikipedia* (http://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89chelle_longue) ainsi qu'aux références qui y sont proposées (notamment l'article « Liste de nombres »).]

Les considération précédentes mettent en évidence que ce qui est travaillé en 6^{e}, et qui l'a déjà été à l'école primaire, c'est l'obtention d'une estimation du résultat d'une opération, « assez proche » au sens de la différence de ce résultat : cela prépare l'étude de l'ordre de grandeur d'un nombre en base 10 qui sera effectué en classe de 4^{e} à l'occasion de l'étude des puissances de 10.

2. Examinons maintenant le deuxième type de tâches identifié par la question T_2 : « savoir effectuer les opérations sous diverses formes de calcul ».
Voici ce que mentionne le programme de sixième à ce propos.

2.2 Opérations Addition, soustraction, multiplication et division.	- Connaître les tables d'addition et de multiplication et les résultats qui en dérivent. - Multiplier ou diviser un nombre par 10, 100, 1000. - * *Multiplier un nombre par 0,1 ; 0,01 ; 0,001.*	La maîtrise des tables est consolidée par une pratique régulière du calcul mental sur des entiers et des décimaux simples. La division décimale est limitée à la division d'un décimal par un entier. En calcul posé, le dividende comporte au maximum deux chiffres après la virgule.
Multiples et diviseurs.	- Connaître et utiliser les critères de divisibilité par 2, 5 et 10. - *Connaître et utiliser les critères de divisibilité par 3, 4 et 9.*	La notion de multiple, introduite à l'école primaire, est rappelée sur des exemples numériques, en même temps qu'est introduite celle de diviseur. Les différentes significations de ce dernier terme doivent être explicitées.
Sens des opérations.	- Choisir les opérations qui conviennent au traitement de la situation étudiée.	Pour les problèmes à étapes, la solution peut être donnée à l'aide d'une suite de calculs, **ou à l'aide de calculs avec parenthèses.*
Techniques élémentaires de calcul.	- Savoir effectuer ces opérations sous les diverses formes de calcul : mental, à la main ou instrumenté. - Connaître la signification du vocabulaire associé : somme, différence, produit, *terme, facteur, dividende, diviseur, quotient, reste.*	La capacité à calculer mentalement est une priorité et fait l'objet d'activités régulières. La maîtrise des différents moyens de calcul doit devenir suffisante pour ne pas faire obstacle à la résolution de problèmes. Concernant le calcul posé, les nombres doivent rester de taille raisonnable et aucune virtuosité technique n'est recherchée.
Ordre de grandeur.	- Établir un ordre de grandeur d'une somme, **d'une différence*, d'un produit.	L'objectif est de sensibiliser les élèves à utiliser les ordres de grandeur pour contrôler ou anticiper un résultat.

On notera d'abord que ce n'est pas un type de tâches mathématiques, au sens où ce n'est pas quelque chose que les élèves auront à accomplir (on ne posera pas comme exercice : savoir effectuer telle opération...). Le type de tâches général sous-jacent est ainsi : effectuer une opération dans l'ensemble des nombres décimaux, que l'on pourra décliner en quatre sous types de tâches : effectuer une addition de deux nombres décimaux, effectuer une soustraction de deux nombres décimaux, effectuer une multiplication de deux nombres décimaux, effectuer une division de deux nombres décimaux. Le programme mentionne trois catégories de techniques : « calcul mental », « calcul à la main » et « calcul instrumenté », c'est-à-dire utilisant la calculatrice en 6^{e} pour l'essentiel. Il précise certains ingrédients de portée des différentes techniques, notamment :

La division décimale est limitée à la division d'un décimal par un entier. En calcul posé, le dividende comporte au maximum deux chiffres après la virgule.
Concernant le calcul posé, les nombres doivent rester de taille raisonnable et aucune virtuosité technique n'est recherchée.

Pour avancer, nous nous limiterons au sous-type de tâches « effectuer la division de deux nombres décimaux », et nous examinerons ce que contient le document d'accompagnement à ce propos.

Le travail de la technique de la division posée « à la française », entrepris à l'école doit être poursuivi en début de collège. La détermination d'un quotient partiel, comme par exemple la recherche du chiffre des centaines du quotient de 8 934 par 13, qui mobilise le calcul mental est l'occasion de renforcer le lien existant entre multiplication et division. La technique de la division est complexe et seule, la connaissance de la signification du travail effectué à chaque étape permet d'exercer un contrôle sur la mise en œuvre de l'algorithme.
Le contexte le plus favorable au travail de la technique de la division euclidienne est celui d'une situation de partage équitable où connaissant la valeur du tout et le nombre de parts, il s'agit de déterminer la valeur d'une part. Soit à partager 8934 en 13 parts égales :

$$\begin{array}{rrrrr|lll} & 8 & 9 & 3 & 4 & 1 & 3 & \\ \cline{6-8} - & 7 & 8 & & & 6 & & \\ \cline{1-3} & 1 & 1 & 3 & & c & d & u \end{array}$$

Il n'est pas possible de partager 8 milliers en 13. Le quotient ne comportera donc pas de millier. Il faut commencer par partager 89 centaines en 13. Le recours au calcul mental et à la table de multiplication de 13 ou des essais multiplicatifs permet de déterminer le quotient : 6 centaines. 78 centaines ont ainsi été partagées ($6 \times 13 = 78$). Par soustraction, il reste 11 centaines qui, avec les 3 dizaines de 8934, font 113 dizaines à partager en 13.

$$\begin{array}{rrrrr|lll} & 8 & 9 & 3 & 4 & 1 & 3 & \\ \cline{6-8} - & 7 & 8 & & & 6 & 8 & \\ \cline{1-3} & 1 & 1 & 3 & & c & d & u \\ - & 1 & 0 & 4 & & & & \\ \cline{1-4} & 0 & 0 & 9 & 4 & & & \end{array}$$

Le même travail est réitéré sur les 113 dizaines à partager en 13. Le quotient est 8 dizaines. 104 dizaines ont été partagées ($8 \times 13 = 104$). Il reste 9 dizaines qui, avec les 4 unités de 8934, font 94 unités à partager en 13.

$$\begin{array}{rrrrr|lll} & 8 & 9 & 3 & 4 & 1 & 3 & \\ \cline{6-8} - & 7 & 8 & & & 6 & 8 & 7 \\ \cline{1-3} & 1 & 1 & 3 & & c & d & u \\ - & 1 & 0 & 4 & & & & \\ \cline{1-4} & 0 & 0 & 9 & 4 & & & \\ & & - & 9 & 1 & & & \\ \cline{3-5} & & & 0 & 3 & & & \end{array}$$

Le même travail conduit sur les 94 unités à partager en 13 donne un quotient de 7 et un reste de 3.

Si nécessaire, il est possible de matérialiser la situation en évoquant le partage de 8 billets de mille, 9 billets de cent, 3 billets de dix et 4 pièces de un en 13 parts équitables. Présentée ainsi, cette situation nécessite des élèves qu'ils fassent explicitement fonctionner la numération décimale en pratiquant, au moins en pensée, des échanges (1 billet de cent contre 10 billets de dix…).
Un objectif raisonnable pour le collège est de savoir effectuer « à la main » la multiplication et la division d'un nombre de 3 ou 4 chiffres par un nombre de 2 ou 3 chiffres. La pose des soustractions intermédiaires constitue un moyen d'alléger la tâche de mémorisation en cours d'exécution de l'algorithme et elle facilite le contrôle à chacune des étapes de celui-ci. Il convient donc de laisser à l'élève le choix de les poser ou non et, dans le cas où un élève éprouve des difficultés dans la mise en œuvre de l'algorithme, de l'inciter à le faire.

Commentaires

Il s'agit là clairement d'une reprise de l'étude. La technique commentée par le document est celle de la division posée, que l'on mobilisera dans le cas de la division d'un nombre de 3 ou 4 chiffres par un nombre de 2 ou 3 chiffres, en se limitant en 6^{e} à la division de deux entiers ou d'un décimal

par un entier. On peut extraire de ce passage les éléments suivant de l'OM :
Type de tâches « coche », T✓ : Partager une grandeur *g* en *n* parts égales.
Ce qui permet de faire apparaître le type de tâche T : effectuer la division de *m* par *n, m* étant un nombre décimal et *n* un nombre entier.
Technique : si *m* est un nombre entier ou décimal ayant au plus 4 chiffres et *n* un nombre entier comportant au plus 3 chiffres, on pose la division : etc.
Technologie : elle relève de l'environnement théorique élaboré à l'école primaire, celui de la numération de position de base 10, et également de celui de la division euclidienne. Les éléments pertinents sont principalement les suivants : un nombre qui s'écrit $a_1\,a_2\,a_3\,a_4$ en base dix est égal à $a_1\,000 + a_2\,a_3\,a_4$ ou à $a_1\,a_2\,00 + a_3\,a_4$ ou encore à $a_1\,a_2\,a_3\,0 + a_4$. La division euclidienne de $a_1\,a_2\,a_3\,a_4$ par *n* revient à faire la division euclidienne de l'un des trois nombres a_1, $a_1\,a_2$, $a_1\,a_2\,a_3$ par *n,* de résultat (q_1, r_1), puis la division euclidienne de $r_1 + a_2\,a_3\,a_4$ ou $r_1 + a_3\,a_4$ ou $r_1 + a_4$ par *n*.
C'est ce qui permet de justifier que pour diviser 8934 par 13, on commence par diviser 89 par 13, etc. : en effet 8934 = 8900 + 34 = 89 × 100 + 34 = (13 × 6 + 11) × 100 + 34 = 13 × 600 + 1134 ; 1134 = 1130 + 4 = (13 × 8 + 9) × 10 + 4 = 13 × 80 + 94 ; 94 = 13 × 7 +3 ; et donc finalement 8934 = 13 × (600+ 80 + 7) + 3 = 13 × 687 + 3.

> Le quotient décimal d'un entier ou d'un décimal par un entier ne présente pas de difficulté particulière du point de vue du sens car il s'inscrit dans la continuité de la division euclidienne, dans la mesure où il peut être rattaché à une situation de partage d'une quantité, continue et non plus discrète, en un nombre entier de parts équitables. La construction de la technique mobilise la numération décimale et la signification de l'écriture à virgule. Par exemple, lors du partage de 893,4 en 13 parts égales, le partage de 893 donne un quotient entier de 68 et un reste de 9. Les 9 unités restantes avec les 4 dixièmes de 893,4 font 94 dixièmes à partager en 13, ce qui donne un quotient partiel de 7 dixièmes et un reste de 3 (dixièmes). Une fois de plus, l'oralisation joue un rôle déterminant dans la compréhension de la technique. Plus délicat que dans le cas de la division euclidienne est l'interprétation du reste (3 dixièmes = 0,3), l'oral constitue ici une aide certaine.
>
> Il y a une rupture de sens lors du passage à la division d'un entier ou d'un décimal par un décimal. Il n'est plus possible de faire référence à une situation de partage en parts égales. Le sens de cette nouvelle division se construit en lien avec la reconnaissance d'une situation de multiplication où il s'agit de déterminer un facteur manquant. C'est la difficulté à déterminer ce facteur manquant en effectuant des essais multiplicatifs qui justifie qu'on élabore une nouvelle technique.
> Cette technique s'appuie sur la propriété des quotients construite en sixième, à savoir qu'on ne change pas un quotient quand on multiplie numérateur et dénominateur par un même nombre. Il est indispensable de mettre en évidence que cette propriété vaut pour la multiplication ($\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c}$), mais pas pour l'addition (en règle générale $\frac{a}{b} \neq \frac{a+c}{b+c}$).
> Multiplier dividende et diviseur par un même nombre, une puissance de 10, permet de se ramener soit à une division euclidienne, soit à une division par un entier. La difficulté se situe au niveau de la détermination du reste *r* qui nécessite de mobiliser le lien existant entre multiplication et division : $D = d \times q + r$ avec *D, d, q* et *r* décimaux. De cette égalité, on tire la valeur de $r = D - d \times q$.

En classe de 6^e, les élèves peuvent être conduits en situation à déterminer « à la main » un quotient décimal d'un décimal par un décimal. A ce niveau de classe, c'est la compréhension des étapes de la démarche qui est privilégiée, ce qui légitime d'une part, l'écriture de l'égalité des quotients, comme par exemple $\frac{89,34}{1,3} = \frac{893,4}{13}$ ou $\frac{89,34}{1,3} = \frac{8934}{130}$ et d'autre part, la pose de la division de 893,4 par 13 ou de 8934 par 130. Ce n'est qu'en 5^e que la technique de la division posée d'un décimal par un décimal, qui consiste à déplacer d'un même nombre de rangs la virgule au dividende et au diviseur, sera introduite et présentée comme un raccourci de la procédure utilisée jusque là. Toutefois, il est préférable de parler de multiplication par 10, 100, 1000 du dividende et du diviseur plutôt que d'un déplacement de la virgule de un, deux ou trois rangs, qui masque la signification du travail sous-jacent.

Commentaires
On notera principalement que la technique relative à la division d'un décimal non entier par un décimal non entier repose pour l'essentiel sur l'environnement technologico-théorique des fractions. C'est donc dans ce cadre que l'on traitera ce type de tâches.

On laissera, au moins provisoirement, le lecteur travailler à l'élucidation du cas du troisième type de tâches mentionné par la question : on signalera seulement que, là encore, son découpage n'est pas des plus pertinents et qu'il s'agit d'une étape relative à la modélisation de problèmes ; comme le signale le document d'accompagnement, on pourra utilement se reporter à la catégorisation des types de problèmes additifs et multiplicatifs élaborés par Gérard Vergnaud sur laquelle nous reviendrons.

4. Observation & analyse

Nous reprenons ici notre travail d'analyse de la séance observée en classe de seconde à propos des fonctions. Nous avions identifié que l'organisation mathématique suivante était enjeu de l'étude :

Le problème que l'on a à étudier apparaît d'abord comme un spécimen d'un type de tâches que l'on peut formuler ainsi :
T_{mg} :Étant donné un système $\mathcal{S}$ et une grandeur *a* attachée à ce système, déterminer la valeur maximale prise par la grandeur *a*.

Qui se spécifie de la façon suivante :
$T_{mf(g')}$: Étant donné un système $\mathcal{S}$ et deux grandeurs ℓ et *a* attachées à ce système, telles que la seconde apparaisse comme dépendant – comme une *fonction* – de la première, déterminer la valeur de la grandeur ℓ pour laquelle la grandeur *a* prend une valeur maximale.

Et la technique se laisse analyser de la façon suivante :
τ : En utilisant les propriétés du type de systèmes dont $\mathcal{S}$ est un spécimen, exprimer *a* en fonction de ℓ : $a = f(\ell)$; étudier alors le maximum de *f* sur l'ensemble des valeurs admissibles (possibles) de ℓ.

Nous avions débuté la semaine dernière l'analyse de l'organisation de l'étude : 22 travaux ont été rendus.

Sur les 22 travaux, tous identifient la réalisation d'épisode(s)du moment de première rencontre et du moment exploratoire de l'OM ; 15 identifient la réalisation d'épisode(s) du moment technologico-théorique ; un relève la réalisation d'épisode(s) du moment de travail et un du moment d'institutionnalisation, tandis que deux expriment des doutes relativement à la réalisation de ce moment d'institutionnalisation.

Nous examinerons d'abord les épisodes du moment de première rencontre. On peut grosso modo les classer en 3 groupes que nous examinerons successivement.

Le premier groupe, le plus nombreux (13 travaux), identifie la réalisation d'un épisode du moment de première rencontre dans le passage suivant du compte rendu :

Puis il annonce un autre exercice : « Ce sera une activité… » Il distribue l'énoncé (ci-après) et enjoint : « Vous commencez par lire l'énoncé. »

> Un paysan possède un terrain qui a pour forme un triangle rectangle ABC, rectangle en A, avec AB = 4 km et AC = 3 km. Une nouvelle loi oblige notre paysan à travailler dans un champ de forme rectangulaire. Comme le paysan a construit sa grange contenant ses machines en A, il souhaite que A appartienne au champ. Enfin, pour des raisons économiques évidentes, notre paysan souhaite que son champ ait l'aire la plus grande possible. Pouvez-vous l'aider ?

Bruissements divers. P précise que le contrôle prévu n'aura pas lieu le lendemain, mais la semaine suivante. L'élève arrivée en retard demande si elle a été appelée en AI : réponse négative. Les élèves lisent l'énoncé, certains posent des questions à ce propos. P : « Est-ce que tout le monde a lu l'énoncé ? » Réponse positive ! Il est 15 h 23. P : « Donc… »

Une élève intervient : « M'sieur ! Ça a rien à voir avec les fonctions, ça ! » P réagit : « Ben si, justement, on va voir… »

1. Lecture de l'énoncé par les élèves.

2. P. distribue le sujet et annonce oralement la consigne: lecture.
Un élève lit;
Un élève ne voit pas le rapport avec le thème étudié. D'où lecture critique.

3.La première rencontre est réalisée par la lecture de l'énoncé, ainsi que l'intervention d'un élève faisant remarquer que « ça n'a rien à voir avec les fonctions », moment que le P. utilise pour cadrer l'activité.

4. Distribution et lecture de l'énoncé. Une élève intervient: « M'sieur............,on va voir »

5. Après la distribution de l'AER, P. dit: « Vous commencez à lire l'énoncé ». Interrogation des élèves sur le rapport avec les fonctions et échange avec les élèves.

6. P. donne le sujet, demande aux élèves de le lire puis s'assure que tout le monde l'a bien lu (page2).

7. « Vous commencez par......réponse positive ».
Lecture individuelle de l'énoncé.

8. P. distribue l'énoncé et la lecture de celui-ci se fait individuellement.

9.

- lecture individuelle;

– s’assure que tout le monde a lu l’énoncé;
– élèves s’interrogent sur l’énoncé;
– échange entre élèves.

10.
P 2: distribution du sujet. Les élèves le lisent silencieusement et individuellement.
Ligne: P. renvoie à sa place...........justement, on va voir.

11.
« Les élèves lisent l’énoncé.........................on va voir...... ».

12.
P. dit: « vous commencez par lire l’énoncé »
Les élèves le lisent, posent des questions.
Une élève ne voit pas le rapport entre l’énoncé et les fonctions.
P. affirme qu’il y a un rapport, qui apparaîtra plus tard

13.
Très confus, ça n’a rien à voir avec les fonctions. Cette étape permet de cerner le problème et donc de définir le système S auquel sont attachées les deux grandeurs, ℓ et a

Commentaires développés oralement

Il s’agit de la (première) rencontre avec le ou les type(s) de tâches de l’OM enjeu de l’étude. On ne voit pas $T_{mf(g')}$ apparaître véritablement ici (la dernière intervention d’élève étant significative de ce point de vue) ; le problème étant d’abord, dans sa formulation, un spécimen de T_{mg}, c’est ce type de tâches qui est rencontré via la lecture et les questions. On peut formuler les choses autrement et dire qu’on a un premier épisode du moment de première rencontre de $T_{mf(g')}$ et que cette rencontre est partielle : on identifie pour l’essentiel le système et la grandeur attachée au système qu’il s’agit d’optimiser. Il est réalisé de manière peu explicite, du moins d’après le compte rendu, à travers la lecture de l’énoncé et quelques questions / réponse à son propos.

Le deuxième groupe (3 travaux) identifie la réalisation d’un épisode de première rencontre dans le passage suivant du compte rendu :

P écrit : 2º) Il suffit de choisir M sur [AC] pour avoir toutes les solutions au problème.

Il commente : « Maintenant, on va faire varier M, etc. » Il est 15 h 46. P : « La longueur AM, qu’est-ce qu’on va en faire ? » Il clarifie sa question en y répondant : il faut prendre AM comme inconnue. Il écrit d’abord :

$$\mathrm{AM} = x$$

Puis il ajoute :

$$\mathrm{AM} = x \in [0, 3]$$

Il demande alors de quoi va dépendre l’aire. Les élèves répondent à côté. Il écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathrm{AM} \times \mathrm{MV} \\ &= \mathrm{MV} \times x \end{aligned}$$

P : « Si on arrive à exprimer MV en fonction de… on aura… » Silence ! Les élèves ne voient plus. P : « L’aire va dépendre de x. Quand quelque chose varie, ça vous fait penser à quoi ? » Les élèves : « Aux fonctions ! » P s’efforce de leur faire dire que l’on va étudier le maximum de la fonction. Puis il écrit :

Calculons (exprimons) MV en fonction de x

14.
Les élèves prennent conscience qu’en faisant varier le point M sur $[AC]$, l’aire du rectangle varie.

15.
Il est réalisé par P. Il rappelle que si *M* est choisi, le rectangle est déterminé. Le moment dure jusqu'à ce que P. écrive : calculons(exprimons) *MV* en fonction de *x*.

16.
Il suffit de faire varier *M* sur *[AC]*....[...] maintenant on va faire varier *M*

Commentaires développés oralement

On a effectivement là un épisode du moment de première rencontre avec $T_{mf(g')}$ *:* on a l'aire en fonction de deux grandeurs, dont l'une peut être exprimée en fonction de l'autre ; on aura donc l'aire en fonction d'une grandeur, AM, et il s'agira ainsi de déterminer le maximum de la fonction mise en évidence. C'est donc plutôt la dernière partie du passage qui réalise cet épisode du moment de première rencontre :

P : « Si on arrive à exprimer MV en fonction de… on aura… » Silence ! Les élèves ne voient plus. P : « L'aire va dépendre de *x*. Quand quelque chose varie, ça vous fait penser à quoi ? » Les élèves : « Aux fonctions ! » P s'efforce de leur faire dire que l'on va étudier le maximum de la fonction. Puis il écrit :

Calculons (exprimons) MV en fonction de *x*

C'est le professeur qui, pour l'essentiel, a un topos prépondérant dans la réalisation de cet épisode du moment de première rencontre.

Voici les travaux restant.

17
Après la lecture individuelle de l'énoncé par chaque élève, et des réponses à des questions de compréhension immédiate, il y a des tentatives de représentation graphique de la situation géométrique.
Elles sont énoncées mais participent à la dévolution du problème et lancent l'exploration. Le moment réapparait lorsqu'il s'agit de mettre en équation la figure géométrique.

18
Lecture de l'énoncé: on veut que le champ ait la plus grande valeur.
Imposé par le professeur, le fait que AM = *x* et que l'aire va dépendre de *x*.

19
1) La première étape consiste à modéliser le problème, à trouver des conditions que doit remplir le rectangle pour qu'il corresponde.
2) C'est à la troisième page que le professeur reprécise la recherche, en soulignant que le rectangle doit être d'aire maximale.

20
T=type de tâche initial ; T_1 modélisation géométrique, T_2 modélisation analytique.
Moment de première rencontre :
Avec T: « Bruissements divers (.......) vivant » ;
Avec T_1: « P. schématise la situation (.....)

21
Page 3 « Il commente............calculons (exprimons) *MV* en fonction de *x* », (page 5).

22
Moment de première rencontre.
Réalisé avec un problème d'optimisation.

Commentaires développés oralement

Il faut faire attention au fait que l'on regarde la fonction des épisodes relativement aux types de tâches identifiés comme enjeu de l'étude, ce qui n'a pas été le cas ici des types de tâches de modélisation découpés par 20.

Venons-en aux moments exploratoires et technologico-théorique.
15 travaux identifient la réalisation d'épisodes de ces deux moments de l'étude de l'OM($T_{mf(g')}$) tandis que les 7 autres ne voient que la réalisation d'épisodes du moment exploratoire de cette OM.

On examinera d'abord ce qui a été identifié comme relevant de la réalisation d'un épisode du moment technologico-théorique.

Pour la plupart des travaux c'est ce passage du compte rendu qui concourt à la réalisation de ce moment, certains ne considérant que la deuxième partie (surlignée) ou certains ingrédients de cette deuxième partie (en gras et en couleur) :

Il commente : « Maintenant, on va faire varier M, etc. » Il est 15 h 46. P : « La longueur AM, qu'est-ce qu'on va en faire ? » Il clarifie sa question en y répondant : il faut prendre AM comme inconnue. Il écrit d'abord :

$$AM = x$$

Puis il ajoute :

$$AM = x \in [0, 3]$$

Il demande alors de quoi va dépendre l'aire. Les élèves répondent à côté. Il écrit :

$$\mathcal{A} = AM \times MV$$
$$= MV \times x$$

P : « Si on arrive à exprimer MV en fonction de… on aura… » Silence ! Les élèves ne voient plus. P : « L'aire va dépendre de x. Quand quelque chose varie, ça vous fait penser à quoi ? » **Les élèves : « Aux fonctions ! » P s'efforce de leur faire dire que l'on va étudier le maximum de la fonction**. Puis il écrit :

Calculons (exprimons) MV en fonction de x

Il est 15 h 50. P : « On est dans une configuration qui devrait vous rappeler quelque chose ! Les élèves hésitent ; débat… Finalement **une élève s'écrie : « Thalès ! »** P lui fait écho : « Très bien. » Les élèves applaudissent spontanément leur camarade !

P tente alors de faire expliciter le théorème : un élève y parvient, à une petite interversion près. P : « Est-ce qu'il y a un point qui n'est pas nécessaire dans cette figure ? » Des élèves : « J ! » P reprend : « Il faut l'oublier, le point J… »

Il est 15 h 55. Les élèves travaillent. La sonnerie retentit. P : « Bon, on finira demain matin ! » La séance est terminée.

Un problème est soulevé par un groupe qui identifie ce passage comme moment technologico-théorique
Problèmes : on ne sait pas comment considérer les 2 derniers paragraphes de la page 4, rappel de cours.

Travail collectif dirigé

Synthèse : là encore, il faut considérer la fonction des épisodes que l'on croit identifier par rapport à l'OM enjeu de l'étude. Il s'agit ici d'examiner en quoi ils concourent à la justification de la technique mise en évidence, que nous rappelons ci-dessous.

τ : En utilisant les propriétés du type de systèmes dont $\mathcal{S}$ est un spécimen, exprimer a en fonction de ℓ : $a = f(\ell)$; étudier alors le maximum de f sur l'ensemble des valeurs admissibles (possibles) de ℓ.

Le seul élément qui peut prétendre à cette fonction de justification, c'est « L'aire va dépendre de *x*. Quand quelque chose varie, ça vous fait penser à quoi ? » **Les élèves : « Aux fonctions ! ».** C'est plutôt une fonction théorique qu'on a là, puisqu'on désigne le domaine dans lequel il va être pertinent de chercher les éléments technologiques : la définition d'une fonction comme permettant de modéliser une relation entre deux grandeurs dont l'une dépend de l'autre est effectivement un élément technologique, on y a une allusion ici et mais de façon très vague.

Pour le reste, on élabore la technique dont on dégage certaines étapes : c'est donc pour l'essentiel un épisode du moment exploratoire.

Pour les deux derniers paragraphes de la page 4, dans lesquels P reprend certaines choses liées à la projection orthogonale, ces ingrédients servent à faire le travail de modélisation géométrique qui permet de constituer la technique τ : on a donc là P qui amène certains éléments pertinents dans le milieu. Il en va de même dans l'épisode précédent, quand une élève s'écrie « Thalès » : mais là, c'est les élèves, du moins à l'initiative de l'une d'entre eux, qui convoquent dans le milieu un ingrédient qui permettra de poursuivre la réalisation du moment exploratoire.

Un groupe identifie un moment de travail :

Moment du travail

Modélisation du problème ⇨ technique.

Tout le long de la séance sauf quand c'est le professeur qui écrit, il est mélangé avec le moment exploratoire.

Deux expriment un doute sur le moment de l'institutionnalisation (1 et 7) ; et un (20). identifie la réalisation d'un épisode du moment d'institutionnalisation :

Moment d'institutionnalisation

De T_1: P. écrit ce que les élèves trouvent évident, à savoir: que *A* doit être dans un coin, ou encore que « le rectangle doit être construit sur les côtés [*AB*] et [*AC*] du triangle ». P. écrit tout cela.

[T=type de tâches initial: T_1 modélisation géométrique, T_2 modélisation analytique.]

Et un dernier groupe note que : À l'intérieur de ce moment [exploratoire] sont réalisés plusieurs moments (2) que l'on peut qualifier de moments d'institutionnalisation de la technique de modélisation.

Commentaires

On n'identifie généralement pas les moments de travail ou d'institutionnalisation qui ne sont pas relatifs à l'OM enjeu de l'étude. Donc, là encore, on n'a pas la réalisation de ces moments ***relativement à l'OM enjeu de l'étude***.

Enfin un problème est noté par un groupe ayant identifié pour l'essentiel un épisode de moment exploratoire dans la séance :

Problèmes rencontrés: Quand P. donne des indications, elles ne sont pas vraiment tirées de l'échange avec les élèves et ressemblent à l'explicitation de la technique, donc est-ce encore un moment exploratoire ?
Dur de prendre du recul sur l'organisation de la séance.

Commentaires

Le problème signalé tient au partage du *topos* entre le professeur et l'élève : on a effectivement une réalisation du moment exploratoire que l'on peut juger comme donnant trop d'importance au *topos* du professeur, ou encore ne permettant pas aux élèves d'occuper un *topos* suffisant (ce qui provient souvent d'un problème de constitution du milieu).

Nous terminerons ce travail par la mise en forme de l'analyse de la réalisation du moment exploratoire à partir des deux travaux suivants.

A

Une élève pense avoir trouvé la solution; P. l'envoie au tableau et fait des schémas pour illustrer les idées de l'élève. P. donne ensuite une piste pour inciter les élèves à établir le système *S*. Il formalise $AM = x$ et donne l'intervalle dans lequel va varier x.
P. veut montrer que l'on peut exprimer l'aire du rectangle en fonction de *AM* et donc en fonction de x.
Le mot fonction est employé par P. pour marquer la dépendance de l'aire par rapport à x.
P. fait essayer le fait que la solution du problème va se résumer à déterminer le max de la fonction.
La construction de la fonction se fait en faisant appel à des acquis de collège: Thalès.
P. laisse les élèves appliquer Thalès pour déterminer les côtés du rectangle.
Fin de séance.

B

Résolution qualitative du problème : on veut répondre à la question « trouver un rectangle d'aire maximale, de sommet *A*, contenu dans un triangle ».
1er résultat : le rectangle a deux côtés communs avec les côtés *(AB) et (AC)* du triangle.
2e résultat : le sommet opposé de *A* du rectangle est sur le côté (*BC)* du triangle.
Cela détermine la figure juste du problème qu'il s'agit à présent d'étudier quantitativement.
Résolution quantitative du problème: Le professeur fait le choix du sommet $M \in (AC)$ du rectangle, comme variable à ajuster pour maximiser l'aire du rectangle *AMVJ*.
3e résultat : Le choix de M sur *(AC)* détermine les autres sommets *V,J*, du rectangle.
P. décrit la construction de *V* et *J* à partir de *M*, ce qui amène à une digression.
Les élèves, dès lors semblent perdus car c'est P. qui mène la mise en équation.
P. introduit le nombre $x = AM$, ainsi que $y = MV$ (c'est sous -entendu). L'aire du rectangle est $A=xy$
4e résultat : y est fonction de x (simple traduction de: *V* est fonction de *M*).
Un élève trouve le bon argument: il l'obtient à partir de x en utilisant le théorème de Thalès, (Similitude des triangles *CMV et CAB)*.
Remarque : le quatrième sommet *J* est ignoré, alors qu'on aurait pu observer qu'il dépend aussi de x.

La deuxième proposition est davantage adaptée à la mise en forme d'une technique de réalisation du moment exploratoire car on peut y voir les différentes étapes de l'émergence de la technique et, corrélativement, de la reconnaissance des différents ingrédients du type de tâches qui est enjeu de l'étude. On trouvera ci-dessous une proposition de modification de cette proposition, qui garde cette structuration en développant la fonctionnalisation des différents épisodes, l'analyse des topos respectifs du professeur et de l'élève et la constitution du milieu.

La partie du moment exploratoire du type de tâches présente dans la séance se réalise par l'étude d'un spécimen de ce type de tâches et selon deux temps : la modélisation géométrique du système qu'il s'agit d'étudier et de la grandeur à optimiser ; la modélisation algébrique de cette grandeur, que l'on peut découper en trois épisodes.
Premier épisode
On fait d'abord apparaître qu'il s'agit de résoudre un problème du type : « trouver un rectangle d'aire maximale, de sommet *A*, contenu dans un triangle ABC ». Deux résultats sont ensuite dégagés, qui permettent de déterminer le modèle géométrique du problème.
1er résultat : le rectangle a deux côtés communs avec les côtés *(AB) et (AC)* du triangle.
2e résultat : le sommet opposé de *A* du rectangle est sur le côté (*BC)* du triangle.
Cet épisode se réalise sous la forme d'un débat vif mais assez faiblement régulé par P, dans lequel le *topos* des élèves est uniquement réactif aux sollicitations de P. Le milieu utilisé consiste pour l'essentiel en des figures réalisées par P au tableau sous les propositions d'élèves ou de sa propre

initiative.
Deuxième épisode
P prend la décision de placer un point M sur [AC] et de faire construire à une élève un rectangle convenable qui a pour sommet M. Cette figure constitue alors un élément du milieu qui va permettre de poursuivre l'exploration et de faire surgir un troisième résultat : Le choix de M sur *(AC)* détermine les autres sommets *V* et *J* du rectangle, où V appartient à [BC]. P utilise la notion de projection orthogonale pour formuler oralement la position de V tandis que les élèves formulent en termes de « point d'intersection de la parallèle à (AB) passant par M et de [BC] » . Le topos des élèves est toujours uniquement réactif aux sollicitations de P, malgré la tentative d'un élève de proposer l'examen d'un cas où M est « plus haut » que P ignore, et exception faite des quelques minutes où P développe la notion de projection orthogonale sans solliciter les élèves. Il fait émerger un quatrième résultat « Il suffit de choisir M sur [AC] pour avoir toutes les solutions au problème », sans prendre en considération une proposition d'élève qui concluait que tous les rectangles avaient la même aire.
Troisième épisode
P annonce que l'on va faire varier M, introduit $x = AM$, puis poursuit la modélisation algébrique sans que les élèves arrivent véritablement à réagir à ses sollicitations. Un élève parvient néanmoins à proposer le théorème de Thalès pour le calcul de MV en fonction de x et les élèves ont alors ce travail à effectuer en autonomie didactique. La séance s'arrête sans que ce travail ait été terminé.

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2009-2010

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ **Séance 12 : mardi 15 décembre 2009**

Programme de la séance. 1. Faisons le point... sur les organisations de l'étude ! // 2. Forum des questions

Les notes qui suivent n'ont pas été présentées en séance en raison de la journée d'action pour le développement de conditions acceptables permettant une formation professionnelle digne de ce nom pour les futurs enseignants. Elles sont volontairement synthétiques : il est demandé aux élèves professeurs de les travailler pendant les vacances en mettant des exemples derrières ces ingrédients praxéologiques...

1. Faisons le point... sur les organisations de l'étude !

Nous partirons, pour présenter cette synthèse, des différents types de tâches que le professeur a à accomplir pour ***concevoir et réaliser une organisation didactique relative à une organisation mathématique donnée, que l'on suppose déjà conçue par le professeur.*** Au plus près de la conception de l'OD, on a dit que six grands types de tâches devaient être réalisés :

Un moment de la ***première rencontre avec l'OM***, le plus souvent à travers les types de tâches mathématiques qu'il s'agit d'étudier ;

Un ***moment exploratoire***, dans lequel les types de tâches sont explorés et qui voit l'émergence d'une technique relative à ces types de tâches ;

Un moment ***technologico-théorique***, qui permettra d'élaborer la (ou les) technologie (s) et la théorie relative à l'OM étudiée permettant ainsi de justifier, de produire et de rendre intelligibles les techniques de cette OM ;

Un moment de ***travail de l'organisation mathématique*** élaborée, dans lequel on se mettra en main l'OM, et notamment les techniques, et qui permettra également de faire travailler l'OM construite ;

Un moment ***d'institutionnalisation*** de l'OM, qui mettra en forme l'OM produite et qui la reliera aux OM antérieurement produites de manière à obtenir des OM amalgamées au niveau des secteurs, voire des domaines mathématiques étudiés ;

Un moment de l'***évaluation*** enfin, qui évaluera la maîtrise que l'on a de l'OM construite tout comme l'OM elle-même.

On rappelle que :

La notion de moment ne renvoie qu'en apparence à la structure temporelle du processus d'étude. Un moment, au sens donné à ce mot ici, est d'abord une dimension dans un espace multidimensionnel, un facteur dans un processus multifactoriel. Bien entendu, une saine gestion de l'étude exige que chacun des moments didactiques se réalise au bon moment, ou, plus exactement, aux bons moments – car un moment de l'étude se réalise généralement en plusieurs fois, sous la forme d'une multiplicité d'épisodes éclatés dans le temps. À cet égard, on notera que, même s'il est d'usage d'ordonner les différents moments didactiques (en parlant du premier moment, du deuxième moment, etc.), l'ordre indiqué est en fait largement arbitraire, parce que les moments didactiques sont d'abord une réalité organique de l'étude, avant d'en être une réalité chronologique. [15]

Ces grands types de tâches sont à réaliser au sein des 4 dispositifs prévu par le programme des classes de collège et de lycée : Activité (d'étude et de recherche), Synthèse, Exercices, Interrogations et devoirs notés. Nous avons également étudié le fait qu'il y a avantage à insérer les AER dans un PER, qui donne une vision au moins sectorielle de l'OM à étudier et qui permet notamment d'améliorer la dynamique de l'étude.

Nous rassemblerons ci-après les principaux ingrédients de techniques de conception et de réalisation de certains des moments de l'étude cités précédemment que nous avons fait émerger.

Nous avons insisté pour l'essentiel sur la conception et la réalisation des trois premiers moments dans le dispositif d'AER : il s'agit de partir d'un ***problème*** (suffisamment générateur) qui permettra de rencontrer l'OM enjeu de l'étude généralement par le biais de types de tâches de cette OM et de manière à en faire apparaître une ***raison d'être***. La direction d'étude se fera sous la forme de ***questions cruciales***, dont la mise au point demande de suivre au plus près la dynamique de l'étude du problème, de manière à ne pas empiéter sur le *topos* des élèves.

Topos
Les types de tâches d'étude sont des types de tâches coopératifs : ils comprennent un ***rôle*** dévolu au ***professeur*** et un ***rôle*** dévolu à l'***élève.*** L'endroit, le lieu, où chacun d'entre eux intervient en autonomie est nommé le ***topos.*** On pourra dire ainsi que la correction des copies fait ordinairement partie du *topos* du professeur ou encore que, lorsque le professeur demande aux élèves de chercher un problème, cette recherche fait partie du *topos* de l'élève. Un grand problème de la fabrication des organisations de l'étude est d'arriver à ménager suffisamment de *topos* aux élèves, et que ceux-ci arrivent effectivement à l'occuper

Le fait de ménager suffisamment de topos aux élèves suppose non seulement de prévoir des épisodes, même brefs, dans lesquels les élèves pourront se saisir du problème, ou de certains de ses aspects, et avancer, mais également de créer des conditions qui leur permettent d'avancer : ce dernier point relève principalement de la création ou de mise à disposition de ***milieu didactique,*** soit des éléments nécessaires pour que les élèves puissent agir et examiner la validité de leurs propositions, que ces éléments soient relatifs aux savoirs antérieurement étudiés ou encore matériels (TICE, traces écrites suffisantes notamment).

Dans la création et la mise à disposition d'un milieu didactique pertinent, le ***test d'entrée*** dans l'étude d'un thème s'avère précieux : il porte en effet sur les notions utiles pour l'étude du thème à venir, et on privilégiera donc celles qui interviendront dans les AER : on ne se limitera pas au socle commun et il faut prendre garde de tester les pratiques.

Les questions cruciales doivent notamment permettre de faire réaliser les ***moments exploratoire et technologico-théorique***, ces deux moments étant ***fortement articulés***, et nous avons rencontré un

15 Extrait du texte d'Yves Chevallard, *Familière et problématique, la figure du professeur*, paru dans RDM 17/2. Voir http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=24.

cas de figure de cette articulation dans la première séance que nous avons analysée. On fait émerger une technique dont la validité dépend de celle d'un élément technologico-théorique qui émerge de l'exploration, élément qu'il va donc falloir établir expérimentalement et, dans certains cas, déduire de la théorie [géométrique, analytique, algébrique, numérique statistique...] disponible. C'est le cas par exemple encore dans l'émergence de l'OM suivante, relative à la construction à la règle et au compas d'une droite coupant un cercle de centre O en un point A de ce cercle, et en ce point seulement. Une exploration graphique de la situation conduit à essayer de repérer la droite par rapport au « seul » élément fixe de la configuration, le rayon ; si l'on s'assure du fait que cette droite est perpendiculaire en A au rayon OA, la technique est faite, puisqu'il suffira de construire à la règle et au compas la perpendiculaire en A au rayon OA.

Du point de vue de la ***réalisation du moment exploratoire***, nous avons vu le profit qu'il y avait à tirer de mettre à l'épreuve les propositions effectuées par les élèves. À cet égard, nous avons insisté sur la nécessité de s'assurer que les élèves disposaient bien d'un milieu qui rende possible ce travail exploratoire et le travail technologico-théorique associé et nous avons mis en évidence que les TICE s'avèrent utiles pour cela.

L'***institutionnalisation*** s'effectue pour l'essentiel sous deux types de dispositifs, les bilans d'étapes et la synthèse, les premiers permettant de préparer la seconde. On a également noté qu ela correction d'exercices participait de ce moment d'institutionnalisation. La synthèse gagne généralement à être différée de façon à ne pas occuper trop de temps et à mettre en forme une OM suffisamment amalgamée. Il est important qu'elle contienne l'ensemble de l'OM et, donc, les types de tâches et les techniques et qu'elle prenne en charge non seulement le niveau thématique mais aussi le niveau du secteur. Sa réalisation doit prendre appui sur le travail des élèves et on peut, si on la diffère suffisamment, demander aux élèves de la préparer hors classe. Nous avons également mis en évidence que le bilan d'étape, qui prend place « au sein » de l'activité, ou du moins en relation étroite avec elle et dont les traces écrites figureront dans le cahier d'AER, diffère de la synthèse : les bilans d'étapes distingueront des types de tâches que la synthèse viendra rassembler, et on peut, et même on doit, accepter des formulations « approximatives », proches du travail effectué dans l'AER, dans les bilans d'étape, tandis que la synthèse fera place à une exigence de formulation plus grande et proche des formulations « canoniques ». Cela suppose que la formulation des propriétés ne fasse pas entièrement partie du topos du professeur mais qu'il y ait coopération avec les élèves de ce point de vue. Et également que la synthèse soit différée après qu'une partie au moins du moment de travail ait eu lieu.

Nous terminerons ce tour d'horizon par quelques (trop) brèves remarques sur le ***moment de travail*** des OM sur lequel nous avons encore peu travaillé. Sa réussite est dans l'ensemble conditionnée d'abord par la conception de l'OM et sa mise en forme : si celle-ci est diffractée, ou encore si les techniques ne sont pas adéquatement fabriquées, notamment du point de vue de l'insertion d'étapes de contrôle et de vérification utilisant autant que faire se peut la calculatrice, le moment de travail a peu de chance de porter tout le fruit que l'on peut en attendre dans le temps qui lui est généralement alloué.

Le ***moment de l'évaluation*** a été largement travaillé, et la notice « évaluation et notation » en constitue une synthèse détaillée à laquelle on se reportera.

À quel moment du cours (activité, synthèse ou exercice) est-il le plus judicieux de travailler les démonstrations des propriétés du cours ? (FT, 5e et 4e, 12)

Les éléments synthétisés précédemment permettent de répondre à cette question.
1. Il est d'abord clair que la démonstration des propriétés ne relèvent pas des exercices si ces

propriétés constituent l'environnement technologico-théorique de l'organisation mathématique. On peut éventuellement être amené à déduire une propriété d'énoncés faisant partie de la théorie disponible parce que cela fait travailler l'OM en cours d'étude, mais cela reste dans l'ensemble peu fréquent, notamment au collège.
2. Si les propriétés font partie de l'environnement technologico-théorique de l'organisation mathématique étudiée, elles doivent être élaborées dans le cadre du moment technologico-théorique, et leur déduction prend donc sa place dans le cadre de ce moment qui fait partie de la réalisation de l'AER.
3. Ce qui a émergé dans l'AER doit être enregistré dans la synthèse : les démonstrations effectuées y ont donc leur place. Ce qui fera la différence entre la synthèse et l'AER, ce sera le niveau de mise en forme des démonstrations : alors que, dans l'AER, on se concentrera sur l'élaboration du schéma déductif et l'élucidation des difficultés à ce propos, la synthèse mettra « proprement » en forme cette déduction.

2. Forum des questions

Nous compléterons d'abord la synthèse précédente en considérant deux thèmes relatifs aux organisations de l'étude : la synthèse et la reprise de l'étude.

Du topos dans la synthèse et la place de la synthèse dans l'institutionnalisation

1. Comment créer du topos pour les élèves lors des séances de synthèse ? (GA, 5e, 11)
2. Quelle doit être la place du topos de l'élève lors d'un moment d'institutionnalisation ? Si le topos est faible, doit-on réduire le moment d'institutionnalisation pour passer rapidement à un moment de travail de l'OM ? (GA, 5e, 12)
3. Est-ce que l'on peut institutionnaliser certaines choses uniquement en exercices s'il est écrit dans le programme que celles-ci ne doivent pas faire l'objet d'un cours à part entière ? Et est-ce que tout ce qui figure dans le programme doit être mis dans la partie synthèse ou certains points peuvent n'être vus qu'au cours d'exercices ? (EF, 2de, 9)
4. Est-ce qu'il vaut mieux envoyer au tableau des élèves qui savent répondre et qui rédigeront proprement (→ gain de temps) ou des élèves en difficulté pour essayer de les faire progresser et détailler tout ce qui peut paraître difficile à certains même si ce n'était pas l'objet de l'exercice ? (ÉF, 2de, 8)

1. Donner du topos dans la synthèse suppose d'abord que s'est déroulé à peu près correctement l'émergence d'une OM et au moins le début de son travail : en effet, comme pour la réalisation du moment exploratoire ou du moment technologico-théorique, il faut que les élèves aient un milieu sur lequel s'appuyer, et la seule réalisation d'une AER ne suffit généralement pas pour cela. Il ne faut donc pas hésiter à différer la synthèse, à la fois pour que celle-ci puisse donner une image suffisamment amalgamée de l'OM mais aussi pour que les élèves puissent y occuper un topos suffisant. On y procèdera ensuite par « questions cruciales » : la question la plus générique étant « qu'a-t-on étudié ? », qui se découpe en trois sous questions : « qu'a-t-on appris à accomplir ? » (type de tâches), « comment les accomplit-on ? » ou « quelles techniques a-t-on pour cela ? », « qu'est-ce qui justifie ces techniques ? ». Dans la mise en forme de réponses à ces questions, les bilans d'étapes qui ont dû « scander » l'étude s'avèrent précieux et conditionnent également la possibilité pour les élèves d'occuper un topos de qualité dans le travail de synthèse.

2. La synthèse doit effectivement enregistrer l'ensemble de l'OM qui a été fabriquée, donc « tout ce qui figure dans le programme » ; mais il faut prendre garde au fait que le programme n'est pas

exposé selon les nécessités de fabrication des organisations mathématiques, et que la physionomie de l'OM qui aura émergé de l'étude effectuée pourra a bon droit différer de l'image qu'en donne le texte du programme notamment parce que certains types de tâches auront été regroupés, ou que d'autres qui font objet de reprise de l'étude n'ont pas justifié un enregistrement complémentaire dans la synthèse, etc. (Voir *infra*.)

3. Si l'on se situe dans une perspective de travail et d'institutionnalisation des organisations mathématiques produites, les deux doivent bien entendu être mises en œuvre de manière à gérer au mieux le temps d'horloge, l'institutionnalisation et le travail des techniques.

La reprise de l'étude

1. Au lieu d'un test d'entrée par séquence, pourrait-on faire en début de chaque trimestre un test QCM (par exemple) sur les notions que nous allons aborder afin de ne prendre qu'une heure pour tester les élèves sur le trimestre ? Les points seront ensuite travaillés si nécessaire avant « l'attaque » d'un thème. (JBM, 4^{e} et 6^{e}, 12)
2. Si l'on constate des problèmes dans la conception des variables en seconde, et du calcul littéral associé (simplification de programmes de calcul, par exemple pour exprimer le volume d'un tétraèdre régulier en fonction de la longueur *a* de l'arête), doit on revenir à la base ? C'est à dire y consacrer plusieurs séances ? (MB, 2de, 11)
3. Comment appréhender un chapitre dont la plupart des notions sont connues (exemple : statistique en seconde) ? Difficile de fabriquer l'AER pour faire émerger des connaissances déjà vues. Quel doit alors être le but de l'AER ? (FG, 2de, 9)
4. Sur les statistiques, est-il indispensable de mettre par écrit tout le vocabulaire : effectif, moyenne, fréquence,... ? (GBR, 2de, 12)
5. En classe de seconde, le programme préconise de faire étudier les statistiques en développant le regard critique des élèves, donc à travers des exercices d'interprétation. Je trouve assez facilement des exercices faisant travailler les notions de moyenne et de médiane à travers l'étude de deux séries statistiques, mais beaucoup moins sur les autres notions de statistique (par exemple quartiles, mode, ...). Quels types d'exercices peut-on proposer pour faire travailler ces notions tout en faisant appel au regard critique des élèves ? (JC, 2de, 8)

1. Le dispositif décrit de « test d'entrée trimestriels » a deux grands inconvénients. D'abord, il demande au professeur d'avoir une vision à long terme des AER qu'il va mettre en place dans le trimestre de façon à traiter dans le test d'entrée les éléments pertinents à la constitution d'un milieu adéquat à la réalisation de ces AER. Ensuite, il ne prend pas en compte les évolutions inévitables des connaissances des élèves sur certains thèmes des années antérieures provoquées par l'étude des thèmes au programme dans le trimestre, même quand ils ne sont pas directement reliés. Le professeur a dès lors toutes chances de se trouver devant des difficultés qu'il n'avait pas prévues dans l'anticipation des besoins de la classe. On ajoutera que la forme du QCM est le plus souvent mal adaptée à la détection des ingrédients des techniques qui dysfonctionnent.

2. La règle de conduite à tenir dans ces cas-là, c'est de refaire travailler le thème problématique détecté à l'occasion d'autres thèmes : s'agissant de la simplification des programmes de calculs, ce thème est « partout dense » dans les travaux relatifs aux fonctions et il n'est nul besoin de reprendre l'étude faite au collège sur ce point mais de la travailler « en fonction » dans le programme de seconde, en retouchant éventuellement les techniques disponibles pour les compléter avec des étapes d'anticipation et de contrôle que permet un usage raisonné des calculatrices graphiques. On enregistrera évidemment dans la synthèse les éléments des organisations mathématiques qui se sont

révélés problématiques et qui ont été retouchés. Pour certains élèves pour lesquels ce travail s’avérerait insuffisant, on peut consacrer une séance d’aide individualisée à reprendre l’étude du thème de manière plus détaillée, toujours à travers des exercices « fonctionnalisés ». Il faut absolument éviter d’en faire un thème d’étude principal : on aurait alors un « recul du temps didactique » qui est généralement contre productif.

3. L’enjeu de thèmes d’étude qui ont été déjà vus dans les classes antérieures est le plus souvent de faire travailler les organisations mathématiques produites en mettant comme enjeu de l’étude des types de tâches qui, dans les classes précédentes, constituaient des raisons d’être de ces OML. Cela permet notamment d’amalgamer les OM produites précédemment, et ce qui apparaît comme neuf, ainsi, c’est le bloc pratique, le bloc technologico-théorique étant généralement déjà disponible. C’est le cas pour la statistique descriptive en seconde où l’enjeu principal est de constituer, à partir des OM étudiées au collège, une technique relative à la comparaison de deux séries statistiques ou à l’étude d’une série statistique de façon à pouvoir apporter une réponse à une question à propos d’un phénomène variable (voir TD 2). Dans cette perspective, on voit que ce qui est nommé « vocabulaire » dans la quatrième question, ce n’est rien d’autre que les éléments technologico-théorique de ce thème d’étude, qui ont déjà émergé au collège. On les fera figurer dans la synthèse en fonction, quand le besoin s’en fait sentir, et on pourra d’ailleurs laisser les élèves préparer cette synthèse hors classe.

Traces écrites et séances TICE

1. Les séances sur ordinateurs sont certes appréciées des élèves, mais tournent vite au chahut et ne laissent pas de traces écrites alors qu’ils travaillent peut-être même plus, en tout cas plus activement, que pendant une séance d’exercices « classiques » par exemple. Faut-il éventuellement la faire précéder d’une séance de préparation, ou demander un compte-rendu écrit qui pourrait être fait à la maison ? (JPB, 2de, 8)

2. Quelles doivent être les traces écrites des élèves lors d'une séance d'exercices effectués au tableau en salle informatique ? (Hormis la rédaction de la solution, est-ce que les élèves doivent noter les fonctions utilisées, le déroulement global des opérations sur le tableau,... ?) (NC, 4^{e} + 3^{e} d’insertion, 12)

3. J'ai fait une activité sur geogebra qui a plutôt bien marché, mais les élèves n'ont quasiment pas gardé de traces écrites du fait qu'ils étaient sur PC. Dois-je les obliger à me rendre un bilan d'activité ? Puis-je gérer les traces écrites en mettant en commun la séance d'après ? Explicitation de l'activité : à l'aide du logiciel, ils devaient en gros conjecturer la formule de calcul de longueur d'un segment avec les coordonnées et tenter de la démontrer, et idem avec la formule des coordonnées d'un milieu. (RB, 2de, 12)

1. Nous avons déjà étudié la première question lors de la huitème séance du séminaire. Nous avons dit que les traces écrites ne se génèrent pas spontanément et qu’il faut prévoir un dispositif pour cela au préalable, qui ne soit pas seulement un compte rendu écrit à faire hors classe, même si une partie peut être laissée en travail hors classe. L’existence d’un tel dispositif passe par une scansion de l’avancée du temps de l’étude et un retour au collectif régulier, avec des bilans d’étape. Nous avions examiné, à travers un extrait vidéo correspondant à la réalisation d’un moment technologico-théorique utilisant les TICE, un dispositif utilisé par le professeur pour garder des traces écrites de l’expérimentation : envoyer un élève au tableau noter le travail effectué. Les traces écrites auraient pu être utilement complétées par quelques figures données par P à l’issue de la séance et également les fonctions du logiciel qui avaient été utilisées pour la première fois.

2. Il faut donc que les élèves gardent une trace écrite, à la fois de l’expérimentation effectuée et des techniques « à ordinateur » pertinentes pour cela, mais cela ne peut pas se faire sans un dispositif prévu par le professeur. On peut articuler le fait de rendre un bilan d’activité et de faire un bilan

d'étape collectif lors de la séance suivante, bilan préparé par le bilan d'activité. On peut également faire, faute de mieux, lorsqu'on s'est fait surprendre comme le décrit la troisième question, uniquement le bilan d'étape collectif, mais l'augmentation de l'autonomie des élèves passe par la réalisation par eux-mêmes de bilans d'étape.

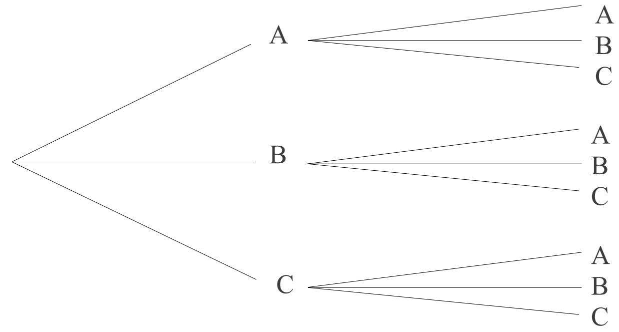
Nous reviendrons maintenant brièvement sur le thème de l'***algorithmique en seconde*** que nous avons travaillé lors de la séance précédente à travers deux questions posées la semaine dernière .

L'enseignement de l'algorithmique en 2de ne doit pas faire l'objet de séances dédiées. Néanmoins, entre l'apprentissage sur papier de la notion d'algorithme, la mise en pratique sous différents supports (calculatrice, Xcas, scratch, geogebra...) il me paraît difficile de ne pas y consacrer un volume horaire conséquent. Comment hiérarchiser ce thème afin de délivrer un enseignement qui ne soit pas un simple survol ? (JB, 2de, 12)
Est-ce que le langage de programmation calculatrice est exigible en seconde ? (JLH, 2de, 12)

1. Le fait de ne pas consacrer une séquence d'étude à l'algorithmique ne veut pas dire qu'on ne passera jamais une séance à élaborer un algorithme, mais que, si cela arrive, ce n'est pas l'algorithme qui y sera l'enjeu principal de l'étude : par exemple, on pourra passer une séance à élaborer un algorithme permettant de réaliser la simulation d'une expérience aléatoire mais dans le cadre de l'étude de la statistique ou des probabilités (voir *infra*). À cet égard, il faut adopter une progressivité dans les exigences que l'on se fixe et ne pas avoir besoin d'emblée d'algorithmes complexes alors que des algorithmes simples n'ont pas encore été élaborés. Ainsi, le programme relatif à la statistique note ainsi que l'on pourra, « à l'occasion de la mise en place de simulations, (...) mettre en place des instructions conditionnelles dans un algorithme » : cela suppose que l'algorithmique a déjà été travaillée au travers d'autres thèmes avant que ce thème soit étudié.
2. Le programme mentionne clairement qu'aucun logiciel n'est exigible, et si le document ressources mentionnent plusieurs possibilités, c'est pour permettre au professeur de choisir ce qui lui paraît le plus adapté et pas dans la perspective de tous les employer. Il faut privilégier la langue naturelle et la calculatrice parce qu'elle est disponible pour les élèves, un logiciel du type algobox s'avérant un intermédiaire précieux du point de vue de la fabrication et du test d'algorithmes.
3. Les textes officiels que nous avons lus et commentés lors de la séance précédente mettent en évidence que le langage de programmation de la calculatrice est exigible en seconde, mais sans aller chercher des raffinements. Peu d'instructions sont nécessaires : pour une calculatrice TI, Prompt (lire une variable), Disp (afficher une variable), « sto » (affecter une variable) If ... Then ...End (Bloc conditionnel) For *i,a,b* ... End (Boucle) While ... End (Répétition) doivent à peu de choses près suffire, avec éventuellement l'ajout de conjonctions comme « and » et « or ».

Modélisation en probabilités

Dans les documents ressources pour la seconde en proba-stat, un exemple fait l'objet de deux modélisations qui conduisent à deux probabilités différentes pour un même événement. J'ai l'impression que la deuxième modélisation contient une erreur. Est-ce le cas ? Il s'agit du problème suivant : deux personnes s'assoient successivement, au hasard, sur trois bancs de deux places. Quelle est la probabilité qu'elles soient côte à côte ? Deuxième modélisation : on note les bancs A, B et C.



Conclusion : la probabilité que les deux personnes soient sur le même banc est donc $\frac{1}{3}$. Cette conclusion part du principe qu'il y a équiprobabilité entre (A, A) et (A, B) or ce n'est pas le cas, si ? (MP, 2de, 10)

Examinons le problème posé : deux personnes s'assoient successivement, au hasard, sur trois bancs de deux places. Quelle est la probabilité qu'elles soient côte à côte ? Le modéliser suppose de donner une signification à ce que l'on entend par « deux personnes s'assoient successivement au hasard ».

Une première façon de faire est de considérer que la première personne choisit une place parmi les six places possibles sur les bancs ; la seconde a alors à choisir une place parmi les 5 places restantes, le choix d'une place parmi les places libres étant supposé équiprobable. On a donc un univers composé de couples, (i, j) où i prend ses valeurs dans $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et j ses valeurs dans $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \setminus \{i\}$, chaque couple étant équiprobable. Il y a donc $6 \times 5=30$ possibilités de choix équiprobables ; en supposant que l'on a numéroté les places dans l'ordre (1, 2 correspond au 1er banc, 3, 4 au 2^{e}, et 5, 6 au 3^{e}) l'événement dont on cherche la probabilité sera composé des événements élémentaires suivants : (1,2), (2,1), (3,4), (4, 3), (5, 6) et (6, 5) ; la probabilité de cet événement est ainsi $6 \times \frac{1}{30} = \frac{1}{5}$.

Une deuxième façon de faire est de considérer que les individus choisissent non une place mais un banc. On a trois bancs A, B, C et l'univers est donc composé des couples (A,A), (A,B), (A,C), (B, A), (B, B), (B, C), (C, A), (C, B), (C, C), chacun de ces couples étant équiprobable. En effet, le fait que la première personne ait choisi un banc ne limite pas le choix de la seconde puisque les bancs ont deux places : cette expérience peut se modéliser par un tirage avec remise de deux boules dans une urne à 3 boules numérotées A, B et C. L'événement « les personnes sont côte à côte » est constitué des événements élémentaires (A,A), (B,B) et (C,C) : sa probabilité est ainsi $3 \times \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$.

On a donc bien l'équiprobabilité des couples de bancs dans la seconde modélisation.

On met là en évidence que la probabilité que l'on attribue à un événement dépend du modèle de l'expérience aléatoire que l'on choisit : dans le premier cas, on a un tirage sans remise de deux boules dans une urne de 6 boules numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6 parce qu'on considère que « s'asseoir au hasard sur un banc » consiste à choisir une place parmi les places libres ; tandis que dans le deuxième cas, on considère que « s'asseoir au hasard sur un banc » consiste à choisir un banc et on modélise donc par un tirage avec remise dans dans une urne à 3 boules numérotées A, B et C.

La statistique en seconde

Je compte mener en parallèle les chapitres sur les fonctions usuelles et les statistiques. J'ai prévu de consacrer plutôt les heures de modules aux statistiques au travers essentiellement de travaux dirigés et via l'utilisation des outils informatiques et/ou calculatrices. Est-ce un choix judicieux ? (JPH, 2de, 12)
Peut-on faire les statistiques uniquement en module en parallèle d'autres chapitres sur une longue période ? A priori, il ne faut pas faire de cours et travailler beaucoup en salle informatique. (MH, 2de, 12)
Je suis en train de travailler sur la notion de fluctuation d'échantillonnage (programme seconde). Je crois avoir compris qu'il ne faut pas faire de devoir sur cette notion. Mais on doit aussi faire travailler les élèves sur les intervalles de confiance, type de tâches propice à quelques exercices. Ne doit-on pas non plus faire de devoir sur cette notion ? (JC, 2de, 11)
En 2de, dans le domaine Statistique, la partie simulation, il est précisé dans les documents d'accompagnement que l'évaluation doit éviter d'être sous forme de DS ; peut-on oublier pour un temps cette forme d'évaluation ou vaut-il mieux traiter un 2^{e} thème en parallèle afin d'éviter de laisser les élèves sans DS pour une trop grande période ? (EM, 2de, 10)
Dans la partie statistique sur les simulations, je dois introduire l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % d'une proportion. J'ai déjà fait remarquer que, plus l'échantillon est grand, plus la répartition des fréquences est dans un intervalle petit dans la plupart des cas. Mais à part leur donner la formule de l'intervalle $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;\,p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$, je ne vois pas comment l'introduire. (EM, 2de, 11)

1. En dehors de considérations qui feraient de la statistique en seconde un cas particulier, et sur lesquelles nous reviendrons ci-dessous, le fait de consacrer « uniquement » ou même « pour l'essentiel » les heures de modules à un seul thème d'étude conduit à priver les autres thèmes traités en parallèle des dites heures de modules : cela contraint fortement l'organisation de l'étude relative à ces thèmes, et cela s'avérera sans nul doute dommageable à ces organisations de l'étude.

2. Voyons quelles sont les contraintes que fixe le programme sur l'étude de la statistique « non descriptive », d'abord à propos de l'évaluation et de l'utilisation de l'informatique :

Objectifs visés par l'enseignement des statistiques et probabilités à l'occasion de résolutions de problèmes
(...)
dans le cadre de l'échantillonnage
• faire réfléchir les élèves à la conception et la mise en œuvre d'une simulation ;
• sensibiliser les élèves à la fluctuation d'échantillonnage, aux notions d'intervalle de fluctuation et d'intervalle de confiance et à l'utilisation qui peut en être faite.
(...)

Échantillonnage Notion d'échantillon. Intervalle de fluctuation d'une fréquence au seuil de 95% *	• Concevoir, mettre en œuvre et exploiter des simulations de situations concrètes à l'aide du tableur ou d'une calculatrice.	Un échantillon de taille n est constitué des résultats de n répétitions indépendantes de la même expérience. À l'occasion de la mise en place d'une simulation, on peut : • utiliser les fonctions logiques d'un tableur ou d'une calculatrice, ◇ mettre en place des instructions conditionnelles dans un algorithme.
Réalisation d'une simulation.	• Exploiter et faire une analyse	L'objectif est d'amener les élèves à

	critique d'un résultat d'échantillonnage.	un questionnement lors des activités suivantes : • l'estimation d'une proportion inconnue à partir d'un échantillon ; • la prise de décision à partir d'un échantillon.

* L'intervalle de fluctuation au seuil de 95%, relatif aux échantillons de taille *n,* est l'intervalle centré autour de *p*, proportion du caractère dans la population, où se situe, avec une probabilité égale à 0,95, la fréquence observée dans un échantillon de taille *n.* Cet intervalle peut être obtenu, de façon approchée, par simulation. Le professeur peut indiquer aux élèves le résultat suivant, utilisable dans la pratique pour des échantillons de taille $n \geq 25$ et des proportions p du caractère comprises entre 0,2 et 0,8 : si f désigne la fréquence du caractère dans l'échantillon, f appartient à l'intervalle$[p - \frac{1}{\sqrt{n}}, p + \frac{1}{\sqrt{n}}]$ avec une probabilité d'au moins 0,95. Le professeur peut faire percevoir expérimentalement la validité de cette propriété mais **elle n'est pas exigible.**

Rien n'apparaît à propos de l'évaluation, si ce n'est le paragraphe commun à l'ensemble des domaines du programme :

Évaluation des élèves

Les élèves sont évalués en fonction des capacités attendues et selon des modes variés : travaux écrits, rédaction de travaux de recherche, compte-rendus de travaux pratiques. L'évaluation doit être en phase avec les objectifs de formation rappelés au début de cette introduction.

À propos de l'informatique, on voit qu'est mentionné le tableur mais aussi la calculatrice.

Le document d'accompagnement apporte certaines précisions que nous reproduisons ci-dessous.

La diversité des objectifs visés par l'enseignement des statistiques et des probabilités, tels qu'ils sont précisés dans le programme, invite à proposer des formes d'évaluation variées, prenant davantage en compte l'usage des TIC ou l'expression orale.

Bien sûr, de nombreuses capacités attendues peuvent aisément s'évaluer sous la forme habituelle d'un devoir en temps limité, comme par exemple tout ce qui a trait aux calculs de probabilités, aux représentations graphiques ou aux résumés statistiques.

En revanche, s'agissant de la fluctuation d'échantillonnage, l'objectif est de faire réfléchir les élèves à la conception et à la mise en œuvre d'une simulation et de les sensibiliser aux notions d'intervalle de fluctuation, d'intervalles de confiance et à l'utilisation qui peut en être faite. Aussi, semble-t-il prématuré d'exiger dans des contrôles écrits une autonomie totale des élèves pour conduire les raisonnements qui sont attachés à ces notions : on prendrait en effet le risque de restitutions par cœur pour compenser une assimilation naissante et encore fragile.

C'est pourquoi, l'évaluation des capacités attendues suivantes :

- concevoir, exploiter et mettre en œuvre des simulations de situations concrètes à partir d'un tableur ou d'une calculatrice,
- exploiter et faire une analyse critique d'un résultat d'échantillonnage,
- utiliser un logiciel ou une calculatrice pour étudier une série statistique,

devrait majoritairement être réalisée sous forme de comptes-rendus de travaux pratiques ou de devoirs à la maison. Ces modalités d'évaluations donnent accès à des situations statistiques ou probabilistes appelant l'usage d'un logiciel ou d'une calculatrice, et permettent, en raison de l'interaction possible entre le professeur et les élèves, d'ouvrir le champ de l'évaluation à des situations plus riches et plus ouvertes, qui mobilisent davantage les capacités de recherche, d'expérimentation et d'initiative.

Par ailleurs, concernant tout particulièrement ce chapitre, la place de l'oral gagnerait à être développée, tant cette forme de communication facilite, par le questionnement interactif qu'elle permet, l'explicitation de certains raisonnements statistiques délicats à consigner à l'écrit. Dans ce cadre, on peut envisager de proposer des situations dont l'étude est réalisée en classe et dont le compte-rendu, rédigé à la maison, est suivi d'un exposé en classe ou bien d'échanges avec le professeur permettant d'approfondir certaines argumentations ou démarches imparfaitement restituées à l'écrit afin de les améliorer.

L'expérience acquise lors de l'expérimentation de l'épreuve pratique de mathématiques[37] et les critères d'évaluation qui y ont été explicités constitueront de précieux points d'appui, transférables à ces nouvelles modalités d'évaluation.

On le voit, il ne s'agit pas de « ne pas faire de devoir » : il s'agit de varier davantage que dans d'autres thèmes les modalités d'évaluation pour pouvoir évaluer certaines capacités comme la conception et l'exploitation de « simulations de situations concrètes ». On notera par exemple qu'on a la possibilité de donner un devoir à la maison, puis de constituer un devoir surveillé dont ne partie sera constituée de l'exposé de résultats et de démarches mises en œuvre dans le DM (ce qui aura bien entendu été dûment annoncé aux élèves).

Rien n'indique en outre, et bien au contraire, qu'il n'y a pas une OM à étudier et à synthétiser, même si sa maîtrise en complète autonomie n'est pas exigible.
Supposons que l'on s'intéresse à la distribution d'un certain caractère X (le poids par exemple) sur une certaine population Ω (les enfants ayant entre 5 et 6 ans). Pour étudier la distribution de X sur Ω, il faudrait connaître l'ensemble $\{ X(\omega) / \omega \in \Omega \}$. Quand cet ensemble n'est pas connu, on se tourne vers un échantillon E (ou plusieurs) que l'on a été capable de se procurer (on parlera alors

d'échantillons ***disponibles*** ; par exemple, on peut considérer l'échantillon des enfants soignés dans tel service pédiatrique de l'hôpital de Toulouse). À partir de la connaissance de la distribution de X sur E, on essaie d'***inférer*** la distribution de X sur Ω. On voit ainsi émerger une première raison d'être de la notion d'échantillon et de fluctuation d'échantillonnage. Une deuxième raison d'être tient à l'étude de la question suivante : si l'on extrait un échantillon d'une population de structure connue ou supposée connue, à quoi peut-on s'attendre quand à cet échantillon ? L'OM se fabriquera ainsi autour de trois notions mentionnées dans le programme et qui émergeront, « comme d'habitude » du travail exploratoire effectué à partir des deux questions évoquées : celles d'échantillon, de fluctuation d'échantillonnage et d'intervalle de fréquence au seuil de 95 %. Nous reviendrons sur ces questions dans le mois de janvier 2010.

Conseil de lecture

Quelle publication pouvez-vous nous conseiller pour préparer notre mémoire et qui soit profitable à notre pratique professionnelle ? (Patrick Raoux, 6^{e}, 12)

La lecture la plus indiqué du double point de vue indiqué est celle des ***archives du Séminaire*** : on a en effet là un développement inédit de la théorie anthropologique du didactique pour la production de praxéologies professionnelles relatives au métier de professeur de mathématiques et adapté au TER à mener.

Bonnes vacances !

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

Bonne année !!!

➔ Séance 13 : mardi 5 janvier 2010

Programme de la séance. 1. Forum des questions // 2. Une AER de statistique descriptive // 3. Évaluation & développement : analyse d'un TER à propos des fonctions en seconde

1. Forum des questions

1.1. **Raisons d'être des angles au collège**

1. En 5e, le chapitre sur les angles comporte beaucoup de définitions (de notions). Comment choisir une activité faisant apparaître des raisons d'être ? Alternativement, est-ce une bonne idée de donner une définition (par exemple de deux angles adjacents) et de laisser le soin aux élèves d'essayer de faire le dessin (en corrigeant après, bien sûr) ? (BCL, 5e, 10)
2. Comment introduire les angles en sixième sachant que le chapitre est essentiellement consacré à l'utilisation du rapporteur ? (BP, 6e, 10)

Les deux questions posent, plus ou moins explicitement, la question des raisons d'être des angles et des différentes « paires d'angles » introduites en classe de 5e : angles adjacents, complémentaires, supplémentaires, opposés par le sommet, alterne - interne, correspondants. Nous avons déjà travaillé à propos des angles alternes-internes lors de la séance 7, et nous avions vu qu'une raison d'être de cette paire d'angles réside dans le fait que leur égalité permet de démontrer le parallélisme de deux droites selon la technique suivante : on détermine une sécante D à ces deux droites telle que les angles alternes internes déterminés par cette sécante soient connus ou encore puissent être déterminés à partir d'angles connus ; on met en évidence qu'ils sont égaux.
Dans ce travail à propos du type de tâches T : « montrer que deux droites sont parallèles », on rencontre « une autre » technique, qui permet de fonctionnaliser la notion d'angles correspondants selon la technique suivante : on détermine une sécante D à ces deux droites telle que les angles correspondants déterminés par cette sécante soient connus ou encore puissent être déterminés à partir d'angles connus ; on met en évidence qu'ils sont égaux.

On voit ainsi se dessiner, à propos du type de tâches T la technique suivante, qui amalgame les deux techniques précédentes :
τ : On détermine une sécante D à ces deux droites telle que les angles alternes internes ou les angles correspondants déterminés par cette sécante soient connus ou encore puissent être déterminés à partir d'angles connus ; on met en évidence qu'ils sont égaux.

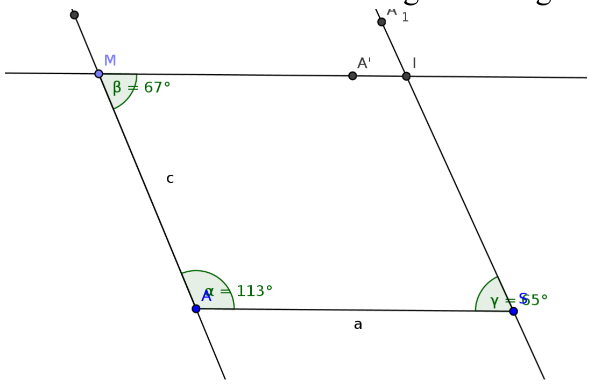
On notera que cette technique devra venir s'amalgamer à la technique suivante dont disposent les élèves en entrant en cinquième :
En notant D et D' les droites, on détermine une droite Δ telle que D et D' soient parallèles ou perpendiculaires à cette droite ; ou encore deux droites Δ_1 et Δ_2 parallèles telles que D soit parallèle à Δ_1 et D' soit parallèle à Δ_2.

Dans la mise en œuvre de la technique τ, on aura besoin de déterminer des mesures d'angles (type de tâches T'), et c'est ainsi que l'on pourra fonctionnaliser notamment les notions d'angles complémentaires, supplémentaires, opposés par le sommet.

Considérons par exemple l'exercice suivant, extrait d'un ouvrage de mathématiques pour la classe de 5[e] (Collection Diabolo, Hachette Éducation, 2006).

1. a) Tracer le schéma d'un quadrilatère AMIS tel que : AM = 4 cm, AS = 5 cm, $\widehat{SAM}$=113°, $\widehat{AMI}$ = 67° et $\widehat{ASI}$ = 65°.
b) Construire le quadrilatère AMIS.
 2). Les côtés opposés du quadrilatère AMIS sont-ils parallèles ?

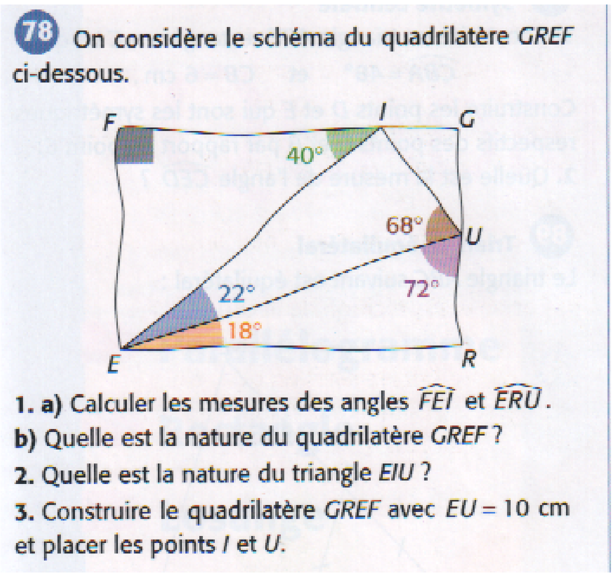
Voici le quadrilatère obtenu à l'aide du logiciel Geogebra :



Examinons d'abord le cas des droites (IM) et (AS) : nous avons deux sécantes, les droites (AM) et (IS), et pour l'une d'entre elles, (AM), nous avons deux angles, qui ne sont ni alternes-internes ni correspondants. Mais on peut obtenir l'angle correspondant à l'angle $\widehat{SAM}$, puisqu'il est le supplémentaire de l'angle opposé par le sommet à l'angle $\widehat{AMI}$: il a donc pour mesure 180°-67°=113°. Les angles complémentaires déterminés par la sécante étant égaux, les droites (IM) et (AS) sont parallèles.
Considérons maintenant les droites (AM) et (IS). Il y a encore deux sécantes, (AS) et (IM). L'angle correspondant à l'angle $\widehat{ISA}$ déterminé par la sécante (AS) et l'angle $\widehat{MAS}$ sont supplémentaires : sa mesure est donc 180°-113°=67°. Les angles correspondants déterminés par la sécante (AS) n'étant pas égaux, les droites (AM) et (IS) ne sont pas parallèles.

On remarquera que :
1. L'étude du parallélisme aurait pu emprunter d'autres voies : par exemple, dans le cas des droites (AM) et (IS), on aurait pu utiliser le parallélisme des sécantes que l'on venait de prouver pour déduire la mesure de l'angle alterne-interne à l'angle $\widehat{ASI}$, 67°, et conclure donc au non parallélisme.
2. L'exercice proposé suggère un autre type de tâches permettant de donner des raisons d'être à la détermination d'angles, la détermination de la nature d'une figure géométrique, que l'on trouve par

exemple dans l’exercice suivant tiré du même ouvrage :



78 On considère le schéma du quadrilatère *GREF* ci-dessous.

1. a) Calculer les mesures des angles $\widehat{FEI}$ et $\widehat{ERU}$.

b) Quelle est la nature du quadrilatère *GREF* ?

2. Quelle est la nature du triangle *EIU* ?

3. Construire le quadrilatère *GREF* avec *EU* = 10 cm et placer les points *I* et *U*.

On a donc ainsi une articulation de types de tâches selon l’arborescence suivante, une flèche entre T_i et T_j indiquant que la technique relative au type de tâches T_i peut mobiliser le type de tâches T_j :

Déterminer la nature d’une figure géométrique

étudier le parallélisme de deux droites

Montrer que deux droites sont parallèles

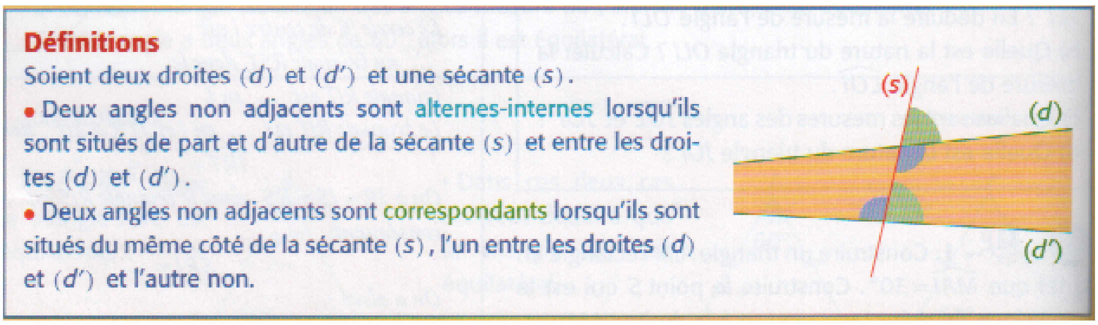
Montrer que les angles alternes-internes déterminés par une sécante sont égaux ou ou pas

Montrer que les angles correspondants déterminés par une sécante sont égaux ou pas

Déterminer la mesure d’un angle

L’identifier comme angle complémentaire, supplémentaire, opposé par le sommet d’un angle dont on connaît la mesure.

Nous n’avons pas encore mobilisé ici la notion d’angles adjacents. Dans l’ouvrage cité plus haut, les angles adjacents sont mobilisés pour définir les angles alternes-internes et les angles correspondants :



Définitions

Soient deux droites (d) et (d') et une sécante (s).

- Deux angles non adjacents sont alternes-internes lorsqu’ils sont situés de part et d’autre de la sécante (s) et entre les droites (d) et (d').
- Deux angles non adjacents sont correspondants lorsqu’ils sont situés du même côté de la sécante (s), l’un entre les droites (d) et (d') et l’autre non.

On le voit, il s’agit de pouvoir décrire certaines configurations de manière à ce qu’il n’y ait pas d'ambiguïté. C'est ainsi que la notion d'angles adjacents trouvera une raison d'être dans la formulation de certaines propriétés, définitions ou techniques : on en donnera un exemple ci-dessous.

$T_\perp$: Montrer que deux droites D et D' sont perpendiculaires

τ : Déterminer deux angles complémentaires et adjacents, l'un ayant pour un de ses côtés D et l'autre D'.

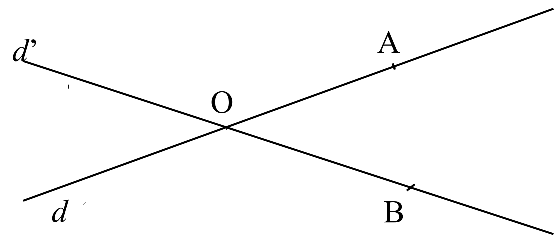
2. Venons-en au cas du travail à effectuer en classe de 6^e. Le programme ne mentionne pas de thème relatif à la notion d'angle, qui a été introduite à l'école primaire, mais mentionne cette notion dans le travail à effectuer dans secteur des Figures planes, notamment du point de vue du type de tâches « Reproduire une figure plane » (voir programme). C'est le type de tâches reproduire un angle qui est donc au centre du travail à effectuer.

Le document d'accompagnement sur l'articulation entre l'école et le collège publié en 2003 notait à propos des angles :

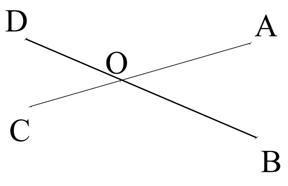
Le travail sur les angles reste très limité au cycle 3. Seul un travail de comparaison à partir de gabarit est proposé, ainsi qu'une première approche de leur mesure avec l'angle droit comme unité : le demi-angle droit, le quart d'angle droit sont utilisés. Mais la question générale de la mesure des angles et l'apprentissage de l'utilisation du rapporteur relèvent du collège : le degré comme unité d'angle comme la mesure de l'angle droit (90°) sont des connaissances du programme de sixième.

La reproduction d'un angle a sans doute déjà été effectué à l'école primaire en utilisant des gabarits : il convient donc de le tester dans un test d'entrée. La technique du gabarit n'est pas très aisée parce que, en dehors des angles dont les équerres courantes sont un gabarit (30°, 60° 45°, 90°), il faut fabriquer un gabarit par pliage ou par calque. On peut donc chercher une autre technique qui permette de reproduire l'angle, en en « mesurant l'écartement ». On rappelle ci-dessous les ingrédients de l'environnement technologico-théorique qu'il faudra faire émerger et que l'on avait étudié lors de la séance 8 à travers un extrait des notes du séminaire 2002-2003 :

1. Sur la figure ci-après, les droites sécantes *d* et *d*' déterminent quatre ***secteurs angulaires***.



Le secteur angulaire qu'on peut noter par exemple (pourquoi pas ?) ⟨[OA), [OB)⟩ est une ***partie du plan***, qui s'écrit encore $d'_A \cap d_B$, où d'_A est le demi-plan fermé déterminé par *d*' et contenant A et d_B le demi-plan fermé déterminé par *d* et contenant B. En revanche l'angle $\widehat{AOB}$ désigne une ***grandeur*** (d'un genre particulier !) : c'est l'***angle*** du ***secteur angulaire*** ⟨[OA), [OB)⟩, comme on parle de la ***longueur*** ℓ d'un ***segment*** [AB]. C'est ce qu'on reconnaît implicitement quand on écrit – selon l'usage – une égalité telle



$$\widehat{AOB} = \widehat{COD}$$

Celle-ci dénote en effet l'égalité de deux angles, non l'identité de deux secteurs angulaires : ici, les angles sont égaux – sont une seule et même entité – tandis que les secteurs angulaires sont deux régions du plan qui n'ont en commun que le point O. De la même façon que toutes les longueurs mesurées en kilomètres par le nombre 6 (par exemple) sont ***égales***, c'est-à-dire sont ***une seule et même longueur***, notée 6 km, de même tous les secteurs angulaires dont l'angle est mesuré en ***degrés*** par le nombre 37 sont notés 37 ° : on aura ainsi : $\widehat{AOB} = \widehat{COD} \approx$ 37 °.

(...)

• Pour mesurer un angle, l'idée de base est de mesurer l'arc qu'il intercepte sur un cercle de rayon R centré en son sommet.

• Cette mesure est *a priori* mal définie, puisqu'elle dépend du rayon R. Pour cette raison, on choisit une unité u de mesure ***des arcs*** qui soit proportionnelle au rayon R, et donc à la longueur d'un cercle de rayon R.

• Si l'on prend pour unité u la longueur d'un arc égal à la n-ième partie du cercle, on a $u = \frac{2\pi R}{n}\ell$, où ℓ est l'unité de longueur choisie dans le plan (centimètre, etc.). L'angle correspondant est dit alors d'un ***degré*** si $n = 360$, d'un ***grade*** si $n = 400$, etc. Ainsi, pour $n = 360$, un angle interceptant un arc dont la longueur vaut les $\frac{3}{8}$ de la longueur du cercle, soit un arc de longueur $\frac{3}{8}u = 0{,}375u$, est un angle de 135 degrés (noté 135 °).

(...)

Commentaires développés oralement : l'idée essentielle à développer, c'est que la mesure de l'écartement (via la longueur du cercle) dépend du rayon et que l'on va prendre, en conséquence, une mesure proportionnelle au rayon, et donc au périmètre d'un cercle de rayon R. On pourra ensuite par exemple faire faire une enquête pour déterminer quel est le coefficient de proportionnalité choisi pour les unités de mesure des angles usuelles.

1.2. ***Mise en place du théorème de Thalès***

1. À propos de la construction en 3[e] (à la règle et au compas) de points M sur un segment [AB] tels que $\frac{AM}{AB} = \frac{2}{3}$. Sur le programme, ceci est demandé explicitement. Le problème de fond n'est-il pas plutôt de graduer le segment [AB] ? Dans ce cas, il me paraît peu opportun de mettre en application la configuration « en papillon » de Thalès, car une fois le segment (la droite) gradué(e) convenablement grâce à la configuration classique, on peut placer tous les points possibles (avec le même dénominateur du rapport). Autrement dit, faut-il privilégier la mise en œuvre de techniques (configuration « papillon ») à la résolution du problème de fond ? Qu'en pensez-vous ? (MB, 2[de], 10)
2. Peut-on utiliser les triangles semblables pour introduire Thalès (car cela permet aussi de traiter la proportionnalité : agrandissement et réduction) ? (KR, 4[e], 12)

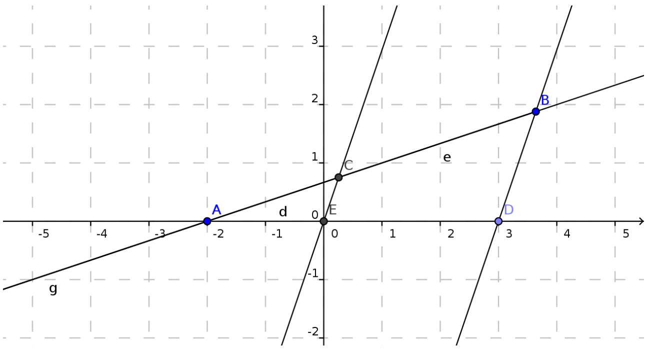
1. Une recherche dans le programme de troisième et le document « ressource » relatif à l'enseignement de la géométrie au collège montre que la situation évoquée dans la première question n'est citée ni dans le programme, ni dans le document ressource. Cette situation était

mentionnée dans l'ancien programme de la classe de 3e de la façon suivante :

> Le travail de construction de points définis par des rapports de longueurs permet de mettre en évidence l'importance de la position relative de ces points sur la droite. On s'intéressera particulièrement au problème suivant : étant donné deux points A et B, construire les points C de la droite (AB) sachant que le rapport $\frac{CA}{CB}$ a une valeur donnée sous forme de quotient d'entiers.

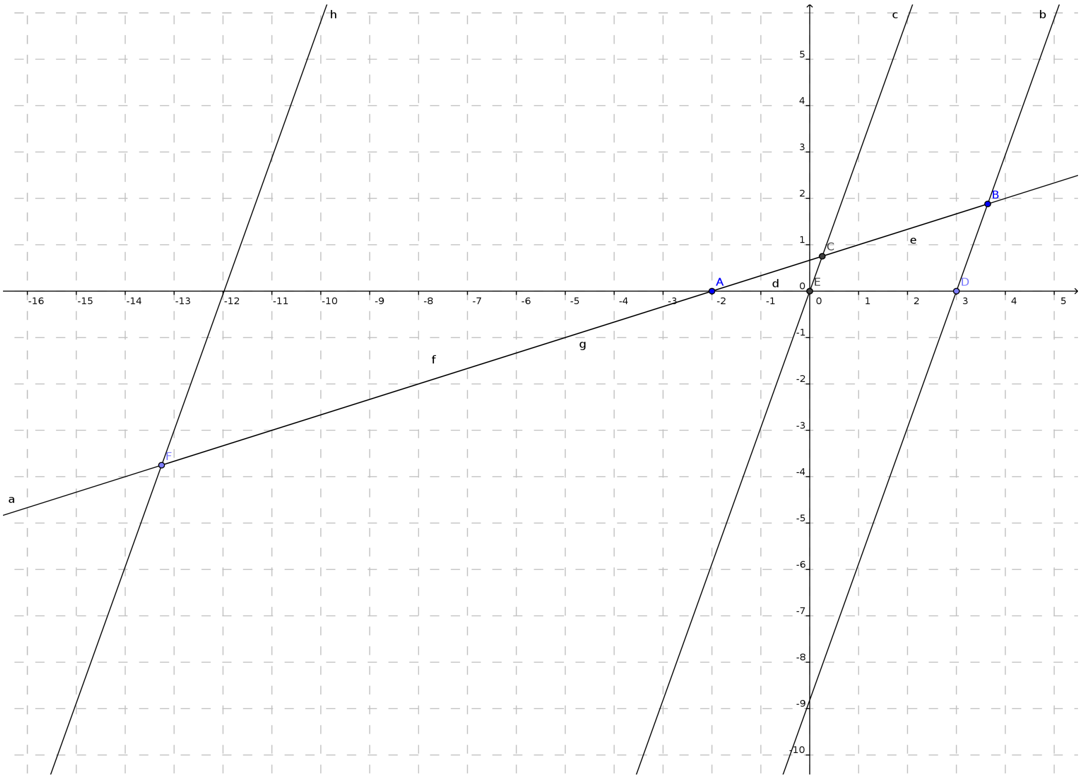
On voit qu'on a là une différence notable : d'une part, il s'agit de travailler sur la droite (AB) et non sur le segment (ce qui relèverait de la configuration étudiée en classe de 4e qu'il s'agit précisément d'étendre en classe de 3e) ; d'autre part, c'est le rapport $\frac{CA}{CB}$ qui est donné, et non le rapport $\frac{CA}{AB}$.
Supposons que l'on parte donc de ce problème et que l'on veuille positionner les points de la droite (AB) tels que $\frac{CA}{CB} = \frac{2}{3}$. L'organisation mathématique élaborée en quatrième permet d'obtenir un point sur le segment [AB] en mettant en œuvre la technique suivante :
On considère une demi-droite auxiliaire sur laquelle on porte (p+q) fois une longueur u (sur la figure ci-après, u est la longueur du côté d'un carreau du quadrillage et on a AD =(3+2)u=5u) et où on marque le point E tel que AE = $p\ u$; la parallèle à (BD) passant par E coupe alors [AB] en un point C tel que $\frac{CA}{CB} = \frac{p}{q}$.

La justification repose bien sur le théorème de Thalès.
En effet, $\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD}$ entraîne que AC = $\frac{p}{p+q}$ AB et donc CB = AB – CB = $\frac{q}{p+q}$ AB, soit finalement $\frac{CA}{CB} = \frac{p}{q}$.



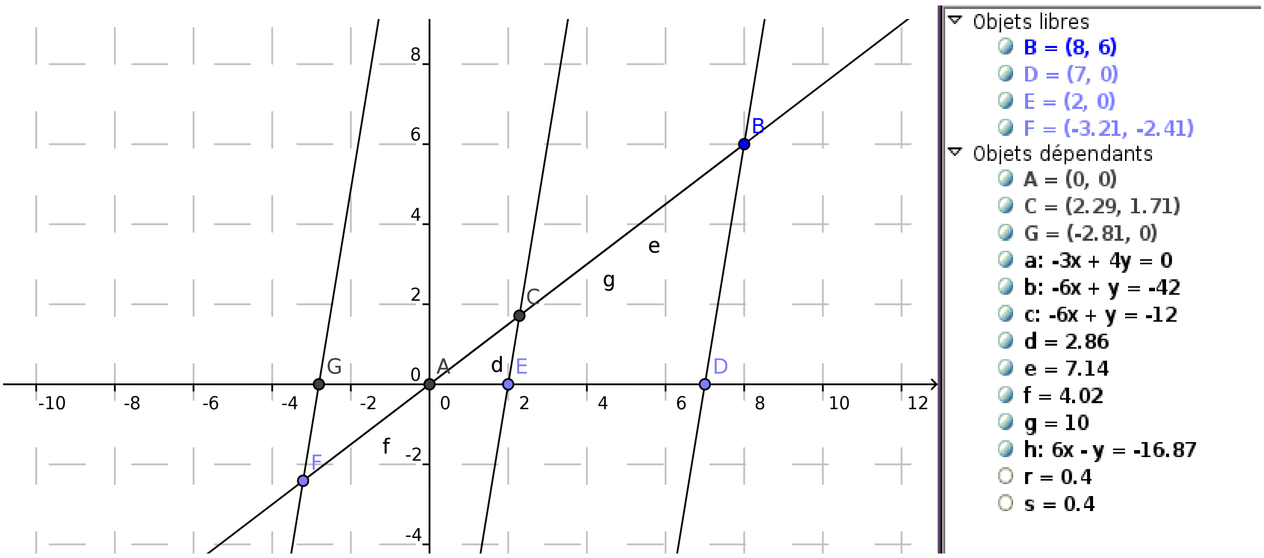
Y a-t-il d'autres points possibles, en dehors du segment ?

Une expérimentation fait ici apparaître le point F, tel que A soit situé entre F et B (voir figure ci-après).

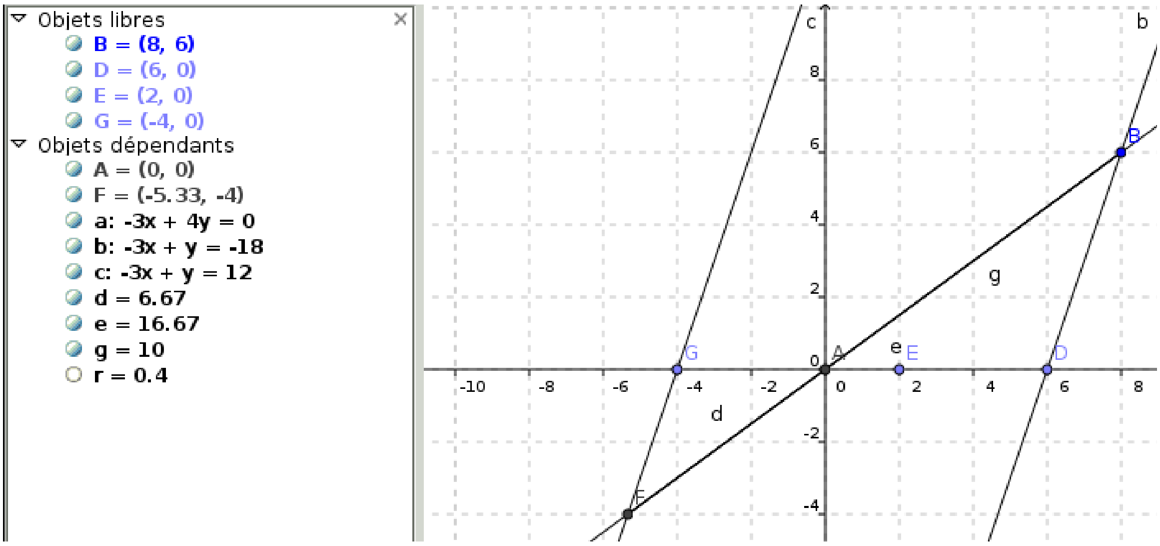


Comment obtenir le point F à la règle et au compas ?
On peut essayer de reproduire la technique ci-dessous en l'adaptant : en construisant la parallèle à (BD) passant par F on obtient un point de la droite (AD), G, que l'on peut caractériser semble-t-il par AG = $p(p+q)$ u ; si la proportionnalité des rapports est conservée, on a alors FA = p AB. Comme FB = FA + AB = $(p+1) \times$ AB, on obtient que $\dfrac{FA}{FB} = \dfrac{p}{p+1}$AB. Comme ici $q = p+1$, on a bien le résultat cherché.

Qu'en est-il si q est différent de p+1 ? On considère ci-dessous le cas où $p = 2$ et $q = 5$.



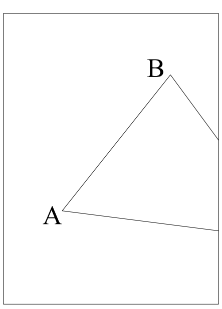
La technique précédente ne semble pas donner un résultat probant. Mais elle peut pousser en avant la mise en œuvre d'un modèle algébrique. Dans le premier cas, où $q > p$, on a FB = FA + AB. Donc $\frac{FB}{FA} = 1 + \frac{AB}{AF}$ qui doit être égal à $\frac{q}{p}$. On obtient alors que $\frac{AB}{AF} = \frac{q}{p} - 1 = \frac{q-p}{p}$. Si l'on a la proportionnalité des rapports de longueurs, on obtient la solution en prenant AG = $p\ u'$ et AD = $(q - p)\ u'$ comme en témoigne la figure suivante :

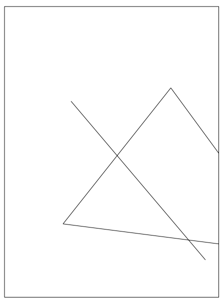


On laisse le lecteur faire le travail pour $p > q$.

Le problème suggéré par l'ancien programme permet donc bien d'étendre la propriété de Thalès à la configuration dite « papillon », et, à l'évidence, le fait d'avoir gradué la droite (AB) ne donne pas la solution en termes de production de la technique, d'autant qu'il faut « changer de graduation » entre le point sur le segment et le point en dehors.

2. On peut effectivement penser à utiliser une « configuration de triangles semblables » pour introduire le théorème de Thalès en 4^e : le problème auquel il faut porter attention, c'est que le cheminement déductif doit permettre d'aboutir à une « configuration de Thalès » sans trop de peine et qu'il faut éviter de faire une étude des triangles de même forme même si, bien entendu, on produira des connaissances à leur propos. En ayant à l'esprit le PER sur les « figures incomplètes », on peut partir de la configuration ci-dessous assortie par exemple de la question suivante : sachant que AB mesure 15 cm, peut-on connaître une mesure exacte ou approchée des autres côtés du triangle ?





Une première solution serait de marquer le milieu de [AB], I, et de construire la parallèle à [AB] passant par I, (d) : la proportionnalité des côtés permet alors de déterminer une valeur approchée. En variant la configuration de façon à ce que la droite (d) ne coupe plus l'un des côtés sur la page, et encore en marquant certains points sur les côtés dont on connaît la distance à A, on pourra faire émerger l'élément technologique cherché et les techniques relatives à la détermination d'une longueur qu'il permet de produire, ainsi que des éléments relatifs à la question de la « réduction » d'un triangle. On pourra également proposer le problème de l'agrandissement d'un triangle de sommet donné pour qu'il occupe l'aire la plus grande possible dans la page, etc.

Mise en forme des solutions

Doit-on obligatoirement respecter la structure des propositions contenant si... alors ? Par exemple : mes élèves de 4e, lorsqu'ils appliquent le théorème de Pythagore, commencent la rédaction de leur réponse par si (au lieu de « comme », « on sait que »,...). Peut-on réécrire le théorème sous la forme suivante : pour que $BC^2 = AB^2 + AC^2$ il faut que le triangle soit rectangle. Ceci permettrait d'éviter la structure si... alors ? (LA, 5e & 4e, 10)

Si l'on rédige la propriété comme le propose la question, on obtient que le fait que le triangle soit rectangle est une condition nécessaire pour que l'on ait $AB^2+AC^2=BC^2$ (soit encore que le fait que l'on ait $AB^2+AC^2=BC^2$ assure que le triangle est rectangle) mais rien ne dit que c'est la seule condition nécessaire. On pourra dire semblablement que pour que deux angles soient alternes internes, il faut qu'ils soient non adjacents ; ça n'est bien sûr pas la seule condition à satisfaire. La rédaction proposée n'est donc pas une alternative à la forme si... alors.

Il est assez normal qu'au début du travail sur la formulation des déductions, les élèves rencontrent des difficultés. Pour les dépasser, il ne faut pas les contourner mais les affronter. Il est donc nécessaire de travailler avec les élèves autour de leurs formulations en mettant en évidence les ingrédients qui posent problème et les raisons pour lesquelles ils sont fautifs.
Développé oralement

Des élèves « absents »

1. Comment faire avec une nouvelle élève qui n'a pas suivi la même progression ? (faire un bilan sur les premières leçons ou juste sur la leçon en cours ?) (TL, 5e, 9)
2. J'ai un nouvel élève dans ma classe. La progression de son ancien prof est évidemment différente de la mienne. Que dois-je faire pour les chapitres que j'ai faits avec ma classe, que lui n'a pas vus et sur lesquels je ne reviendrai pas ? (LM, 5e, 12)
3. J'ai plusieurs élèves qui auront 16 ans au cours de l'année 2010. Ils souhaitent faire un apprentissage l'année prochaine. Ils vont donc cette année effectuer au moins trois stages de deux semaines. Comment gérer leur progression mathématique ? (KR, 4e, 11)
4. J'ai un élève qui a intégré une classe relais. En accord avec l'administration, il revient le vendredi en classe et réintégrera la classe vers février. Que faire ? (ER, 5e, 12)

1. On soulignera d'abord que, bien entendu, on ne peut pas sans dommages s'absenter un temps d'une classe (de manière « institutionnellement volontaire » ou « involontaire ») et que, dans ce type de situations, le problème se pose pour l'ensemble de l'équipe pédagogique ; il faut donc voir ensemble les dispositifs qu'il convient de mettre en œuvre. Ensuite, la responsabilité didactique de l'élève doit être nettement sollicitée. Cela noté, s'agissant d'un élève arrivant en cours d'année, le professeur de mathématiques doit mesurer au plus juste les besoins mathématiques de l'élève. Il faut d'abord inventorier les thèmes sur lesquels l'élève n'aura pas travaillé. On laissera clairement sous sa responsabilité didactique et celle d'un dispositif éventuellement prévu par l'établissement, sans davantage s'en occuper, les thèmes qui n'ont pas de relation avec les thèmes dont l'étude est à venir, en lui fournissant par exemple une copie du cahier de textes qui lui permette d'encadrer son étude. Il s'agit ensuite d'examiner, avant chaque « début de thème », les éléments nécessaires à propos du thème en cours d'étude et qu'il n'aurait pas étudié. Le professeur pourra lui

communiquer à l'avance, par le biais d'une feuille d'exercices, des spécimens des principaux types de tâches qu'il a à étudier, en utilisant autant que faire se peut les SDA tels le soutien et les PPRE au collège, l'aide individualisée en seconde, ou encore un dispositif mis en place par l'établissement, etc. pour soutenir l'élève dans son étude. La feuille d'exercices ainsi constituée sera également rendue disponible pour l'ensemble de la classe.

2. Pour un élève s'absentant momentanément de la classe, la situation est proche, mais peut être gérée un peu différemment. En dehors des éléments cités précédemment, on peut mettre en place un dispositif qui permette de suivre, à distance, l'avancée du travail : un cahier de textes numérique correctement rempli par exemple est un dispositif efficace dans ce cas. On peut également préparer avec la classe, notamment dans le cas d'élèves absents une partie de la semaine, des comptes rendus de ce qui a été étudié en leur absence et les leur faire exposer à leurs camarades, ces comptes rendus pouvant tenir lieu de synthèse ou servir à la préparer suivant les cas. On notera que ce dispositif peut être routinisé dans la perspective de gestion des absences plus classiques (maladie notamment).

3. Dans le cas évoqué par la troisième question, il faut également penser que l'absence de plusieurs élèves dans une classe peut pénaliser la dynamique de l'étude de ceux qui restent : il faudra donc être attentif à ce point.

2. Une AER sur la statistique descriptive

Nous partirons ici des travaux effectués lors du deuxième TD (disponibles sur Espar) dont nous rappelons l'objet ci-dessous.

On considère le fichier ods (ou xls) disponible dans le dossier PCL2/2009-2010 d'Espar : il contient des données sur le poids et la taille d'enfants de 4 à 7 ans issues d'un fichier pris sur Internet.

Question 1. Précisez comment il faudrait faire pour savoir si un enfant de 5 ans qui pèse 19 kg est un enfant trop maigre pour son âge.

Question 2 : Élaborer, à partir de ces données, une étude statistique permettant de répondre à la question suivante : un enfant de 5 ans qui pèse 21,5 kg est-il trop gros pour son âge ? On utilisera les connaissances statistiques au programme du collège.

La classe sera répartie en équipes. On notera soigneusement les étapes de l'étude menée, mêmes celles qui n'ont pas abouti. Chaque équipe rendra à la fin de la séance un fichier texte relatant l'étude menée ainsi qu'un fichier « tableur » contenant le travail numérique.

Remarque : on a fixé qu'un enfant de 5 ans serait un enfant de 60 à 71 mois.

La question suivante n'a pas eu le temps d'être examinée ; elle sera reprise en Séminaire à partir des travaux rendus par les groupes.

Question 3 : Élaborer, à partir de cette étude, le guide d'une AER pour une classe de collège dont on choisira le niveau ou pour une classe de seconde.

Nous examinerons le travail à effectuer pour répondre à la question : un enfant de 5 ans qui pèse

21,5 kg est-il trop gros pour son âge ?

La première étape de l'étude à mener consiste en la sélection des données pertinentes dans le tableau ; il s'agit donc de trier les données correspondant aux enfants de 5 ans – on avait convenu que l'on prenait les enfants âgés de 60 à 71 mois. Un compte rendu exprime ainsi la technique à mettre en œuvre :

Étape 1 : On a classé les enfants par ordre croissant d'âge (trier).
Étape 2 : On a sélectionné les enfants de 60 à 71 mois inclus que l'on a mis dans un nouveau classeur.

Commentaire : Il faut systématiquement mettre en œuvre la technique consistant à produire un nouveau classeur au début de l'analyse des données en copiant le fichier original sous un autre nom avant de travailler dessus. De même, il faut sauvegarder le fichier à chaque fois que l'on a fait une manipulation réussie de manière à pouvoir restaurer un état « propre » du fichier en cas de fausse manœuvre.

On obtient donc un tableau de données pour les enfants âgés de 60 à 71 mois dont on trouvera le début ci-dessous.

1138	M	60	112	20
2478	F	60	122	26,5
1101	M	60	110,5	20
2339	M	60	112	21
2388	M	60	106	19
2486	M	60	108	20
1963	M	60	108	18
1079	M	60	105,5	17
2463	M	60	108	20
2470	M	60	114	22,5
51	M	60	112	20
903	M	60	105,5	18
2471	M	60	107	17,5
2477	F	60	99	15
1129	M	60	105,5	17
1088	M	60	112	20
2249	F	60	116	20
1394	F	60	107	20
1811	F	60	106	18
2424	M	61	123	24
2641	M	61	114	19
608	M	61	111	22
1573	F	61	115	24
2225	F	61	110	23
2209	M	61	108	20
2416	F	61	111	22
1240	M	61	114	17

On trie ensuite selon les poids croissants et on obtient un tableau dont on trouvera ci-après le début et la fin.

Numéro	**Genre**	**âge**	**taille**	**poids**
302	F	66	99	13
1666	F	68	112	13
137	F	66	101	13
1856	M	61	101	13
177	M	67	102	14
501	M	65	104,5	14
1433	M	61	103	14
2303	F	67	103,5	14
651	F	68	104,5	14
1085	F	66	107	15
980	F	65	103	15
2655	M	66	113	15
2135	F	68	103	15
2831	M	67	114	15
47	M	67	109	15
52	F	61	105	15
645	M	66	106,5	15
1686	F	67	106	15
336	M	67	105	15
2093	F	67	105	15
8	F	63	104	15
176	M	62	101	15
2676	M	64	110	15
1920	M	71	105	15
361	M	70	104	15
2017	F	71	106	15
2125	F	65	107	15

123	M	71	122	29
1308	F	70	120	29
1061	M	70	123	29
1033	M	70	121	29
2753	M	63	107	29
2845	F	64	109	29
2586	M	68	120	30
246	F	67	118	30
2508	F	69	120	30
2689	M	65	121	30
1986	F	66	119	30
332	F	68	118	30
1585	F	62	124	30
2536	F	68	120	31
2111	M	71	127	31
273	F	70	119,5	32
2559	F	64	119	32
1978	F	69	119	32
131	M	69	127	32
2862	M	66	115,5	33
1871	M	71	121	35
1468	M	71	128	35
875	M	69	120	40
604	F	61		
2782	F	71		
2333	M	63	120	

On remarque que trois lignes sont non pertinentes (on les enlève) et que la série des poids s'étend de 13 kg à 40 kg : la dernière donnée paraissant isolée, on peut l'enlever de la série.
On obtient ainsi une série de 2140-2+1=2139 données.

Commentaire : certains emploient une autre technique pour trier les données en utilisant une condition comme par exemple celle-ci :

Dans une autre colonne, pour les âges considérés, on fait apparaître un 1 et les autres un 0, abandon
A la place dans une colonne on fait apparaître le poids si l'âge correspond et rien sinon.

Elle s'avère un peu complexe pour un gain pas très évident.

La plupart des études établissent ensuite les effectifs cumulés croissants et ou les fréquences cumulées croissantes, mais souvent sans que la technique mise en œuvre soit précisée dans le compte rendu. Lorsqu'elle l'est, ce sont des fonctions « logiques » (en référence à la dénomination du tableur) qui sont utilisées :

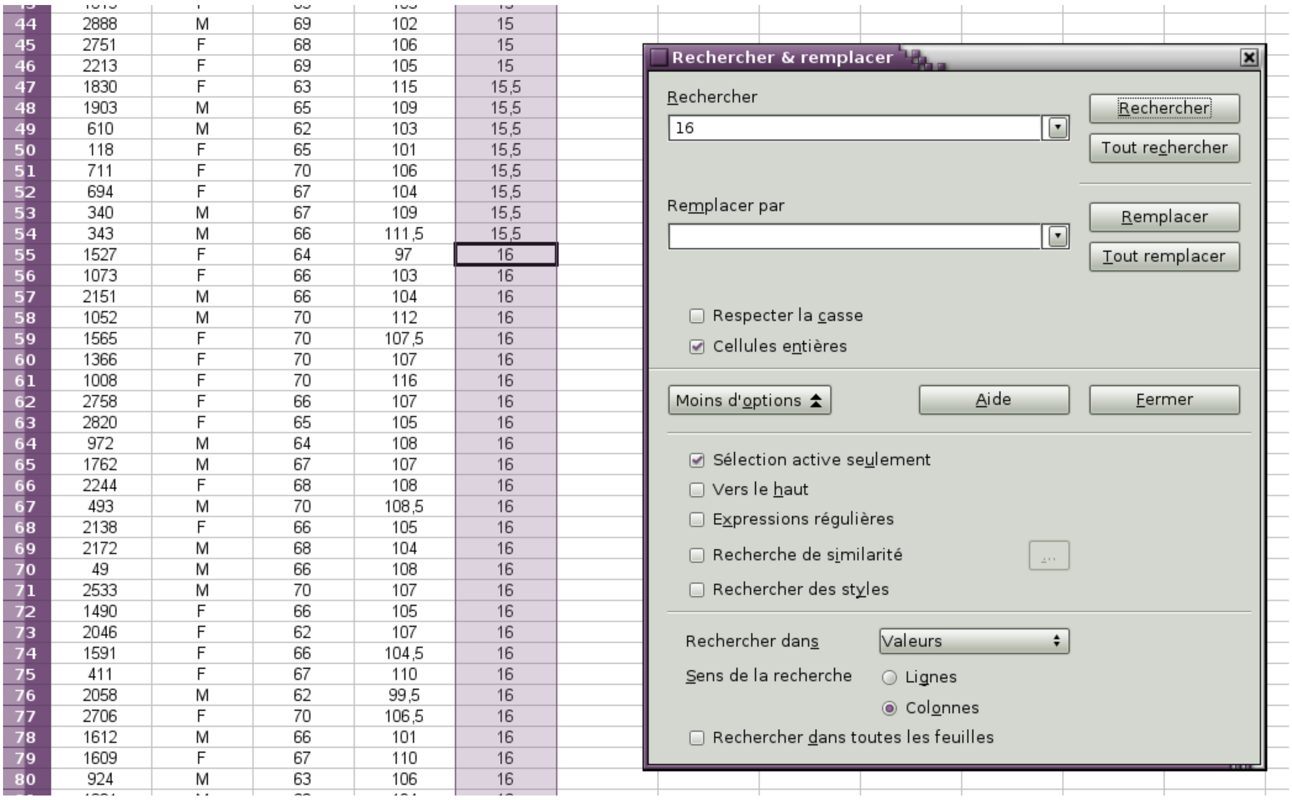
Nous avons également directement calculé la fréquence cumulée croissante correspondant au poids de 19 kg, et la fréquence cumulée décroissante correspondant au poids de 21,5 kg, à l'aide des fonctions NB.SI et NB (pour l'effectif cumulé et l'effectif total). Ces calculs permettent d'avoir également une idée de réponse, plus fine.
Nous avons aussi calculé ces mêmes paramètres grâce à la série statistique : la fonction NB.SI nous a permis de dresser le tableau des effectifs, puis de calculer les fréquences, et les fréquences cumulées.

On donnera ci-dessous une technique rudimentaire de comptage utilisant la fonction rechercher/remplacer d'un traitement de texte, qui peut être utile pour travailler en mathématiques la compétence du B2i collège suivante : C.3.2 Je sais utiliser l'outil de recherche et de remplacement dans un document.

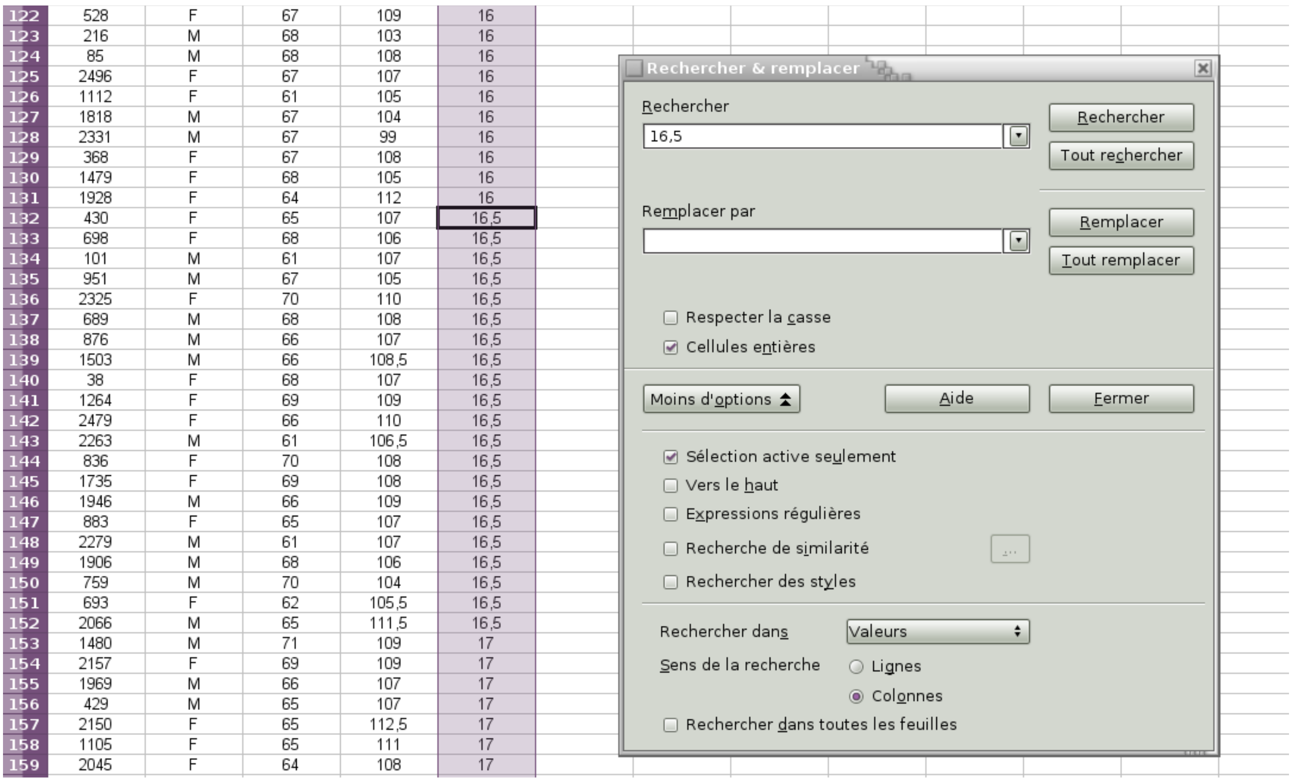
On copie la colonne des données dans un fichier du traitement texte et on convertit le tableau en texte, ou encore, avec openoffice, on utilise collage spécial – texte non formaté. On remplace les virgules par un 0 (nécessaire dans openoffice ; la nécessité de cette étape n'a pas été vérifiée pour word). Pour compter les occurrences de « 19 », on remplace dans le fichier 19 par $ en n'oubliant pas de cocher la case « mots entiers uniquement » ; pour compter les occurrences de 19,5, on remplace dans le fichier 1905 par $; etc.

Le logiciel donne alors le nombre de remplacements effectués : 260 ici. (On notera que l'on peut remplacer 19 par 19 ; le logiciel compte sans modifier le fichier mais cela ne permet pas de vérifier qu'on n'a pas fait une erreur de manipulation...) En faisant cela pour les valeurs de la séries comprises entre 13 et 35, on obtient le tableau des effectifs.

Une autre technique, utilisant le tableur, consiste à repérer les rangs des premières occurrences de chaque valeur de la série en utilisant la fonction rechercher :



44	2888	M	69	102	15
45	2751	F	68	106	15
46	2213	F	69	105	15
47	1830	F	63	115	15,5
48	1903	M	65	109	15,5
49	610	M	62	103	15,5
50	118	F	65	101	15,5
51	711	F	70	106	15,5
52	694	F	67	104	15,5
53	340	M	67	109	15,5
54	343	M	66	111,5	15,5
55	1527	F	64	97	16
56	1073	F	66	103	16
57	2151	M	66	104	16
58	1052	M	70	112	16
59	1565	F	70	107,5	16
60	1366	F	70	107	16
61	1008	F	70	116	16
62	2758	F	66	107	16
63	2820	F	65	105	16
64	972	M	64	108	16
65	1762	M	67	107	16
66	2244	F	68	108	16
67	493	M	70	108,5	16
68	2138	F	66	105	16
69	2172	M	68	104	16
70	49	M	66	108	16
71	2533	M	70	107	16
72	1490	F	66	105	16
73	2046	F	62	107	16
74	1591	F	66	104,5	16
75	411	F	67	110	16
76	2058	M	62	99,5	16
77	2706	F	70	106,5	16
78	1612	M	66	101	16
79	1609	F	67	110	16
80	924	M	63	106	16



122	528	F	67	109	16
123	216	M	68	103	16
124	85	M	68	108	16
125	2496	F	67	107	16
126	1112	F	61	105	16
127	1818	M	67	104	16
128	2331	M	67	99	16
129	368	F	67	108	16
130	1479	F	68	105	16
131	1928	F	64	112	16
132	430	F	65	107	16,5
133	698	F	68	106	16,5
134	101	M	61	107	16,5
135	951	M	67	105	16,5
136	2325	F	70	110	16,5
137	689	M	68	108	16,5
138	876	M	66	107	16,5
139	1503	M	66	108,5	16,5
140	38	F	68	107	16,5
141	1264	F	69	109	16,5
142	2479	F	66	110	16,5
143	2263	M	61	106,5	16,5
144	836	F	70	108	16,5
145	1735	F	69	108	16,5
146	1946	M	66	109	16,5
147	883	F	65	107	16,5
148	2279	M	61	107	16,5
149	1906	M	68	106	16,5
150	759	M	70	104	16,5
151	693	F	62	105,5	16,5
152	2066	M	65	111,5	16,5
153	1480	M	71	109	17
154	2157	F	69	109	17
155	1969	M	66	107	17
156	429	M	65	107	17
157	2150	F	65	112,5	17
158	1105	F	65	111	17
159	2045	F	64	108	17

On obtient par exemple ici que le premier rang de 16 est 55, le premier rang de 16,5 est 132, le premier rang de 17 est 153. On a donc 132-55 cellules contenant 16 et 153-132 cellules contenant 16,5.

En utilisant l'une ou l'autre technique, on obtient un tableau des effectifs comme le tableau ci-dessous.

poids	rangs	effectifs
13	2	4
14	6	5
15	11	36
15,5	47	8
16	55	77
16,5	132	21
17	153	132
17,5	285	46
18	331	212
18,5	543	46
19	589	260
19,5	849	55
20	904	313
20,5	1217	44
21	1261	217
21,5	1478	46
22	1524	198
22,5	1722	26
23	1748	118
23,5	1866	22
24	1888	82
24,5	1970	12
25	1982	61
25,5	2043	3
26	2046	26
26,5	2072	5
27	2077	19
27,5	2096	3
28	2099	9
28,5	2108	2
29	2110	15
30	2125	7
31	2132	2
32	2134	4
33	2138	1
35	2139	2
	2141	
		2139

Commentaires : 1. en utilisant la deuxième technique, on remarque une valeur aberrante, 17,2 que l'on peut corriger en 17,5.

2. examen collectif du commentaire suivant :

Le tableau des effectifs paraît un peu long à remplir « en comptant les valeurs » car les données sont nombreuses. Le regroupement par classe pourrait aider, mais il y aurait quand même de lourds comptages. Une grosse partie de la séance serait utilisée pour le comptage, ce qui est dommage étant donné que les tableurs permettent, moyennant l'utilisation de fonctions plus performantes, de le faire vite.
Ceci semble néanmoins intéressant car cela permet de visualiser les données sur un graphique et de parler de fréquences cumulées.
Il semblerait alors préférable de diminuer le nombre de données, afin d'éviter les pertes de temps et l'utilisation de fonctions « compliquées ». Cela permettrait, après tri, de dresser le tableau des effectifs (par comptage, sans trop de perte de temps), de tracer un diagramme en bâtons, et de calculer les fréquences cumulées pour répondre aux questions.

On a mis en évidence que la position à propos de la lourdeur du comptage dépend de l'avancée dans l'étude de la statistique d'une part, de la manière d'organiser le comptage d'autre part : si la classe se répartit le tableau, le temps n'est plus un problème...
La diminution du nombre des données doit être maniée avec précaution : il est intéressant de s'affronter à beaucoup de données notamment pour développer des techniques utilisant le tableur.

On peut ensuite mettre en œuvre la technique employée par une bonne partie des études : utiliser les fréquences et ou les quartiles. (voir le fichier excel).

La plupart des études mobilisent également la moyenne généralement en lien avec certains des indicateurs précédents. Par exemple :

Technique :

1) Calculer le poids moyen de ces enfants.
2) Comparer 19 kg à ce poids moyen. Pour cela, on calcule le pourcentage d'enfants de moins de 19 kg.
3) On fait de même avec 21,5 kg et on calcule le pourcentage d'enfants de plus de 21,5 kg.

Observations :

On observe que 39,7% des enfants de 5 ans ont un poids inférieur à 19 kg et 28,9% des enfants de 5 ans ont un poids supérieur à 21,5 kg.

Conclusion :

On peut donc si on se fie uniquement à la moyenne dire qu'un enfant de 5 ans pesant moins de 19 kg est trop maigre et qu'un enfant de 5 ans pesant plus de 21,5 kg est trop gros.

Question 1:

On regarde combien d'enfants ont un poids inférieur à 19 kg : 42,15%.

Conclusion :

L'enfant a un poids normal.

Question 2 :

En comparant au tableau des effectifs cumulés croissant on constate que 71,12% des enfants ont un poids inférieur à 21,5 kg. On aurait tendance à penser que l'enfant de 21,5 kg a de l'embonpoint.
Nous avons donc calculé le poids moyen d'un enfant de 5 ans : 20,26 kg.
Conclusion : l'enfant a un poids normal.

Remarque générale : on n'a pas tenu compte de la taille des enfants (un enfant de petite taille de 21,5 kg peut être gros alors qu'un enfant de grande taille de 21,5kg peut être maigre).
Pour plus de précision, on aurait pu comparer les indices de masse corporelle.

Certains ont distingué suivant le genre fille et garçon, ou encore ont envisagé de regarder la taille :

On veut calculer la fréquence des filles qui pèsent au moins 21,5 kg. Pour cela on commence par calculer l'effectif correspondant : on trouve en triant par poids la liste des enfants. Puis on divise le nombre d'éléments trouvés par l'effectif total.

On trouve les résultats suivants :

- 28,44 % des filles pèsent au moins 21,5 kg
- 33,36 % des garçons pèsent au moins 21,5 kg

On ne peut donc pas considérer que peser 21,5 kg soit rare pour un enfant de cet âge, qu'il s'agisse d'une fille ou d'un garçon.

- 50 % des filles de 21,5 kg mesurent entre 112 et 117 cm
- 50 % des garçons de 21,5 kg mesurent entre 112 et 116 cm

Il faudrait donc considérer la taille de l'enfant, pour voir si sa taille est anormale au vu de son poids de 21,5 kg.

On peut dans un premier temps calculer la moyenne des garçons et des filles, et voir si l'enfant de 21,5 kg est

au dessus ou au dessous de la moyenne.
On fait quelque chose du type décile et quartile mais sans le dire pour voir où est concentré la majorité des individus. On se rend compte que s'il s'agit d'une fille, elle ne semble pas être "trop" grosse mais un peu au dessus de la médiane.
En regardant de plus les pourcentages, on se rend compte qu'une fille de 5 ans de 21,5kg est un peu plus grosse que la majorité des individus par contre en ce qui concerne les garçons, on peut dire qu'il s'agit d'un poids standard car 67% des individus pèse entre 18 et 23 kg.

Remarque : personne n'a pensé à faire des classes d'âge : par exemple 60 à 65 mois et 66 à 71 mois

Le travail du trinôme L, P et X est à examiner pour la prochaine fois.

3. Évaluation et développement : analyse d'un mémoire professionnel sur les fonctions en classe de seconde

Nous débuterons ici l'examen partiel d'un mémoire professionnel de l'an dernier, rédigé par SB, SEK et DF, sur l'enseignement des fonctions en seconde qui développait une séance dont le support d'AER était le même que la séance que nous avons étudiée dans les séances précédentes du séminaire.

Voici ce que proposent les auteurs de ce mémoire lorsqu'ils présentent la structure de la séance qu'ils ont observée :

> Le premier épisode de durée très courte concerne l'entrée des élèves en classe et leur mise en place. Le deuxième épisode de 45 minutes, consiste en la recherche d'un problème donné/posé dans l'espace ordinaire. Cette activité a pour but d'introduire la notion de fonction.
> Le troisième épisode qui occupe les dix minutes restantes utilise les TICE, plus exactement la calculatrice, pour conjecturer une réponse à la question cherchée et donc, au passage, mettre en place des connaissances sur l'utilisation de la calculatrice. (pp. 14-15)

Partant de l'analyse et de l'évaluation de cette séance en classe de seconde, ils se proposent ainsi, pour développer la dynamique de l'étude qui leur paraît insuffisante dans la séance observée et, en particulier, améliorer le *topos* de l'élève, de mettre en place un PER dont la question génératrice, Q, serait « Comment optimiser une grandeur ? » :

> ... en ce qui concerne la notion de fonction étudiée ici, l'enseignant doit pouvoir montrer aux élèves son utilité en donnant une activité explicitant une de ses raisons d'être (optimiser une grandeur). (p. 30)

Les auteurs vont faire émerger la question Q de la situation problématique suivante :

> Un maître nageur dispose d'un cordon flottant de 160 mètres de longueur. Il veut délimiter une surface de baignade de forme rectangulaire. Comment peut-il disposer le cordon ? (p. 40)

Le développement proposé prend la forme d'un problème et d'un « guide de recherche du problème » − en fait, une suite de questions cruciales permettant d'aboutir à la solution −, assorti d'un « compte rendu fictif » que nous étudierons collectivement et que nous reproduisons ci-après.

On trouvera sans commentaires dans l'encadré ci-dessous les traces écrites des propositions effectuées par les participants. Nous poursuivrons ce travail dans les prochaines séances.

Points positifs, points négatifs de l'organisation de l'étude proposée

Points positifs

Énoncé clair et simple ; suffisamment ouvert pour que les questions puissent venir des élèves.

Les calculs sont simples et ne viendront pas perturber le travail des élèves.

Le topos professeur élève est bien réparti ; le niveau de l'activité semble bien adapté au niveau de la classe.

Points négatifs

Il manque du calcul des images à la fin de la première partie, pour avoir au moins une idée du « 40 », qui n'est ici trouvé que dans la deuxième partie.

Les élèves « sentent » les notions mais la rigueur mathématique n'émerge pas des élèves.

Il y a beaucoup de pièges (est-ce qu'on met la plage ? etc.) qui retardent l'arrivée du cœur de l'étude, soit la mise en équation.

Les systèmes ; ça croise trop de notions, et compliquées.

Il y a beaucoup d'élèves qui auraient du mal à sentir qu'on parle de fonction ; c'est trop compliqué pour aborder la notion de fonction ; adapté à maximum et minimum.

Extrait du TER étudié

Comme nous l'avons précisé précédemment, nous allons partir d'un PER qui permettrait à la fois d'introduire la notion de fonction et de travailler la notion d'extremum.
Voici l'activité qui permettrait alors ce travail :

> Un maître nageur dispose d'un cordon flottant de 160 m de longueur.
> Il veut délimiter une surface de baignade de forme rectangulaire.
> Comment peut-il disposer le cordon ?

Guide de recherche du problème :

Question cruciale n°1 : ''Quelles sont les contraintes qui s'imposent au maître nageur ?''.
Cette première question aide le processus de dévolution à se dérouler.
Question cruciale n°2 : « Est-on capable de trouver des rectangles correspondant à des surfaces de baignade possibles ? »
Question cruciale n°3 : « Parmi les propositions précédentes comment le maitre nageur va-t-il alors choisir de poser le cordon ? »
Question cruciale n°4 : Quelle est l'aire des deux rectangles au tableau ?
Question cruciale n°5 :de quoi dépend l'aire?
Question cruciale n°6 : comment pourrait-on faire pour trouver la meilleure proposition ?
Question cruciale n°7 : ' comment mettre en équation les données du problème?
Question cruciale n°8 : quelles sont les technique de résolution de système que l'on connait?
Question cruciale n°9: ''comment pourrait-on faire pour trouver le maximum''
Question cruciale n°10: Quelle pourrait être l'autre technique?

Scénario de la séance proposée

Entrée des élèves dans la classe. P distribue la feuille d'activité en donnant de instructions sur la place dans le cahier.
P : « Nous allons lire l'énoncé avant de commencer le travail. Qui veut lire? »

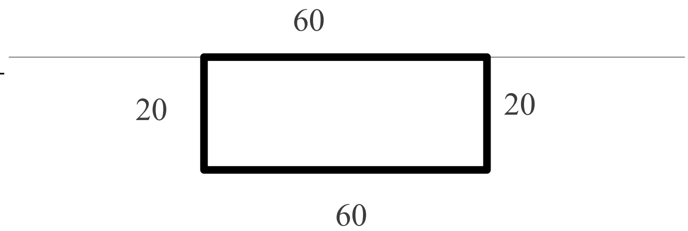
E : « Moi, je veux bien. »
Lecture de l'énoncé.
P demande quel est l'objectif dans cette activité.
Un élève répond : « Trouver comment poser le cordon. »
P acquiesce mais voudrait que l'élève aille un peu plus loin dans sa réponse et demande :

<u>Question cruciale n°1 : "Quelles sont les contraintes qui s'imposent au maitre nageur?"</u>

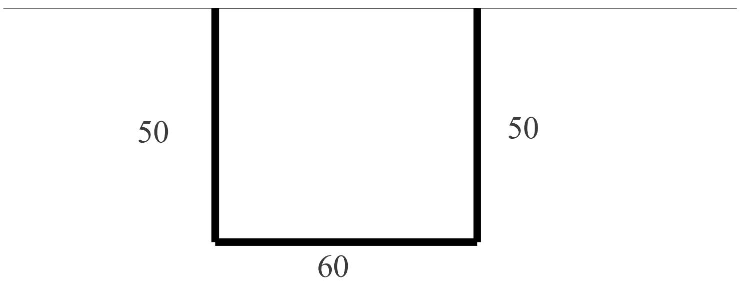
E : le cordon mesure 160 m de longueur, et on peut le disposer de plusieurs manières possibles.
E' : oui mais il faut aussi que la surface délimitée soit de forme rectangulaire.
P : d'accord, mais considérons en plus de tout ça que c'est un jour d'été et qu'il y a beaucoup de personnes sur la plage.

<u>Question cruciale n°2 : "Est on capable de trouver des rectangles correspondants à des surfaces de baignades possibles?"</u>

Un élève est envoyé au tableau et propose le schéma ci-contre :



E : On est bien dans les conditions fixées puisque la longueur de ce cordon est de 160m.
E' : mais madame ça sert à rien de mettre du cordon devant, on en gaspille pour rien puisqu'il y a déjà le bord de la plage pour délimiter.
E'': ben oui on perd de la place pour nager
P : E' va nous faire une autre illustration



E'' : Mais madame on peut trouver autre chose
P : et bien que proposes-tu ?
E'' : moi j'ai fait un rectangle de largeur 20 et de longueur 120, et ça donne 20 + 120 + 20 = 160

Bilan : Rectangle 1   largeur = 50 m   longueur = 60 m
Rectangle 2   largeur = 20 m   longueur = 120 m

<u>Question cruciale n°3 : « Parmi les propositions précédentes comment le maitre nageur va-t-il alors choisir de poser le cordon ? »</u>

E : Comme il y a beaucoup de monde, on prend celle où il y a le plus de place pour nager.
E' : mais c'est le même cordon toutes les surfaces de baignade qu'on fera auront la même aire.
E'' : mais non
P : On a qu'a vérifier avec les deux propositions qui sont au tableau.

<u>Question cruciale n°4 : quelle est l'aire des deux rectangles au tableau ?</u>

Un élève va au tableau pour rédiger la réponse :
rectangle 1 : 50 x 60 = 3000   l'aire est de 3000 m²
rectangle 2 : 120 x 20 =2400   l'aire est de 2400 m²

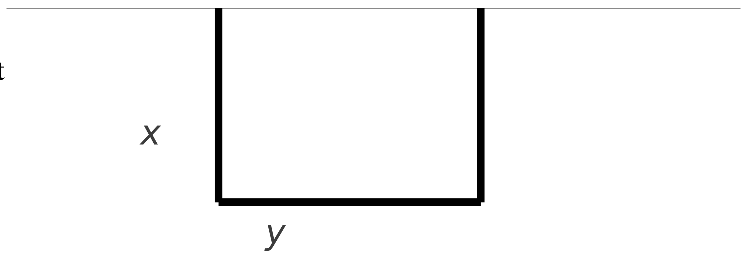
E : donc même si on a le même cordon, la surface de baignade qu'on délimite n'est pas forcément la même.
Bilan : L'aire du rectangle 1 est de 3000 m² et celle du rectangle 2 est de 2400 m²
L'aire varie.

<u>Question cruciale n°5 : de quoi dépend l'aire ?</u>

E : de la largeur et la longueur du rectangle
P : oui, et alors le maitre nageur on lui conseille quelle proposition ?
E : ben la première parce que l'aire est plus grande.
P : et on peut trouver mieux, c'est à dire un plus grande surface de baignade avec le même cordon?
E : ben surement

<u>Question cruciale n°6 : comment on pourrait faire pour trouver la meilleure proposition?</u>

E :On calcule dans le cas général.
E : comme l'aire dépend de la largeur et de la longueur, on pose x la largeur du rectangle et y sa longueur



Bilan : Posons x la largeur du rectangle et y sa longueur.

<u>Question cruciale n°7 : ' comment mettre en équation les données du problème?</u>

E : On a l'aire du rectangle qui vaut xy.
P : oui... et c'est tout ce qu'on sait ?
E : et non on sait aussi que le périmètre c'est 160 donc on a aussi $2x + 2y = 160$
E' : ah oui c'est vrai
P : alors c'est bon vous êtes tous d'accord??
E : mais devant il n'y a pas de cordon donc normalement on a $2x + y = 160$
P : les autres...?
E' : ah ben oui

Bilan : $\begin{cases} A = xy \\ 2x + y = 160 \end{cases}$ *avec x la largeur et y la longueur*

P : Qu'est-ce qu'on peut faire avec ça?
E : on a un système d'équations

<u>Question cruciale n°8 : quelles sont les méthodes de résolution de système d'équations que l'on connait ?</u>

E : Ben par substitution
E' : par combinaison
P : et là comment est-ce qu'on pourrait faire pour résoudre le système?
E : par substitution parce que dans la deuxième équation on peut isoler y facilement.
P : essayez de le faire...
Un élève est envoyé au tableau et résout le système

Bilan : $\begin{cases} A = xy \\ 2x + y = 160 \end{cases}$ $\begin{cases} A = xy \\ y = 160 - 2x \end{cases}$ $\begin{cases} A = x(160 - 2x) \\ y = 160 - 2x \end{cases}$ $\begin{cases} A = 160x - 2x^2 \\ y = 160 - 2x \end{cases}$

P : tout à l'heure on a dit que l'aire dépendait de la largeur et de la longueur. Qu'est ce qu'on peut dire maintenant ?
E : l'aire ne dépend que de x.
P : c'est à dire ?
E : l'aire ne dépend que de la largeur
P : oui on a écrit l'aire en fonction de x.

Bilan : On dit ainsi qu'on a définit une fonction, c'est à dire un procédé qui à x ,la largeur du rectangle, associe l'aire de ce rectangle. On note pour montrer que l'aire dépend de x :

$$A(x) = 160x - 2x^2$$

P : quelles sont les valeurs que x peut prendre ?
E : x est compris entre 0 et 160
P : Je vous propose alors de représenter la situation où $x = 90$ m.
E : Mais madame ça ne marche pas ce que vous nous demandez. 90 + 90 = 180 on a déjà dépassé les 160 m du cordon.
P : C'est vous qui avez dit que x était compris entre 0 et 160. A votre avis pourquoi ça n'est pas possible ?
E : Ah ! C'est parce que dans notre rectangle on a deux largeurs de x mètres. Donc on a $2x \leq 160$ et par conséquent $x \leq 80$.
P : Et alors quelles sont les valeurs que peut prendre x ?
E : entre 0 et 80 mètres.
P : Et sous forme d'intervalle ça donne?
E : x appartient à [0;80]
P : On dit alors que [0 ; 80] est le domaine de définition de la fonction A

Bilan : La fonction A est définie sur l'intervalle [0;80]

P : quelle est l'aire de la surface délimité si on prend $x = 35$ m ?
E : ben si $x = 35$ alors on a $y = 160 - 2 \times 35 = 90$
et donc l'aire vaut $35 \times 90 = 3150$ m²
P : oui, c'est pas faut mais là on a calculé l'aire en deux étape y'a pas plus rapide?
E : on a calculé l'aire en fonction de x , on a plus qu'à remplacer x par 35 dans la formule de l'aire
$A(35) = 160 \times 35 - 2 \times 35^2 = 5600 - 2450 = 3150$
P : « Tout le monde est d'accord avec ses calculs? OK. Est-ce quelqu'un sait comment est-ce qu'on appelle le nombre calculé celui qu'on obtient à la fin ? Qu'est-ce qu'il représente pour $x = 35$? »
E : « C'est le résultat. »
P : « Oui mais vous avez vu l'année dernière qu'on lui donnait un nom particulier »
E : « C'est l'image de x . »
P : « Ce terme vous dit quelque chose, c'est bon pour tout le monde? »
E : « madame y'avait aussi l'antécédent ? »
P : « Oui, et que signifie ce mot ? »
E : « C'est l'inverse de l'image. C'est quand on connaît le résultat et qu'on cherche le x pour que ça marche.»
P : « Effectivement, par exemple quel est l'antécédent de 3000? c'est la valeur de x pour laquelle l'aire vaut 3000 m², c'est donc ? »
E : « 50, c'est facile ça. »
P demande alors aux élèves d'essayer de trouver une définition pour les mots "image" et "antécédent". Ces derniers ont réussi à satisfaire la question de P.

Bilan : L'image par une fonction f d'un élément x est le réel qui lui est associé par cette fonction f.
Les antécédents par la fonction f du nombre réel y , sont les éléments dont y est l'image par f.

P : « Maintenant qu'on a revu toutes ces notions, on va pouvoir les écrire dans la partie synthèse. »
E : mais madame on n'a pas trouvé comment le maitre nageur devait placer son cordon pour avoir la plus

grande surface de baignade.
P : tu as raison, mais nous reprendrons cette activité plus tard.

On arrête ici la première partie du PER.

On suppose qu'entre les deux parties, les moments d'institutionnalisation et de travail (concernant les notions vues précédemment) ont été travaillés.
De plus, les élèves ont appris à manipuler la calculatrice graphique lors de l'étude des notions de image et antécédent.

P : « Reprenons l'activité que je vous ai distribuée au début du chapitre. Qui peut nous rappeler de quoi il s'agissait et qu'est-ce qu'on y a travaillé ? »
E : « Il y avait un maitre nageur qui voulait faire une aire de baignade la plus grande possible. »
P : « Sur quoi avait-on alors travaillé ? »
E : « On a trouvé la fonction qui représentait l'aire du rectangle. »
P : « C'était quoi cette fonction ? »
E ; « $A(x) = 160x - 2x^2$ »
P : « Tout le monde s'en souvient ? Je vous laisse deux minutes pour tout relire »
Les élèves s'exécutent.
P : « On avait aussi calculer des valeurs de l'aire pour deux largeurs différentes. »
E : « Oui on a trouvé $A(35) = 3150$ et $A(50) = 3000$ »
P : « Vous allez refaire ce calcul pour la valeur $x = 70$ m »
P écrit sous la dictée d'un élève : $A(70) = 160 \times 70 - 2 \times 70^2 = 11200 - 2 \times 4900 = 11200 - 9800 = 1400$
P : Pouvez vous me rappeler l'objectif de l'activité ? »
E : « Trouver l'aire la plus grande. »

<u>Question cruciale n°9: "comment pourrait-on faire pour trouver le maximum"</u>

P : « comment va-t-on s'y prendre ? Est-ce qu'on va calculer l'aire pour toutes les valeurs possibles de x ? »
E : non il y a trop de valeurs pour x, ce sera trop long.
E' : « On n'a qu'à faire la courbe de la fonction, et on lit sur le graphique. »
P : « C'est une solution, tu proposes que l'on utilise la représentation graphique de la fonction qu'on a obtenue pour trouver la valeur maximale. Et comment la lirais-tu sur la représentation graphique ? »
E : « On regarde la valeur la plus haute. »
P demande donc aux élèves de représenter la fonction sur leur calculatrice.
Très vite ils ont entré la fonction et ont obtenu la courbe représentative de A .
Ils conjecturent que la valeur maximale de l'aire est 3200 m² et qu'elle est atteinte pour $x = 40$m.

Bilan : pour trouver le maximum d'une fonction f on peut regarder la représentation graphique . On dira qu'une valeur M est maximale si pour tout x de l'ensemble de définition on a $f(x)$ est inférieur ou égal à M. Ici, il semble que l'aire soit maximale lorsque $x = 40$ m et qu'elle vaut alors 3200 m².

P propose alors de chercher une autre technique pour trouver cette aire maximale.

<u>Question cruciale n°10 Quelle pourrait être l'autre technique?</u>

E : « On peut essayer plusieurs calculs comme on l'a fait pour 20, 50 et 70. »
P : « C'est une possibilité mais est-ce qu'elle est efficace ? »
E : « Non moi je pense pas parce que c'est long et en plus si on fait les calculs pour 10, 30, 40 et 60 ça suffit pas parce qu'il y a aussi 1, 2 , 3, ... y'a trop de nombres. »
P : « Et bien il faut donc trouver un moyen pour faire plusieurs calculs mais en nous fatiguant le moins possible, est-ce que vous connaissez des outils qui nous permettraient de le faire ? »
E : « On peut utiliser le tableau de valeurs de la calculatrice. »

Les élèves s'exécutent. Ils regardent dans la fenêtre TABLE, les valeurs de la fonction pour les différents x aux alentours de 40 (du fait de leur conjecture précédente).
Les élèves constatent alors que pour x = 40m l'aire vaut 3200 et que les valeurs de $A(x)$ sont symétriques par rapport à 3200. Ils pensent donc que l'aire est maximale pour x = 40 m et qu'elle vaut alors 3200 m².

Bilan : On constate que les valeurs de A augmentent puis diminuent avec un maximum pour l'aire lorsque x = 40 m. De plus les valeurs de $A(x)$ sont symétriques par rapport à la valeur 3200m² obtenue pour x = 40m.

<u>*Synthèse visée :*</u>

Chapitre N : Notion de fonction

I. Définition

D est une partie de l'ensemble IR des réels.
Définir une fonction sur D, c'est associer à chaque réel x de D, un réel et un seul, appelé l'image de x .
D est appelé l'ensemble (ou domaine) de définition de la fonction.

<u>Notations</u> :

- Au lieu d'écrire « *f* est la fonction qui à *x* associe $f(x)$ », on peut écrire « $f : x \rightarrow f(x)$ » ou « $y = f(x)$ » .
- L'image d'un réel x de D par la fonction *f* est notée $f(x)$ (lire : « *f* de x »).

On dit que y est l'image de x et que x est un antécédent de x .

<u>Exemple</u> : *f* est la fonction définie sur l'intervalle [0 ; +∞[par $f(x) = x - 2x$.
L'ensemble de définition de cette fonction est [0 ; +∞[et pour calculer l'image d'un nombre de cet ensemble, on procède ainsi :

- image de 0 : $f(0) = 0 - 2 \times 0 = 0$
- image de 74 : $f(74) = 74 - 2 \times 74 = 74 - 148 = -74$

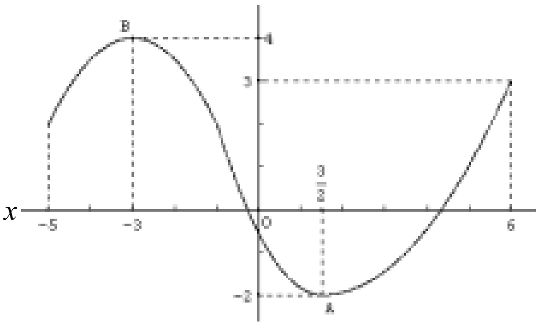
(...)

III) Maximum et minimum d'une fonction

f est une fonction, I un intervalle inclus dans son domaine de définition et *a* un réel de I.

- Dire que $f(a)$ est le **minimum** de *f* sur I signifie que $f(a)$ est la plus petite valeur de la fonction : pour tout réel x de I, $f(x) \geq f(a)$.
- Dire que $f(a)$ est le **maximum** de *f* sur I signifie que $f(a)$ est la plus grande valeur de la fonction : pour tout réel x de I, $f(x) \leq f(a)$.

Exemple : Le minimum sur l'intervalle [-5 ; 6] de la fonction *f* représentée ci-contre est -2. Il est obtenu lorsque $x = \frac{3}{2}$. En effet, A est le point le plus « bas » de la courbe.
Le maximum sur l'intervalle [-5 ; 6] est 4. Il est obtenu lorsque x = -3. En effet, B est le point le plus « haut » de la courbe.



3. <u>Analyse et évaluation de la séance proposée</u>

L'étude menée sur la séance observée, nous a conduit à changer le problème posé initialement. En effet, la résolution de l'activité de départ se basait beaucoup sur l'aspect géométrique, notamment avec le théorème de Thalès utilisé plusieurs fois. Donc nous avons choisit une activité où la fonction était plus facile et plus rapide à trouver.

La structure de la séance à elle aussi été modifiée. Le PER offre ainsi la possibilité d'utiliser une même

activité pour travailler plusieurs notions (ici les fonctions et les extremum). C'est pourquoi le travail effectué avec la classe sur l'activité se fait sur deux séances séparées dans le temps.
L'organisation mathématique quant à elle est conservée. Il est toujours question d'optimiser une grandeur dans un problème de vie courante. Mais sa résolution avec la classe a été modifiée.

• Organisation mathématique :

Type de tâches principal : on cherche à placer un cordon flottant de manière à obtenir une surface de baignade de forme rectangulaire
Au cours de la séance deux sous types de tâches apparaissent :
T1 : donner l'expression de l'aire du « rectangle » obtenu
T2 : trouver la position du cordon délimitant la plus grande surface de baignade.

Le type de tâches principal relève là encore du type de tâches plus général : Optimiser une situation du monde que l'on peut modéliser grâce à une fonction à valeurs numériques.

Techniques :

• Modélisation mathématique du problème.

✔ Phase graphique : schématiser la situation (non donnée dans la séance proposée contrairement à la séance observée)

✔ Phase expérimentale sur des valeurs données par les élèves

✔ Phase algébrique : introduction de deux variables x et y qui seront la largeur et la longueur du rectangle délimité par le cordon, puis expression de l'aire grâce à la formule et aux variables précédentes, enfin résolution d'un système

✔ Phase analytique : utilisation de la calculatrice et du tableur afin de déterminer le maximum de la fonction obtenue.

Technologie :

- Définition d'une fonction, ensemble de définition, image et antécédent.
- Propriété caractéristique du maximum d'une fonction.

Organisation didactique :

P décide d'utiliser un PER concernant les fonctions pour introduire celles-ci et pour étudier la notion de maximum.
On voit là un changement important, par rapport à la séance observée, en ce qui concerne les dispositifs didactiques utilisés.
P amène la notion de fonction au travers d'une situation concrète.
La dévolution se fait par une lecture et une explication de l'énoncé.

Pendant le moment d'exploration, les élèves sont à l'écoute, ils cherchent et proposent des solutions. P utilise des questions cruciales qui permettent de faire avancer le groupe dans la résolution du problème.

Lors des quelques moments « d'institutionnalisation » (pas dans la synthèse mais dans l'AER) P attend que ce soit les élèves qui donnent les définitions des notions image et antécédent. Elle ne propose rien à priori et se base sur les réponses des élèves.

L'énoncé ayant été bien compris dès le départ et l'objectif étant resté à l'esprit de chacun, les élèves ont bien participé et ont fourni un réel travail de recherche.
On notera donc un topos des élèves assez important ; ceci est accentué par la recherche faite à l'aide des ordinateurs. Ils ont travaillé en binôme pour trouver un moyen de chercher la solution du problème.

Lors de la première partie, les outils nécessaires à la recherche du problème étaient à leur disposition : les élèves devaient connaître la formule d'aire d'un rectangle et savoir calculer avec une expression littérale.

Lors de la deuxième partie, P a fait en sorte de faire rappeler aux élèves ce qui a été fait auparavant sur l'activité afin d'avoir les ressources adéquates au problème et ce pour tout le monde.

Les bilans d'AER ont permis aux élèves ainsi qu'à P, d'avoir des traces écrites de l'activité (celle-ci ayant été faite en deux parties).

Les points améliorés par cette nouvelle activité :

- *La mise en avant des raisons d'être de l'introduction des fonctions : présentation en tant qu'outil d'optimisation de grandeur.*
- *L'activité est plus « simple » et laisse donc plus de topos aux élèves.*
- *Les questions cruciales de l'AER et les bilans permettront de dynamiser la recherche des élèves et d'entretenir un milieu favorable.*

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 14 : mardi 12 janvier 2010

Programme de la séance. 0. Questionnaire d'évaluation // 1. Recherches dans les archives // 2. Une AER de statistique descriptive

Compte tenu de contraintes indépendantes de notre volonté, le séminaire aura, cette semaine, la forme de travaux encadrés.

0. Questionnaire d'évaluation

a) Chaque participant remplit individuellement la fiche qui lui a été distribuée et qui comporte les quatre questions suivantes :

Question 1a. Indiquez *un* aspect de la formation proposée qui vous paraît plutôt *positif*.

Question 1b. Indiquez *un* aspect de la formation proposée qui vous paraît actuellement plutôt *négatif*.

Question 2a. Indiquez *un* aspect de votre *travail personnel* dans le cadre de la formation proposée qui vous paraît plutôt *positif*.

Question 2b. Indiquez *un* aspect de votre *travail personnel* dans le cadre de la formation proposée qui vous paraît actuellement plutôt *négatif*.

b) Les formulations recueillies seront mises en ligne le plus rapidement possible. Elles feront l'objet d'un commentaire lors d'une journée de formation ultérieure, dans le cadre du séminaire ainsi qu'en GFP.

1. Recherches dans les archives

Chaque trinôme est chargé de recherches sur une question (voir la répartition ci-après). Pour le thème enjeu de la recherche, il a à ***constituer un fichier comportant des extraits des archives du séminaire jugés pertinents***. Ce fichier est à envoyer à l'issue de la séance à m.artaud@aix-mrs.iufm.fr. Il sera déposé sur Espar dans la soirée.

Trois de ces recherches seront exposées par l'un des trinômes désignés lors de la séance de la semaine prochaine. Les trois recherches restantes seront exposées lors de séances ultérieures.

Il y a six questions à l'étude, chaque question devant être étudiée par 3 à 4 trinômes. Ces trinômes peuvent se constituer en « cartel de recherche » et s'organiser pour effectuer les recherches demandées. Ceux qui n'ont pas d'ordinateurs portables peuvent se rendre dans la salle informatique 59 (5^{e} étage ; clé à demander à Michel Jullien).

1.1.

Que nous disent les *Archives du Séminaire* quant à la ***réalisation du moment d'institutionnalisation et de la synthèse*** ?

• Le compte rendu de la recherche (soit l'exposé) s'efforcera de présenter (en les choisissant adéquatement) des matériaux pour une réponse aux questions de la semaine ci-après éventuellement présents dans les *Archives*.

1. Quand on fait la synthèse après une activité, on réécrit les propriétés vues en activité. Les élèves ont une impression de répétition, ils se plaignent "on l'a déjà écrit ça." Comment puis-je éviter cela ? Dois-je leur dire que l'on apprend à force de répétition ou est-ce que je ne dois pas leur faire écrire la propriété en activité ? (EF, 7)

2.Est-ce que l'on peut institutionnaliser certaines choses uniquement en exercices s'il est écrit dans le programme que celles-ci ne doivent pas faire l'objet d'un cours à part entière ? Et est-ce que tout ce qui figure dans le programme doit être mis dans la partie synthèse ou certains points peuvent n'être vus qu'au cours d'exercices ? (EF, 9)

3. Dans le chapitre « proportionnalité », il y a de nombreux exemples basés sur des tableaux. Est-il judicieux de donner sur polycopié le tableau en partie complété (pour la partie synthèse) ? (CS, 13)

4. Peut-on travailler l'organisation mathématique à l'aide du dispositif « exercices » avant d'institutionnaliser les techniques, en se basant uniquement sur les bilans d'étape des AER (informels) ? (LA, 13)

Le compte rendu de la recherche sera exposé lors d'une séance ultérieure (la date sera fixée le 19 janvier 2010).

1.2.

Que nous disent les *Archives du Séminaire* quant à ***l'utilisation des TICE pour enseigner et au C2i2e*** ?

• Le compte rendu de la recherche (soit l'exposé) s'efforcera de présenter (en les choisissant adéquatement) des matériaux pour une réponse aux questions de la semaine ci-après éventuellement présents dans les *Archives*.

1. Dans mon établissement le COTICE a fait un planning pour la validation des items du B2i. Dans ce planning, les professeurs de mathématiques ne sont pas sensés valider d'items aux élèves de 5^{e}. Dois-je ne pas tenir compte du planning pour la validation du C2i2e ? (GA, 13)

2.Question sur la validation du C2i2e. Certains énoncés d'items à valider sont clairs, d'autres moins. Serait-il possible de savoir ce que l'on attend de nous pour valider les différents items ? Que sommes-nous censé mettre dans notre portfolio pour cela ? Pour valider un item nous sommes censé faire une demande de validation. Quel genre de preuves devons-nous fournir : copies d'écran ? (CP, 13)

3. Quelles doivent être les traces écrites des élèves lors d'une séance d'exercices effectués au tableau en salle informatique ? (Hormis la rédaction de la solution, est-ce que les élèves doivent noter les fonctions utilisées, le déroulement global des opérations sur le tableau,... ?) (NC, 12)

4. Quels sont, parmi les thèmes de 5^e, ceux qui sont le plus propices à l'organisation d'une séance informatique ? (JB, 13)

5. Je vais faire une séance informatique avec mes élèves afin de définir la notion de sinus. Nous allons utiliser pour cela le logiciel Geoplan. Afin de ne pas être débordée par les questions du type "Comment on fait pour créer trois points libres ?", j'ai détaillé quelques commandes. Est-ce une bonne idée afin de mieux gérer la classe ? (AB, 13)

6. En tant que professeur de mathématiques de quatrième, dois-je valider des items du B2i ? (AM, 9)

Le compte rendu de la recherche sera exposé lors de la séance du 19 janvier 2010.

1.3.

Que nous disent les *Archives du Séminaire* quant à l'***effet des attentes du professeur à l'égard des élèves, et notamment de l'effet Pygmalion*** ?

• Le compte rendu de la recherche (soit l'exposé) s'efforcera de présenter (en les choisissant adéquatement) des matériaux pour une réponse aux questions de la semaine ci-après éventuellement présents dans les *Archives*.

1. Une élève de la classe est en très grande difficulté. Elle vient m'en faire part. Elle m'explique que malgré le fait qu'elle travaille à la maison, elle ne comprend pas. Elle est en PPRE (1 h par semaine) mais cela ne suffit pas. Que faire ? (CS, 8)

2. Que faire quand un élève qui a des difficultés devient amorphe / insolent lorsqu'on lui demande de passer au tableau ? (Visiblement, il laisse tomber et n'est là que pour ne pas être absent physiquement.) (MAC, 9)

3. Comment inciter une élève à prendre part à la vie de la classe et à participer à l'avancement du cours ? C'est une excellente élève à l'écrit mais en classe sa seule réponse aux interrogations est « je ne sais pas ». (AL, 11)

• Cette recherche est confiée aux trinômes suivants :

Le compte rendu de la recherche sera exposé lors de la séance du 19 janvier 2010.

1.4.

Que nous disent les *Archives du Séminaire* quant à ***l'enseignement de l'algèbre au collège*** ?

• Le compte rendu de la recherche (soit l'exposé) s'efforcera de présenter (en les choisissant adéquatement) des matériaux pour une réponse aux questions de la semaine ci-après éventuellement présents dans les *Archives*.

1. Comment justifier l'intérêt de la mise en équation d'un problème, quand on est « obligé » en même temps de fournir la solution de l'équation ?
Comment ne pas réduire à de simples vérifications le travail sur des exercices d'applications ?
Comment faire comprendre que c'est la façon de trouver une solution qui importe, et non la solution elle-même ?
Contexte : Problème posé en 5^e:
Un paquet de chocolats noirs et blancs pèse 670 g.
Il contient 8 chocolats noirs de plus que de blancs.
Chaque chocolat noir pèse 8,75 g, et chaque blanc 6,25 g.
On note x le nombre inconnu de chocolats blancs.

a) Écrire en fonction de x le poids des chocolats blancs du paquet.
b) Écrire en fonction de x le poids des chocolats noirs du paquet.
c) Montrer que le poids en grammes du paquet est $15x + 70$.
d) Le nombre de chocolats blancs est-il 30 ? 40 ? 50 ?
Réponses de nombreux élèves:
a) $40 \times 6{,}25 = 250$ g
b) $48 \times 8{,}75 = 420$ g
c) $15 \times 40 + 70 = 670$ g
d) 40
Autre exemple : Un triangle a pour angles a, $2a$, 69°. Calculer la valeur de a. Réponse : $a = 37°$ car $37 + 2\times37 + 69 = 180$. Mystère sur la façon de faire… Et que devient l'intérêt de l'exercice ?
Autrement dit, la mise en équation du problème est complètement évacuée. On se contente de vérifier qu'une valeur est solution (ou solution approchée) malgré les modèles de résolution d'exercices types.
J'ai observé le même comportement en seconde :
– au lieu de résoudre une équation, on vérifie qu'un nombre est solution.
– au lieu de démontrer une identité, on la vérifie sur un cas particulier, et un seul. Même en terminale S, la réponse à une question est souvent fournie.
D'autre part, les élèves sont surpris quand on leur dit qu'un problème peut avoir plusieurs solutions, tel que tout simplement: un triangle défini par 3 angles, ou par 2 côtés et un angle, un cercle défini par 2 points…
Pour l'utilité du calcul littéral, un exercice intéressant est de « voir si le carré d'un nombre impair est toujours multiple de 8 plus 1 ».
Y aurait-il un sujet semblable pour la résolution des équations ? (PAR, 12)

Le compte rendu de la recherche sera exposé lors de la séance du 19 janvier 2010.

1.5.

Que nous disent les *Archives du Séminaire* quant à ***l'enseignement du théorème de Pythagore*** ?

• Le compte rendu de la recherche (soit l'exposé) s'efforcera de présenter (en les choisissant adéquatement) des matériaux pour une réponse aux questions de la semaine ci-après éventuellement présents dans les *Archives*.

1. Si on traite le théorème de Pythagore en deux parties, est-il préférable de parler de propriété caractéristique du triangle rectangle dès le début ou bien en conclusion des deux chapitres ? (JA, 11)

2. Existe-t-il une démonstration du théorème de Pythagore au niveau 4[e] n'utilisant pas la double distributivité ? (JA, 10)

3. Comment introduire le théorème de Pythagore en quatrième ? Je n'arrive pas à trouver un problème concret. J'ai du mal à imaginer que le savoir émerge des élèves dans ce chapitre. (AM, 11)

4. Dans le chapitre sur Pythagore, les élèves découvrent actuellement la réciproque du théorème. C'est la contraposée du théorème qui me pose question : faut-il expliquer clairement cette notion aux élèves ? Et de quelle manière ? NB. Le programme dit : « on ne distingue pas le théorème de Pythagore direct de sa réciproque (ni de sa forme contraposée) ». Est-ce possible de ne pas les distinguer au cours de l'enseignement ? (SB, 13)

5. En ce qui concerne la réciproque du théorème de Pythagore, est-il possible de la faire trouver par les élèves grâce à un exercice de français ? Exemple : si le prof est juste alors les élèves le respectent. (KR, 7)

6. En 4[e], lorsqu'on aborde le théorème de Pythagore, peut-on différer la démonstration car en soi elle ne s'inscrit pas dans le moment d'institutionnalisation ni dans le moment technologico-théorique de l'OD ?

J'entends par différer, de la garder par exemple pour un moment de travail dans le chapitre dédié au cosinus et/ou dans le chapitre dédié au calcul littéral (démonstration par les aires). (JBM, 13)

Le compte rendu de la recherche sera exposé lors d'une séance ultérieure (la date sera fixée le 19 janvier 2010).

1.6.

Que nous disent les *Archives du Séminaire* quant à ***l'enseignement de la géométrie dans l'espace*** ?

• Le compte rendu de la recherche (soit l'exposé) s'efforcera de présenter (en les choisissant adéquatement) des matériaux pour une réponse aux questions de la semaine ci-après éventuellement présents dans les *Archives*.

1. Utiliser la perspective cavalière est-il un type de tâches exigible en seconde ? J'en ai parlé en classe, on a fait quelques exercices à ce propos mais je n'ai pas vérifié les acquis lors de l'évaluation. (EO, 11)

2.Je redoutais le chapitre de géométrie dans l'espace mais au final cela a été très positif et a permis d'aborder au passage des points de logique et raisonnement. Notamment la démonstration par l'absurde. Sur ce point j'ai malheureusement perdu la moitié de la classe, dont l'œil vif traduisait sans aucun doute l'incompréhension totale. J'ai notamment eu du mal à illustrer, la figure étant nécessairement absurde (j'ai pris l'exemple : Si une droite est parallèle à une droite d'un plan elle est parallèle au plan). Quel(s) exemple(s), par exemple tirés de situations physiques, me permettraient de donner une illustration plus convaincante ? (JPB, 11)

3. Sur le début de la géométrie dans l'espace, j'ai du mal à mettre en place une praxéologie du fait des nombreuses définitions. Comment mettre en place une praxéologie sur un début de chapitre où les définitions sont nombreuses ? (GBR, 8)

Le compte rendu de la recherche sera exposé lors d'une séance ultérieure (la date sera fixée le 19 janvier 2010).

2. Une AER de statistique (suite)

On reprend ici la question Q étudiée la semaine dernière :

Q : un enfant de 5 ans qui pèse 21,5 kg est-il trop gros pour son âge ?

Chaque trinôme élaborera un guide de questions cruciales destinées à faire émerger une organisation mathématique relative à la statistique pour la classe de 5^{e} ou pour la classe de seconde à partir de la question Q. Ce guide de questions cruciales « justifié » sera envoyé à m.artaud@aix-mrs.iufm.fr.

Pour la classe de 5^{e} : l'OM envisagée prendra appui notamment sur le calcul des effectifs et des fréquences (voir la séance de séminaire précédente), mais aussi sur des représentations graphiques et le regroupement des données en classes d'égale amplitude. On rappelle ci-dessous le contenu des programmes des classes de 6^{e} et de 5^{e}.

Classe de 6^{e} :

1.2. Organisation et représentation de données Représentations usuelles : tableaux.	- Lire, utiliser et interpréter des données à partir d'un tableau. - Lire interpréter et compléter un tableau à double entrée. *- *Organiser des données en choisissant un mode de présentation adapté :* *- tableaux en deux ou plusieurs colonnes* *- tableaux à double entrée.*	Il s'agit d'un premier pas vers la capacité à recueillir des données et à les présenter sous forme de tableau.
Repérage sur un axe	- Lire et compléter une graduation sur une demi-droite graduée, à l'aide d'entiers naturels, de décimaux, de fractions simples 1/2, 1/10, 1/4, 1/5 **ou de quotients (placement exact ou approché).*	Ce travail doit être l'occasion de manier les instruments de tracé et de mesure.
Représentations usuelles : diagrammes en bâtons, **diagrammes circulaires ou demi-circulaires*, graphiques cartésiens	- Lire, utiliser et interpréter des informations à partir d'une représentation graphique simple (diagrammes en bâtons,).	La capacité visée concerne l'aptitude à faire une interprétation globale et qualitative de la représentation étudiée (évolution d'une grandeur en fonction d'une autre). Dès la classe de 6e, l'utilisation de calculatrices et de logiciels permet de familiariser les élèves avec le passage d'un type d'organisation, d'un type de présentation à un autre.

Classe de 5e :

1.4. Représentation et traitement de données Effectifs. **Fréquences.* Classes.	- Calculer des effectifs, *- *Calculer des fréquences.* - Regrouper des données en classes d'égale amplitude.	Les élèves sont entraînés à lire, interpréter et représenter des données en utilisant un vocabulaire adéquat dans des contextes qui leur sont familiers.. Le calcul d'effectifs cumulés n'est pas un attendu. *Les écritures 4/10, 2/5, 0,4, 40 % sont utilisées pour désigner une fréquence : elles permettent d'insister sur les diverses représentations d'un même nombre.
Tableau de données, représentations graphiques de données. [Thèmes de convergence]	- Lire et interpréter des informations à partir d'un tableau, ou d'une représentation graphique (diagrammes divers, histogramme). - Présenter des données sous la forme d'un tableau, les représenter sous la forme d'un diagramme ou d'un histogramme (dans ce cas, les classes sont toujours de même amplitude)..	Le choix de la représentation est lié à la nature de la situation étudiée. L'utilisation d'un tableur permet d'enrichir ce travail en le prolongeant à des situations plus complexes que celles qui peuvent être traitées « à la main ».

On pourra également consulter le document ressources sur « organisation et gestion de données »

Pour la classe de seconde : l'OM envisagée prendra appui notamment sur le calcul des effectifs cumulés et des fréquences cumulées (voir séance de séminaire précédente), mais aussi sur des représentations graphiques.

Programme de la classe de 2de :

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Statistique descriptive, analyse de données Caractéristiques de position et de dispersion • médiane, quartiles ; • moyenne.	• Utiliser un logiciel (par exemple un tableur) ou une calculatrice pour étudier une série statistique. • Passer des effectifs aux fréquences, calculer les caractéristiques d'une série définie par effectifs ou fréquences. • Calculer des effectifs cumulés, des fréquences cumulées. • Représenter une série statistique graphiquement (nuage de points, histogramme, courbe des fréquences cumulées).	L'objectif est de faire réfléchir les élèves sur des données réelles, riches et variées (issues par exemple, d'un fichier mis à disposition par l'INSEE), synthétiser l'information et proposer des représentations pertinentes.

Prochaine séance du séminaire : mardi 19 janvier 2010

D'ici là : travailler les notes du séminaire et poursuivre le travail d'analyse et évaluation du TER sur les fonctions ; pour les trois trinômes concernés, préparer l'exposé de la recherche dans les archives.

On rappelle que le groupe 1 suivra le TD 3 de 17 h 20 à 18 h 50. On demande aux participants de porter leurs ordinateurs portables.

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

La semaine prochaine : ni GFP, ni séminaire. On en profitera notamment pour travailler les notes du séminaire et les TER.
La prochaine séance de séminaire aura lieu le 2 février 2010.

➔ Séance 15 : mardi 19 janvier 2010

Programme de la séance. 0. Questionnaire d'évaluation // 1. Une AER de statistique descriptive // 2. Forum des questions express // 3. Recherches dans les archives

0. Questionnaire d'évaluation

Pour la grande majorité de la promotion, l'entrée dans la problématisation du métier semble effectuée. Quelques questionnaires témoignent d'un évitement de la formation, ou de certaines de ses composantes, qui paraît inquiétant à plusieurs titres. Nous reviendrons sur l'analyse des questionnaires lors de la prochaine séance du séminaire.

1. AER de statistique descriptive

On reprendra ici la fabrication d'une AER de statistique à partir des travaux rendus la semaine dernière. Nous nous situerons en classe de 5^{e} : six propositions ont été rendues qui concernaient ce niveau. Le travail mené ci-dessous concourt à fabriquer des éléments de réponses à la question suivante :

Comment introduire les statistiques en cinquième ? Je comptais partir d'une enquête que les élèves pourraient faire, mais je ne vois pas comment monter une véritable AER à partir de cela. (5^{e} & 4^{e}, 14)

La plupart des travaux proposés ont encore du mal à formuler des questions cruciales, soit des questions qui prennent en charge la dynamique de l'étude du problème posé et qui l'aide à progresser, sans toutefois tomber dans le travers classique en début d'année de fabriquer un énoncé de devoir. Pour l'essentiel, les questions posées sont souvent trop ciblées et précises, ou encore ne prennent pas appui sur le travail déjà effectué.

Examinons d'abord la proposition suivante :

Explication : Nous avons choisi d'élaborer un guide de questions cruciales pour une classe de 5^{e}.
L'activité prévue a été modifiée, on a enlevé certaines données pour alléger le tableau, ce qui permettra à l'élève de créer un tableau à double entrée plus facilement sans avoir à se servir des

fonctions d'Excel car ici l'AER sera faite en classe entière et non sur ordinateur.

1) Comment lire ce document ?
Cette première question sert à trouver à quoi correspond chaque colonne, et quelles sont les unités.
2) Est-il en adéquation avec la question posée ?
Cette question sert à cibler les hypothèses de l'énoncé et à éliminer les données inutiles.
3) Est-ce que le sexe de l'enfant est un paramètre qui entre en jeu dans la réponse ?
4) Que peut-on faire avec le tableau donné, sachant que certaines données ne nous intéressent pas?
Cette question nous sert à éliminer certaines colonnes et certaines lignes.
5) Peut-on faire des groupements de taille ?
On veut donc que les élèves regroupent les enfants par classe de taille .
6) Quelle amplitude pourrions-nous prendre? Garde -t-on la même amplitude ?
7) Quel type de tableau est nécessaire pour réunir les données du poids et des classes de taille ?
Réponse attendue : tableau à double entrée
8) Donner le nombre d'enfants correspondant aux critères de chaque case.
9) Peut-on faire un nouveau tableau avec des pourcentages d'enfants correspondant aux critères de chaque case ?
10) Pouvez-vous interpréter ces derniers résultats ?
11) Comment répondre à la question de l'énoncé ?

Les questions, sans être des questions d'un exercice classique, ne prennent pas encore en compte véritablement la nécessité de l'étude. Supposons que le professeur ait proposé l'énoncé suivant :

Pascale a entendu dans une conversation une mère dire qu'elle trouvait que son enfant de 5 ans, qui pèse 21,5 kg, est gros pour son âge. Intriguée elle cherche à savoir si 21,5 kg, c'est gros pour un enfant de 5 ans et en enquêtant sur Internet, elle trouve le tableau suivant. Peut-il lui fournir des éléments de réponse à sa question ? Si oui, lesquels ?

La première chose à faire, comme le suggèrent les questions précédentes, c'est de s'assurer de la compréhension du tableau, en partant de la question posée. Pour savoir si le tableau est utile pour répondre à la question Q « un enfant de 5 ans qui pèse 21,5 kg est-il gros pour son âge ? », il faut effectivement regarder ce qu'il contient. La première question cruciale posée pourra être ainsi : comment peut-on savoir si le tableau est utile ? On va regarder s'il dit des choses sur ce qui nous intéresse, le poids des enfants de 5 ans. On pourra éventuellement être amené à reformuler la question en « Qu'est-ce qu'il faudrait qu'il contienne pour être utile ? » Puis à préciser : »Est-ce qu'il le contient ? Est-ce qu'il contient des données qui nous permettrait de l'obtenir ? Lesquelles ? » Etc.

Dans les questions prévues, certaines sont manifestement « amenées par le professeur » et pas par les nécessités de l'étude ; par exemple, c'est le cas de la question de la taille (question 5) et du tableau à double entrée (question 7). Bien entendu, la question de la prise en compte de la taille pourra apparaître dans la classe si l'on donne le tableau avec ces données et il faudra le prévoir comme une éventualité mais ça n'est pas un passage obligé du travail.

Examinons maintenant la proposition suivante :

La première question doit les mettre face à leur incapacité à définir précisément et objectivement un critère permettant de classifier l'enfant selon son poids :

1) Qu'est-ce que pour vous un enfant trop gros ?

Ensuite, une deuxième question permet la dévolution du problème et met en lumière le fait qu'on ne s'intéresse ici qu'aux enfants de 5 ans.

2) À quelle catégorie d'enfants s'intéresse-t-on ?

Les élèves doivent trouver qu'on s'intéresse aux enfants de 5 ans, mais que les données sont exprimées en mois et qu'il faut décider à combien de mois correspondent 5 ans.

3) Comment repérer les enfants de 5 ans avec les données proposées ?

Les enfants de 5 ans sont déterminés, il faut alors trouver une façon de les classer selon leur poids.

4) Maintenant que les enfants de 5 ans sont dégagés, quel est l'autre critère à prendre en compte ?

Le poids doit ressortir et il faut alors trier les données afin de regrouper les enfants de moins de 21,5 kg et ceux de plus de 21,5 kg.

5) Comment peut-on regrouper les enfants avec comme référence le poids de 21,5 kg ?

On attend que les élèves trient les données dans un tableau affichant deux catégories : les enfants de moins de 21,5 kg et ceux de plus de 21,5 kg.
Il faut maintenant que les élèves comparent chaque effectif du tableau avec le nombre total d'enfants.

6) Combien y-a-t-il d'enfants au total ?
7) A partir du tableau, peut-on répondre à la question ?

On y voit un peu les mêmes écueils bien que, en dehors du démarrage qui n'est pas bien assuré, certaines questions (les questions 2, 3 et 4 notamment) peuvent être des questions cruciales, même si leur formulation devrait être améliorée. Par exemple, la quatrième question pourrait être reformulée de la façon suivante : « On a maintenant un ensemble de données qui concernent les enfants de 5 ans. Est-ce qu'il peut nous permettre de répondre à la question ? (...) Qu'est-ce qu'il faudrait que l'on ait pour cela ? » On notera que la question du poids et celle de l'âge ont des chances d'arriver simultanément et qu'il faudra en tenir compte dans le réseau de questions cruciales prévu, en choisissant par exemple, comme c'est le cas ici, de traiter d'abord l'âge et ensuite le poids. La question cruciale se modifierait par exemple ainsi : « On a maintenant un ensemble de données qui concernent les enfants de 5 ans. Qu'est-ce qu'on avait dit qu'il fallait faire aussi ? (...) Comment va-t-on s'y prendre ? (...) Que veut-on obtenir ? » Etc.

D'autres questions ne sont manifestement pas « cruciales », comme la question 6 par exemple. On notera également que la transition entre les questions 4 et 5 est sans doute un trop rapide, la question 5) étant en outre trop précise. On pourrait attendre d'abord un questionnement « générique »du type : Que veut-on obtenir ? Comment va-t-on s'y prendre ?

La proposition suivante appelle le même type de commentaires, avec en outre un problème lié au statut de la notion d'histogramme. Il s'agirait ici de le faire émerger, à partir du diagramme en bâtons qui est connu depuis la 6^e^. Le réseau de questions est là encore trop peu resserré et ne dessine pas assez une dynamique de production de la réponse.

- Pré requis : représentations usuelles, diagrammes, graphiques.
- Pré requis TICE : utilisation de la calculatrice et de logiciels.
- Intérêt didactique de l'activité : familiariser les élèves avec le passage d'un type d'organisation ou présentation à un autre (extrait des commentaires du programme de 6^e^).
- Objectif : faire émerger les notions de fréquence, effectif, classes. Confronter et étudier la pertinence des diverses représentations possibles.

1) Que signifie trop maigre ?

Réponse attendue : tranche de poids inférieure au poids ou la tranche de poids qui a le plus grand effectif (vocabulaire qu'il est nécessaire de faire émerger à ce moment).
Justification : toute résolution de problème nécessite une analyse préalable de l'énoncé. On est donc ici en droit de se demander ce que signifie « être trop maigre ». On peut également remarquer que la réponse à cette question dépend de l'âge de l'enfant considéré.

2) Quel type de représentation peut-on adopter ?

Réponse attendue : tableaux, diagramme bâtons, tableau de données, RG de données, histogramme.

Justification : Suivant la période de l'année à laquelle on se place, les élèves n'auront pas les mêmes pré requis donc réponses.

3) Comment gérer la grande quantité de données ?

Réponse attendue : regrouper par classe (vocabulaire qu'il est nécessaire de faire émerger à ce moment).

Justification : au vu du grand nombre de données proposées on pourra regrouper celles-ci par « paquets » de façon pertinente. Comment alors justifier ce choix ?

4) Quelles unités (âge, poids, …) peut-on choisir ?

Réponse attendue : on peut remarquer que les âges sont donnés en mois et pas conventionnellement en années ce qui « impose » un choix.

Justification : Cette question se justifie par le fait que les données sont chiffrées dans une certaine unité et que cela induit directement un choix à effectuer pour le classement des données.

5) quelle est la « meilleure représentation » ?

Réponse attendue :

1. un histogramme pourrait sembler adapté car il fournit une réponse immédiate car visuelle.
2. Un diagramme circulaire.

Justification : à ce stade, on peut imaginer que dans le groupe classe, plusieurs représentations ont émergées. La mise en commun permettra alors de discuter de la qualité et de la pertinence de ce qui est proposé, c'est-à-dire quelle représentation permet de répondre le mieux à la question.

Il en va de même dans la proposition suivante, qui fait cependant un choix qui peut paraître raisonnable dans la limitation des données et qui prend d'abord une valeur (30 kg) où la décision est plus facile à prendre : certaines questions (que nous avons surlignées) pourraient apparaître comme questions cruciales tandis que d'autres n'en sont manifestement pas et il manque des questions permettant à certains aspects de l'étude de survenir. On notera que les bilans d'étape qui définissent effectif et effectif total notamment n'ont pas leur place si tôt : on peut garder les périphrases avec « nombres d'enfants qui pèsent... » ; il en va de même pour les fréquences, on peut garder le terme de proportion. On le fera quand on mettra en forme l'organisation mathématique qui a émergée, et plutôt dans la synthèse après avoir vu au moins une autre étude avec un autre caractère qu'en bilan d'étape de l'AER. En revanche, on peut noter que la proportion d'enfants qui pèse 13 kg, c'est le quotient du nombre d'enfants pesant 13 kg par le nombre total d'enfants. Et on pourra préparer l'introduction du terme de fréquence par des questions du type : est-ce que c'est fréquent qu'un enfant de 5 ans pèse 30 kg ?

Dans le fichier donné aux élèves, on restreindra les données aux enfants de 60 à 71 mois et on sortira la valeur extrême de 40 kg.

Questions cruciales :

• A votre avis, selon le fichier, un enfant de 5 ans qui pèse 30kg est-il gros ? Pourquoi ?
• Il y a beaucoup de données, est-ce que vous les avez toutes regardées ?
• Compter combien d'enfants de 5 ans pèsent 30kg.
• Comment peut-on faire pour les compter plus facilement ?

Comment auriez vous aimé que soient répartis les poids pour les compter plus facilement ?

(Si la notion de trier les poids – par ordre croissant – n'émerge pas, on peut reposer les mêmes questions pour savoir si un enfant de 13kg est plutôt maigre ou gros.)

• Compter, à présent, pour chaque valeur, le nombre d'enfants correspondants.

(Soit on leur donne la formule, soit la fonction du tableur)

Poids (en kg)	*13*	*14*	…	…	…

Nombre d'enfants					

<u>Bilan d'étape :</u> Le nombre d'enfant est appelé *effectif*.

• Combien ce relevé statistique comporte-il d'enfants ? Pourquoi ?

<u>Bilan d'étape :</u> Ce nombre est l'*effectif total*.

La somme des effectifs de chaque poids donne l'effectif total.
• Quelle est la proportion d'élèves qui pèsent 13kg ?
Compléter le tableau pour les autres valeurs :

Poids (en kg)	*13*	*14*	…	…	…
Effectif					
Proportion					

<u>Bilan d'étape :</u> Cette proportion s'appelle la *fréquence*.
Elle est égale au rapport de l'effectif par l'effectif total.
• Maintenant, que pensez vous de la question initiale ?
On va le vérifier graphiquement…
• Combien d'enfants pèsent entre 13 et 15kg (15 exclu) ?
Compléter ce tableau :

Poids (en kg)	$13 \leq P < 15$	$15 \leq P < 17$	…	…	$31 \leq P \leq 33$
Effectif					

<u>Bilan d'étape :</u> $13 \leq P < 15$ s'appelle une *classe*.

• Comment représenteriez vous, graphiquement, les données de ce tableau ?

(Aide du professeur en fonction des réponses obtenues)

<u>Bilan d'étape</u> : Bilan sur l'*histogramme*.

Le travail suivant est plus proche de l'objectif à atteindre, bien que certains écueils relevés précédemment ne soient pas évités, notamment du point de vue de l'entrée dans le travail :

Q1) Que signifie « avoir 5 ans » ?
L'âge dans les données brutes est exprimé en mois. Cette question est donc motivée par le fait qu'il faut faire le lien entre « 5 ans » et cet âge exprimé en mois.

Q2) Comment extraire du tableau statistique initial, les données ne concernant que les enfants de 5ans ?
La question du problème posé, ne portant que sur les enfants de 5 ans, on ne garde que les données pertinentes (à savoir celles concernant les enfants de 5 ans).

Q3) Quelles données concernant les enfants de 5 ans doit-on exploiter maintenant ?
Dans la question du problème posé, on demande d'estimer si un enfant est trop gros, ce qui conduit à s'intéresser au poids des enfants de 5 ans.

Q4) Que faire avec les poids des enfants pour répondre à la question posée ?
Le but de cette question étant de faire apparaître le « classement » des enfants suivant leur poids.

Q5) Comment faire pour les classer ?
Suite à cette question, on s'attend à obtenir de la part des élèves la suggestion du classement suivant les poids croissants ou décroissants dans le but de déterminer l'effectif des enfants pour chacun des poids apparaissant dans les données.

Q6) Comment présenter les résultats obtenus à partir de la question précédente ?
On s'attend à ce que soient prononcés les mots « tableau », et « graphique » (en particulier « diagramme en bâtons »), représentations déjà utilisées en classe de 6e.
Cette question est reliée au types de tâches suivants de la classe de 5e : « Présenter des données sous la forme d'un tableau », « Représenter des données sous la forme d'un diagramme », « Représenter des données sous la forme d'un histogramme ».

Q7) Comment faire pour faire pour dire si un enfant (de 5 ans) pesant 21,5 kg est trop gros à partir du travail précédent ?
Cette question relève du type de tâche « Interpréter des informations à partir d'un tableau » et « Interpréter des données à partir d'un diagramme », « Interpréter des données à partir d'un histogramme »

Q8) Comment faire pour « comparer » le poids d'un enfant de 21,5 kg à ceux des autres enfants du même âge ?
L'objectif étant ici de faire apparaître les pourcentages et donc les fréquences.

Q9) Comment trancher entre la réponse positive « Oui, il est trop gros pour son âge. » et la négative « Non, il n'est pas trop gros pour son âge. » ?
Cette question relève encore de l'interprétation de données.

PS : A l'issue de la question *Q6*, on pourrait aussi représenter les données sous la forme d'un histogramme en regroupant les données en classes de même amplitude.

Le dernier travail remis, enfin, propose que l'étude se déroule en deux temps : l'un en classe « normale » avec le fichier vidéoprojeté, l'autre en salle informatique. Si l'idée n'est pas mauvaise et viable, la mise en œuvre proposée est trop déséquilibrée (on cherche à faire émerger la technique avant de faire le travail) et en outre, il faudrait que les élèves aient, dans la première partie, du milieu pour travailler ; un extrait du tableau sur papier (des extraits différents répartis dans la classe) et leur calculatrice par exemple. De plus, et par conséquence, le professeur empiète beaucoup trop sur le topos des élèves, comme on le remarque par exemple dans le passage surligné.

Remarque préliminaire :
Cette séquence dans une classe de 5ème (sic) peut se dérouler en deux temps. Premier temps, en salle de classe normale avec le fichier videoprojeté. On précise le problème et on tente de le résoudre à la main. Les élèves prennent conscience de la nécessité de l'outil informatique. Deuxième temps, on résout le problème en salle informatique.

Premier temps, en salle de classe normale :

Le professeur projette le fichier et écrit au tableau : « un enfant de 5 ans qui pèse 21,5 kg est-il trop gros pour son âge ? »

Q : D'après vous, peut-on dire si un enfant de 5 ans d'un poids donné est trop gros pour son âge ?
Réponses possibles : « ça dépend. », « ça dépend de combien ça pèse un enfant de 5 ans », « ça dépend de sa taille », « ça dépend de combien pèsent les autres enfants de 5 ans»…

4) mise en évidence du fait que ne peut pas répondre par l'affirmative ou par la négative à la question de départ.

Q : On ne peut donc pas répondre à la question, il faut définir des critères précis de surpoids. Un élève a dit que ça dépendait de combien pèsent les autres enfants. Alors, de quelle manière pourrions-nous procéder pour définir un critère ?
Réponses possibles : « s'il est beaucoup plus gros que les autres, alors il est trop gros, sinon non. »

Remarque : on a utilisé à profit une réponse antérieure d'un élève. Sinon on aurait pu insister sur le fait que la classe a sa disposition une liste d'enfants avec leurs poids et âge.

Q : Et comment dire s'il est « beaucoup » plus gros que les autres ou s'il est parmi les enfants maigres ? Comment le situer par rapport aux autres ?
Réponses possibles : « on regarde », « on compte combien d'enfants de 5 ans sont moins lourds que lui »

Q : à votre avis, est-ce que ça va suffire à répondre à la question ?
Réponses possibles : « oui »…

Le professeur donne alors deux exemples au tableau où les proportions sont les mêmes mais où l'effectif total varie. Il leur demande alors de compter le nombre d'enfants de moins de 21,5 kg : les effectifs varient mais la fréquence des enfants de moins de 21,5 kg reste la même.
Q : Est-ce que le nombre varie ?
E : oui, il y en beaucoup plus dans le deuxième exemple.

Q : Pourtant l'enfant peut-il être considéré comme beaucoup plus gros dans le deuxième cas ?
E : non.

Q : Donc de quoi doit tenir compte notre critère ?
E : Du nombre d'enfants plus maigre et du nombre total d'enfants.

Remarque : Le professeur donne alors à ce moment là, le critère de la proportion. (Cela parait difficile de croire que ce critère émerge des élèves) Cette proportion pourra être calculée dans les deux exemples précédents et on pourra montrer qu'elles étaient identiques.

Q : Nous avons donc une grandeur qui va permettre de situer le poids de l'enfant par rapport aux autres, mais comment l'utiliser pour dire si l'enfant est trop gros ou pas ?
Réponse possible : « On regarde si cette proportion est plus grande ou plus petite valeur fixé au préalable. »

Remarque : Les élèves doit prendre conscience qu'à ce moment là il faut faire un choix arbitraire.

Q : Quelle valeur choisissons-nous ?
Réponse possible : « 75% ».

Q : Finalement, pouvons-nous reformuler la question initiale selon nos critères ?
Réponse possible : « La proportion d'enfants pesant moins de 21,5 kg est-elle plus grande que 75% ?

Q : Nous allons donc maintenant résoudre le problème, nous allons calculer cette proportion. Comment pouvons-nous faire ?
Réponse possible : « Déjà il faut compter le nombre d'enfants de 5 ans. »

Q : Au fait qu'est ce qu'un enfant de 5 ans ?
Réponse possible : « Ben entre 5 et 6 ans. »

Q : Un enfant de 4 ans et 11 mois, pouvons-nous le considérer comme un enfant de 5 ans ?
Remarque : Éventuellement, le professeur peut demander à la classe si un élève a son anniversaire bientôt (dans un mois ou deux) et lui demander s'il pense qu'il est plus proche de 11 ans ou de 12 ans. Il fait remarquer encore une fois que c'est un choix arbitraire que la classe doit faire et de choisir par exemple qu'un enfant de 5 ans est un enfant qui a entre 60 et 72 mois.

Le professeur dit à la classe de compter le nombre de ces enfants (dans le fichier).
E : Non, on ne peut pas il y en a trop.

Q : Comment pourrait-on aller plus vite ?

Réponse possible : « Avec un ordinateur. »

Deuxième temps, en salle informatique :

Q : Par quoi doit-on commencer ?
Réponse possible : « Par trier la liste par âge, on ne veut que les enfants de 5ans. »

Q : Ensuite que regarde-t-on parmi tout les enfants de 5ans ?
Réponse possible : « Le nombre d'enfant qui pèse moins de 21,5 kg. »

Q : Peut-on utiliser les numéros des lignes pour compter ?
Réponse possible : « ben non c'est tout mélangé. »

Q : Comment peut-on faire alors pour compter le d'enfant qui pèse moins de 21,5 kg ?
Réponse possible : « On trie par âge croissant la liste que l'on a. »

Pour terminer : des éléments de synthèse sur la notion de question cruciale

Les questions cruciales sont un outil essentiel de la direction d'AER : une question Q_2 sera dite cruciale pour (ou par rapport à) une question Q_1 si le fait de savoir répondre à Q_2 permet d'avancer dans l'élaboration d'une réponse à Q_1. Bien entendu, il peut exister plusieurs questions cruciales pour Q_1.

Le professeur agissant comme directeur d'étude et de recherche doit ainsi apprendre à poser des questions cruciales et, peu à peu, à faire que la classe et chaque élève apprennent à (se) poser de telles questions. Ce qui gêne le travail de ce point de vue, c'est principalement le fait que l'on ne va pas considérer le ***procédé de production d'une réponse***, mais le ***produit de ce procédé***, la réponse elle-même, que l'on va alors structurer pour l'exposer au lieu de ***structurer le procédé de production*** selon un certain ordre de découverte, qui est souvent inverse de l'ordre dans lequel on va exposer la réponse.

Voici ce que les notes du Séminaire 2004-2005 développaient à ce propos :

① Si l'on cherche par exemple à démontrer une proposition q, on s'efforcera de se « ramener » à une question p, c'est-à-dire qu'on recherchera une question p telle que la proposition $p \Rightarrow q$ soit aisément reconnue vraie, en sorte que, pour démontrer q, il suffise de démontrer p, etc. Un énoncé « tout fait » ***pour les élèves*** aurait alors la structure suivante :

1. Démontrer p.
2. En déduire q.

Par contraste, le « guide de direction d'étude » ***pour le professeur*** aura l'allure suivante :

1. *Q*. Comment démontrer q ?
2. *R*. En démontrant p.
3. *Q'*. Comment démontrer p ?
4. *R'*. …

② Lorsqu'on doit démontrer une proposition du type $h \Rightarrow k$, où h est l'hypothèse et k la conclusion, une source de difficulté classique est la tentation de ***« partir » de h pour « arriver » à k***, c'est-à-dire de chercher une proposition p_1 telle que l'on sache démontrer les implications $h \Rightarrow p_1$ et $p_1 \Rightarrow k$. En général, on choisit p_1 de façon qu'il soit aisé d'établir $h \Rightarrow p_1$ et il reste alors à établir $p_1 \Rightarrow k$. Si l'on n'y parvient pas, on cherche alors une proposition p_2 telle qu'on sache démontrer l'implication $p_1 \Rightarrow p_2$ et on tente de montrer alors d'établir l'implication $p_2 \Rightarrow k$. La « chasse », qu'on appelle en termes techniques « chaînage avant », peut continuer sans aboutir…

③ Le caractère dominant, voire unique, d'une telle stratégie chez les élèves du secondaire (et chez nombre d'étudiants d'université) découle sans doute de la consigne, rappelée à satiété par certains professeurs, selon laquelle il faudrait ~~« partir des hypothèses pour arriver à la conclusion »~~. En fait il s'agit là d'une stratégie souvent peu efficace, comme le montre l'exemple suivant, où l'on va utiliser au contraire un « chaînage arrière ».

❶ On demande de démontrer que, dans ℝ, on a : $\forall a\ \forall b\ \forall c \left(a \leqslant b+c \Rightarrow \frac{a}{1+a} \leqslant \frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}\right)$. Désignons par h l'énoncé $a \leq b+c$ et par k l'énoncé $\frac{a}{1+a} \leqslant \frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}$. Partir de $a \leq b+c$ pour essayer d'en faire découler p_1 qui impliquerait clairement k est à peu près voué à l'échec… Il est au contraire vital de ***partir de k*** pour essayer de trouver ***q_1 impliquant k***, et ***impliqué par h*** (q_1 est alors une ***condition suffisante*** de k)

❷ On a ici : $\frac{a}{1+a} \leqslant \frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c} \Leftrightarrow (1+b)(1+c)a \leq (1+a)(1+c)b+(1+b)(1+a)c \Leftrightarrow a+ab+ca+abc \leq b+c+ab+2bc+ca+2abc \Leftrightarrow a \leq b+c+2bc+abc$. On prendra donc ici pour q_1 l'inégalité $a \leq b+c+2bc+abc$: q_1 équivaut à k et, clairement, h implique q_1.

② Dans ce qui précède, on a remplacé k par q_1 telle que l'on ait $q_1 \Leftrightarrow k$. D'une manière plus générale, on a en fait intérêt à ce que q_1 ne soit pas ***trop forte***, car on augmenterait alors le risque de ne pouvoir établir que $h \Rightarrow q_1$. Comment chercher q_1 ? En s'interrogeant sur le ***type*** de tâches « démontrer une proposition du type de k », c'est-à-dire en se demandant « comment démontrer une proposition du type de k », par exemple, ici, en se demandant « comment prouver une ***inégalité*** portant sur des ***fractions*** ? » De là le fait qu'une question cruciale puisse être appelée aussi une question ***typique***, parce qu'elle porte souvent sur un type de tâches.

③ Il devrait être clair que la découverte de propositions p_1, p_2, …, q_2, q_1 telles qu'on ait les implications $h \Rightarrow p_1$ & $p_1 \Rightarrow p_2$ & … & $q_2 \Rightarrow q_1$ & $q_1 \Rightarrow k$ est le cœur du travail de production de la démonstration visée. Même si, bien entendu, le professeur va aider les élèves aux prises avec la recherche des réponses aux questions cruciales qu'il doit apprendre à poser, la constitution d'une culture mathématique authentique – bien qu'élémentaire – suppose d'apprendre à répondre aux questions cruciales du genre « comment démontrer… ? » D'une manière générale, pour mener à bien l'étude d'une question, il convient ***d'apprendre à poser les questions cruciales***, et, peu à peu, ***à y répondre***.

On ajoutera que, en dehors de questions spécifiques des situations étudiées, des questions plus génériques peuvent s'avérer fort utiles. On notera que nous avons vu précédemment des questions comme « Que veut-on obtenir ? », « Comment va-t-on s'y prendre ? » qui appellent des types de tâches et des (embryons de) techniques. On verra dans ci-dessous des questions comme « Est-ce que c'est vrai ? », « Est-ce que ça nous permet d'avancer dans la réponse à la question étudiée ? » qui appellent des éléments technologico-théoriques et des (éléments de) techniques. Il faut également apprendre à repérer des questions cruciales qui relèvent du domaine ou du secteur : c'est ici le cas de la question « est-ce que c'est fréquent qu'un individu ait telle modalité du caractère ? »

3. Forum des questions express

En classe de 4e, j'ai donné aux élèves une activité pour introduire le parallélisme de(IJ) et (BC). Mais les élèves n'ont pas réussi à voir le parallélisme. Mon énoncé (approximatif » : I, J, K sont les milieux respectifs de [AB], [AC] et [BC]. I, J et K sont trois points non alignés du plan. retrouver les sommets A, B, C du triangle ABC. Les élèves ont commencé à construire une figure à partir de I, J et K. Voyant qu'ils n'y arrivaient pas, ils sont partis de A, B et C puis ont construit I, J et K. Un élève a vu que $IJ = \left(\frac{1}{2}\right) BC$ (mais pas pour les autres longueurs, ça n'a pas été vu toute de suite. Pour le parallélisme, j'ai dû retracer les droites (IJ) et (BC) avec une autre couleur pour que les élèves le voient. Est-ce normal ou est-ce moi qui n'ai pas posé les bonnes questions (cruciales) ? (SK, 4^e & 3^e, 14)

On soulignera d'abord que le problème choisi et le travail qui semble avoir été effectué à son propos d'après la rédaction de la question (qui a été confirmé en séance ce sont les élèves qui ont eu l'idée de partir de la figure réalisée pour travailler) relèvent clairement d'une AER de bonne facture. Plaçons nous au point où en sont les élèves quand l'un s'aperçoit que IJ = $\frac{1}{2}$BC. Que doit faire le professeur en ce point ? D'abord, mettre à l'épreuve l'assertion avec la classe. Puis une fois l'assertion avérée expérimentalement, voir si cela permet d'avancer dans la solution du problème posé. IJ = $\frac{1}{2}$BC, donc comme K est le milieu de [BC], il suffit de placer C à la distance IJ de K et B de la même façon. On obtient alors A comme symétrique de B par rapport à I, et il apparaît que, dans le cas général, la droite (AI) ne coupe pas la droite (BC) en C. Il y a donc une autre condition à satisfaire et il faut poursuivre l'analyse des figures complètes effectuées.
Il n'est pas « anormal » que l'ensemble des éléments utiles ne sortent pas « tout de suite » : il faut pour faire émerger de nouvelles propositions « enrichir le milieu » : une technique très productive à cet égard est de mettre systématiquement à l'épreuve les assertions technologiques qui émergent, à la fois du point de vue de leur véracité mais aussi de leur capacité à produire la technique ; c'est cela qui permettra de relancer, si cela s'avère nécessaire, le moment exploratoire ou le moment technologico-théorique. (Questions cruciales : X dit que IJ = $\frac{1}{2}$BC ; est-ce que c'est vrai ? Comment pourrait-on le vérifier ? Est-ce que ça nous permet de construire le triangle cherché ? Comment ? Etc.)

Peut-on travailler l'organisation mathématique à l'aide du dispositif « exercices » avant d'institutionnaliser les techniques, en se basant uniquement sur les bilans d'étape des AER (informels) ? (LA, 5^e & 4^e, 13)

Si on entend par « avant d'institutionnaliser les techniques » comme « avant d'institutionnaliser les techniques dans la synthèse », non seulement on peut mais il est conseillé de procéder ainsi de façon à pouvoir mettre en forme dans la synthèse une OM suffisamment amalgamée. Cela étant, il faut que les techniques soient institutionnalisées dans les bilans d'AER ainsi que dans la mise en forme des exercices et, sauf cas particulier, il faudrait également avoir un épisode du moment de travail après la synthèse.

J'ai deux classes de 5^e et leur niveau est très différent. Une classe a des notes plus que correctes dans l'ensemble et l'autre a des notes vraiment plus basses voire très basses. Je leur fais les mêmes cours, interros, DM. Dois-je faire des interros et DM de même niveau pour les deux classes ou dois-je adapter au niveau de la classe ? (MPA, 5^e, 13)

Si l'on met en place de la même façon les mêmes organisations mathématiques, il n'y a pas de raison de faire des DM/DS très différents. En revanche, on peut adapter la notation en fonction du projet didactique lié à la classe et prévoir dans l'une des classes, la « forte », des incursions plus fréquentes dans la ZEP lors des évaluations. Ce que l'on peut en revanche examiner, c'est les facteurs qui font que les classes se comportent de façons différentes pour voir si l'on peut améliorer cela : l'une des classes étant vue comme « bonne », le professeur peut avoir tendance à se laisser emporter et à faire davantage que ce qui est demandé par le programme ce qui conduit la classe

« faible » à avoir du mal à suivre, ou encore avoir des exigences trop basses à propos de la mise en forme dans la « bonne » classe ; la classe « faible » peut avoir des lacunes, mal repérées par les tests d'entrée ou alors insuffisamment prises en charge ; et, surtout, la synthèse peut être trop peu attentive aux pratiques, ce qui défavorise très nettement les élèves peu autonomes dans l'étude ou peu aidé en dehors du collège, etc.

Lors d'une synthèse, les moments didactiques peuvent-ils se limiter à un moment d'institutionnalisation ? De même lors de la synthèse doit-on avoir plus de technologie et de théorie que de type de tâches et de technique ? (GA, 5^{e}, 14)

La synthèse est un dispositif permettant de réaliser une partie du moment de l'institutionnalisation. La réponse à la première interrogation est donc positive. En revanche il n'y a pas de raison que le poids entre technologico-théorique et practico-technique dans la synthèse soit en faveur du premier – sauf à faire porter indûment sur la synthèse des normes liées au dispositif du cours magistral.

Lors de la préparation d'une OM, j'ai du mal à voir ce qui rentre dans le volet « théorie ». Par exemple, dans le chapitre sur la construction des triangles (classe de 5^{e}), j'ai dégagé le type de tâches « étant donné trois longueurs, dire si on peut construire le triangle », dont une technique est « tester les inégalités triangulaires », elle-même associée à l'élément technologique qui est l'inégalité triangulaire. Quelle serait la théorie associée ? (BCL, 5^{e}, 14)

On est dans le cadre théorique de la géométrie plane euclidienne ; l'ingrédient principal est la définition de la longueur d'un segment qui fait que l'application qui à un couple de points du plan associe la longueur du segment dont ils sont les extrémités est une distance. (On notera que l'existence d'une application qui vérifie les propriétés d'une distance est usuellement pris comme un axiome.)

En classe de 5^{e}, les programmes officiels ne parlent pas de comparaison de fractions. Or, les manuels, dont le Transmath 5^{e}, proposent des extraits de programme où l'ordre apparaît et de nombreux exercices y font référence. Que faire ? (ER, 13, 5^{e})

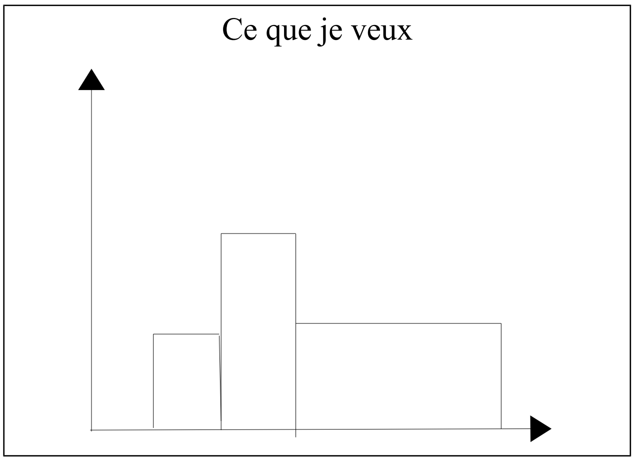
Suivre le programme... Il a légèrement changé entre 2006 et 2008. Cela étant, la comparaison de grandeurs peut s'avérer utile pour motiver certains types de tâches sur les fractions, enjeu de l'étude en 5^{e} ; on ne s'interdira pas de la prendre comme raison d'être, en prenant garde qu'il ne s'agit pas d'établir une OM relative à ce type de tâches (on étudie un ou deux spécimens, mais on n'explore pas le types de tâches de comparaison et on ne constitue pas une technique, etc.).

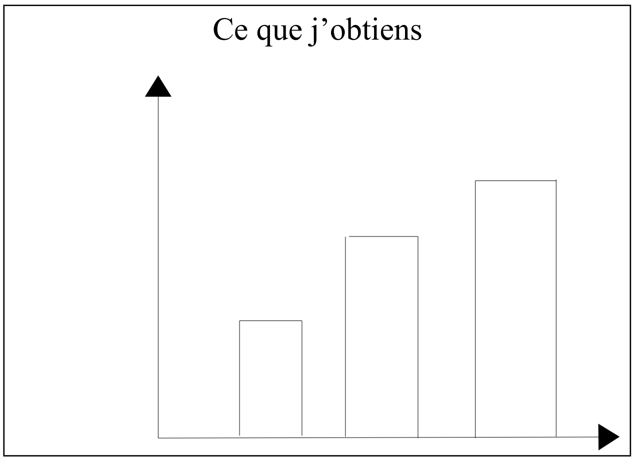
En 5^{e} en test de connaissances est demandée la définition du rectangle. Certains élèves écrivent : si un quadrilatère a quatre angles droits, alors c'est un rectangle. Dans une définition, on ne met pas de « si... alors ». Doit-on leur mettre quand même quelques points ? (CS, 5^{e}, 14)

Oui... la première fois au moins. Il faut expliciter (notamment le fait que, avec cette rédaction, on n'a pas une propriété caractéristique) et « sévir » progressivement.

Y-a-t-il des logiciels, autres qu'Excel, permettant de tracer des histogrammes ? Comment faire un « *vrai* » histogramme avec Excel ? Je sais faire un histogramme en donnant les effectifs mais je n'obtiens pas les classes en abscisses, les rectangles ne sont pas collés et seule la hauteur des rectangles est proportionnelle

aux effectifs (pas l'aire). Si les classes ne sont pas de même amplitude je n'obtiens pas le résultat souhaité. (2[de], 14)





Oui, il existe d'autres logiciels. Je signale notamment sinequanon (http://pagesperso-orange.fr/patrice.rabiller/SineQuaNon/menusqn.htm) qui permet d'obtenir des histogrammes et qui gère « dynamiquement » le calcul des paramètres à partir du tableau de données ce qui peut s'avérer fort utile dans l'expérimentation. Il est en outre très simple d'emploi pour une utilisation « standard ». On peut également utiliser Geogebra.
Pour Excel, il existe des solutions mais qui s'avèrent finalement assez lourde d'emploi.

3. Recherches dans les archives

3.1.

Que nous disent les *Archives du Séminaire* quant à ***l'utilisation des TICE pour enseigner et au C2i2e*** ?

• Le compte rendu de la recherche (soit l'exposé) s'efforcera de présenter (en les choisissant adéquatement) des matériaux pour une réponse aux questions de la semaine ci-après éventuellement présents dans les *Archives*.

1. Dans mon établissement le COTICE a fait un planning pour la validation des items du B2i. Dans ce planning, les professeurs de mathématiques ne sont pas sensés valider d'items aux élèves de 5[e]. Dois-je ne pas tenir compte du planning pour la validation du C2i2e ? (GA, 13)
2.Question sur la validation du C2i2e. Certains énoncés d'items à valider sont clairs, d'autres moins. Serait-il possible de savoir ce que l'on attend de nous pour valider les différents items ? Que sommes-nous censé mettre dans notre portfolio pour cela ? Pour valider un item nous sommes censé faire une demande de validation. Quel genre de preuves devons-nous fournir : copies d'écran ? (CP, 13)
3. Quelles doivent être les traces écrites des élèves lors d'une séance d'exercices effectués au tableau en salle informatique ? (Hormis la rédaction de la solution, est-ce que les élèves doivent noter les fonctions utilisées, le déroulement global des opérations sur le tableau,... ?) (NC, 12)
4. Quels sont, parmi les thèmes de 5[e], ceux qui sont le plus propices à l'organisation d'une séance informatique ? (JB, 13)
5. Je vais faire une séance informatique avec mes élèves afin de définir la notion de sinus. Nous allons

utiliser pour cela le logiciel Geoplan. Afin de ne pas être débordée par les questions du type "Comment on fait pour créer trois points libres ?", j'ai détaillé quelques commandes. Est-ce une bonne idée afin de mieux gérer la classe ? (AB, 13)

6. En tant que professeur de mathématiques de quatrième, dois-je valider des items du B2i ? (AM, 9)

Le compte rendu de la recherche a été exposé par EO, MP, BP.

3.2.

Que nous disent les *Archives du Séminaire* quant à ***l'enseignement de l'algèbre au collège*** ?

• Le compte rendu de la recherche (soit l'exposé) s'efforcera de présenter (en les choisissant adéquatement) des matériaux pour une réponse aux questions de la semaine ci-après éventuellement présents dans les *Archives*.

1. Comment justifier l'intérêt de la mise en équation d'un problème, quand on est « obligé » en même temps de fournir la solution de l'équation ?
Comment ne pas réduire à de simples vérifications le travail sur des exercices d'applications ?
Comment faire comprendre que c'est la façon de trouver une solution qui importe, et non la solution elle-même ?
Contexte : Problème posé en 5^e:
Un paquet de chocolats noirs et blancs pèse 670 g.
Il contient 8 chocolats noirs de plus que de blancs.
Chaque chocolat noir pèse 8,75 g, et chaque blanc 6,25 g.
On note x le nombre inconnu de chocolats blancs.
a) Écrire en fonction de x le poids des chocolats blancs du paquet.
b) Écrire en fonction de x le poids des chocolats noirs du paquet.
c) Montrer que le poids en grammes du paquet est $15x + 70$.
d) Le nombre de chocolats blancs est-il 30 ? 40 ? 50 ?
Réponses de nombreux élèves:
a) $40 \times 6{,}25 = 250$ g
b) $48 \times 8{,}75 = 420$ g
c) $15 \times 40 + 70 = 670$ g
d) 40
Autre exemple : Un triangle a pour angles a, $2a$, 69°. Calculer la valeur de a. Réponse : $a = 37°$ car $37 + 2\times37 + 69 = 180$. Mystère sur la façon de faire… Et que devient l'intérêt de l'exercice ?
Autrement dit, la mise en équation du problème est complètement évacuée. On se contente de vérifier qu'une valeur est solution (ou solution approchée) malgré les modèles de résolution d'exercices types.
J'ai observé le même comportement en seconde :
– au lieu de résoudre une équation, on vérifie qu'un nombre est solution.
– au lieu de démontrer une identité, on la vérifie sur un cas particulier, et un seul.
Même en terminale S, la réponse à une question est souvent fournie.
D'autre part, les élèves sont surpris quand on leur dit qu'un problème peut avoir plusieurs solutions, tel que tout simplement: un triangle défini par 3 angles, ou par 2 côtés et un angle, un cercle défini par 2 points…
Pour l'utilité du calcul littéral, un exercice intéressant est de « voir si le carré d'un nombre impair est toujours multiple de 8 plus 1 ».
Y aurait-il un sujet semblable pour la résolution des équations ? (PAR, 12)

Le compte rendu de la recherche a été exposé.

3.3.

Que nous disent les *Archives du Séminaire* quant à l***'effet des attentes du professeur à l'égard des élèves, et notamment de l'effet Pygmalion*** ?

• Le compte rendu de la recherche (soit l'exposé) s'efforcera de présenter (en les choisissant adéquatement) des matériaux pour une réponse aux questions de la semaine ci-après éventuellement présents dans les *Archives*.

1. Une élève de la classe est en très grande difficulté. Elle vient m'en faire part. Elle m'explique que malgré le fait qu'elle travaille à la maison, elle ne comprend pas. Elle est en PPRE (1 h par semaine) mais cela ne suffit pas. Que faire ? (CS, 8)

2. Que faire quand un élève qui a des difficultés devient amorphe / insolent lorsqu'on lui demande de passer au tableau ? (Visiblement, il laisse tomber et n'est là que pour ne pas être absent physiquement.) (MAC, 9)

3. Comment inciter une élève à prendre part à la vie de la classe et à participer à l'avancement du cours ? C'est une excellente élève à l'écrit mais en classe sa seule réponse aux interrogations est « je ne sais pas ». (AL, 11)

Le compte rendu de la recherche devait être exposé : le temps ayant manqué, cet exposé est reporté à la séance du 3 février 2010.

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2009-2010

Travaux dirigés de didactique des mathématiques
Utiliser les TICE

N. B. La séance de travail dirigé dont rendent compte les notes ci-après n'a concerné qu'une moitié des participants au Séminaire environ. Elle ne sera pas reprise in praesentia *avec les participants composant l'autre moitié : par principe, et dans le cadre de leur formation au travail en équipe, ces derniers devront étudier le contenu du TDDM3 à partir des notes qui suivent et avec l'aide, laissée à la convenance de chacun, de participants ayant dûment suivi cette séance.*

➔ Séance 3 : mardi 19 janvier 2010 (17 h 20 – 18 h 50)

Programme de la séance. 1. Fluctuation d'échantillonnage // 2. Simulations

1. Fluctuation d'échantillonnage

1.1. Ce que disent les textes officiels

a) La notion de « fluctuation d'échantillonnage » apparaît dans le programme de 2^{de}. Dans la partie présentant le secteur de la ***statistique***, ce programme précise ceci :

> **Objectifs visés(...) à l'occasion de résolutions de problèmes**
> **(...)**
> ***dans le cadre de l'échantillonnage***
> • faire réfléchir les élèves à la conception et la mise en œuvre d'une simulation ;
> • sensibiliser les élèves à la fluctuation d'échantillonnage, aux notions d'intervalle de fluctuation et d'intervalle de confiance et à l'utilisation qui peut en être faite.

b) Le même texte formule ensuite les contenus et commentaires ci-après.

Échantillonnage Notion d'échantillon. Intervalle de fluctuation d'une fréquence au seuil de 95% *	• Concevoir, mettre en œuvre et exploiter des simulations de situations concrètes à l'aide du tableur ou d'une calculatrice.	Un échantillon de taille *n* est constitué des résultats de *n* répétitions indépendantes de la même expérience. À l'occasion de la mise en place d'une simulation, on peut : • utiliser les fonctions logiques d'un tableur ou d'une calculatrice, ◇ mettre en place des instructions conditionnelles dans un algorithme.
Réalisation d'une simulation.	• Exploiter et faire une analyse critique d'un résultat d'échantillonnage.	L'objectif est d'amener les élèves à un questionnement lors des activités suivantes : • l'estimation d'une proportion

		inconnue à partir d'un échantillon ; • la prise de décision à partir d'un échantillon.
* L'intervalle de fluctuation au seuil de 95%, relatif aux échantillons de taille *n,* est l'intervalle centré autour de *p*, proportion du caractère dans la population, où se situe, avec une probabilité égale à 0,95, la fréquence observée dans un échantillon de taille *n.* Cet intervalle peut être obtenu, de façon approchée, par simulation. Le professeur peut indiquer aux élèves le résultat suivant, utilisable dans la pratique pour des échantillons de taille $n \geq 25$ et des proportions *p* du caractère comprises entre 0,2 et 0,8 : si *f* désigne la fréquence du caractère dans l'échantillon, *f* appartient à l'intervalle$\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}, p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ avec une probabilité d'au moins 0,95. Le professeur peut faire percevoir expérimentalement la validité de cette propriété mais **elle n'est pas exigible.**		

c) Le document « ressources » sur les probabilités et la statistique ajoute les développements suivants.

1. Fluctuation d'échantillonnage

1.1. Notion d'échantillon

Le terme « échantillon » prenant différents sens, il convient de préciser ce qu'il recouvre dans le programme de seconde.

Dans le sens commun des sondages, ce terme s'apparente à un sous-ensemble obtenu par prélèvement aléatoire dans une population. Ainsi parle-t-on usuellement de résultats estimés

En statistique, un échantillon de taille *n* est la liste des *n* résultats obtenus par *n* répétitions indépendantes de la même expérience[23]. Par exemple, un échantillon de taille 100 du lancer d'une pièce est la liste des résultats pile ou face obtenus successivement en répétant 100 fois le lancer de la pièce. De même pour un échantillon de taille 100 relatif au lancer d'un dé dont on observe l'apparition ou non de la face 6, ou bien encore pour un échantillon obtenu par tirages successifs avec remise d'une boule dans une urne contenant 2 boules blanches et une boule verte. Ces trois exemples relèvent en fait du même modèle, celui de Bernoulli qui affecte la probabilité *p* au nombre 1 et la probabilité (1 - *p*) au nombre 0, seule situation abordée en classe de seconde.

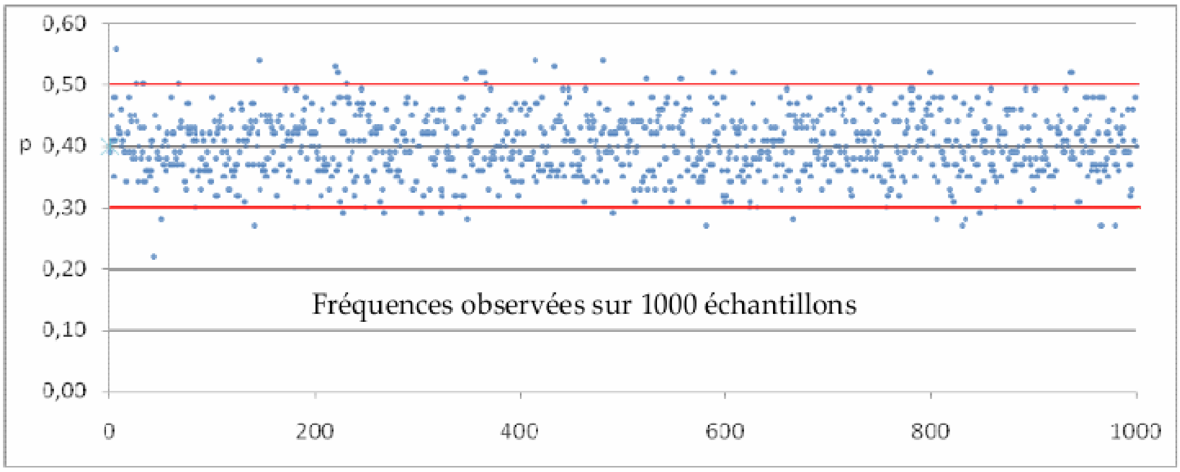
Cette notion d'échantillon fournit un cadre théorique pour démontrer les résultats énoncés ci-dessous sur la fluctuation d'échantillonnage.

En outre, ces résultats théoriques pourront s'appliquer aux sondages destinés à estimer une proportion *p* (par exemple le pourcentage de votes « oui » lors d'un référendum), en remarquant qu'un tirage sans remise d'un échantillon dans une population suffisamment nombreuse est assimilable à la répétition d'un tirage avec remise dans une urne.

1.2. Intervalle de fluctuation[24]

On peut, par expérimentation et simulation, faire observer aux élèves que les échantillons de taille n obtenus à partir d'un modèle de Bernoulli ont, pour environ 95% d'entre eux, des fréquences d'apparition du nombre 1 qui fluctuent[25] dans un intervalle centré en p et d'amplitude $\frac{2}{\sqrt{n}}$.

On a simulé ci-dessous[26], 1000 échantillons de taille 100 d'un modèle de Bernoulli avec $p = 0,4$. Chaque échantillon est représenté par un point dont l'ordonnée est sa fréquence d'apparition du 1. On observe que la plupart des échantillons ont des fréquences d'apparition du 1 dans l'intervalle [0,3 ; 0,5].



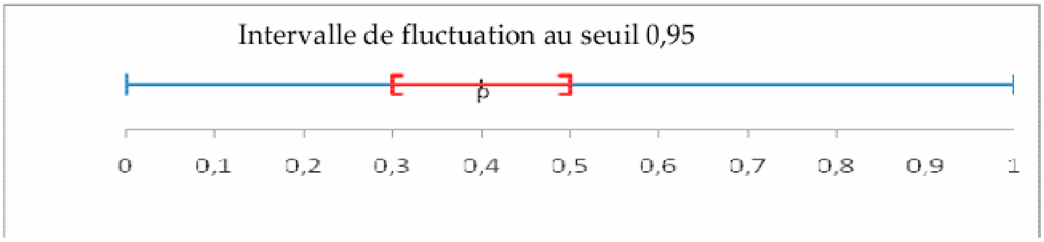
[23] C'est-à-dire relative au même modèle.

[24] Voir les simulations avec un tableur :
http ://www.ac-grenoble.fr/maths/docresseconde/intervalles_fluctuation_confiance.xlsx
ou http ://www.ac-grenoble.fr/maths/docresseconde/intervalles_fluctuation_confiance.ods

[25] Pour n assez grand, on observera que $\frac{1}{\sqrt{n}}$ est l'ordre de grandeur de cette fluctuation autour de p au seuil 95%.

[26] Ici la simulation a été effectuée au tableur à l'aide de la formule ENT(ALEA()+0,4)

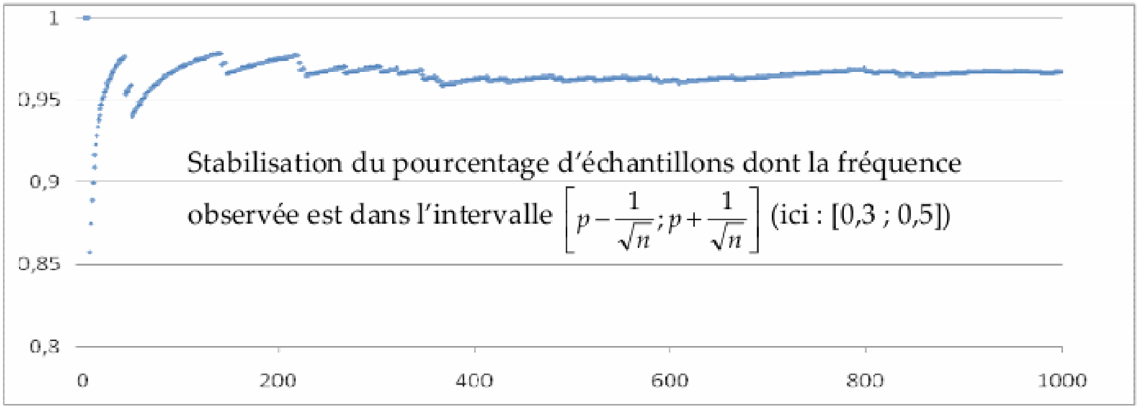
On peut alors définir[27] l'intervalle de fluctuation au seuil de 95%, relatif aux échantillons de taille n, comme l'intervalle centré autour de p, où se situe, avec une probabilité égale à 0,95, la fréquence observée dans un échantillon de taille n.



Dans la pratique, on utilise l'intervalle[28] $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$, pour des probabilités p comprises entre 0,2 et 0,8, et des échantillons de taille n supérieure ou égale à 25.

Pour p donné, on peut faire calculer les bornes de cet intervalle pour quelques valeurs de n, et remarquer qu'il faut multiplier la taille de l'échantillon par k^2 pour diviser par k l'amplitude de l'intervalle. On pourra calculer l'amplitude correspondant aux échantillons de taille 1000, taille souvent retenue dans les sondages.

Il est possible de visualiser[29] le pourcentage d'échantillons dont les fréquences d'apparition du 1 sont situées dans l'intervalle $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$. Le graphique[30] suivant est obtenu à partir des 1000 échantillons simulés et représentés ci-avant.



[27] Il faudrait en fait considérer le plus petit intervalle où se situent les fréquences observées avec une probabilité au moins égale à 0,95. Mais pour une première approche de cette notion, on s'est limité à l'énoncé ci-dessus.

[28] Il s'agit d'un résultat asymptotique, résultant de la convergence en loi de la variable aléatoire f_n correspondant à la fréquence d'un échantillon de taille n vers la loi normale de moyenne p et d'écart type $\sigma=\sqrt{p(1-p)}$. Ainsi, pour n assez grand, f_n appartient avec une probabilité d'environ 0,95 à l'intervalle $\left[p-\frac{1{,}96\sigma}{\sqrt{n}},p+\frac{1{,}96\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ qui est inclus dans $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}},p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ (car $\sigma=\sqrt{p(1-p)}\leq\frac{1}{2}$). On pourra se référer au document d'accompagnement du programme 2001 de la classe de seconde à l'adresse :
http ://www.ac-grenoble.fr/maths/docresseconde/doc_proba_stat_seconde2001.pdf

[29] cf. feuille de calcul : http://www.ac-grenoble.fr/maths/docresseconde/intervalles_fluctuation_confiance.xlsx ou http://www.ac-grenoble.fr/maths/docresseconde/intervalles_fluctuation_confiance.ods

[30] Lecture : parmi les 200 premiers échantillons de taille 100 obtenus, environ 97% ont une fréquence d'apparition du 1 dans l'intervalle [0,3 ; 0,5]

1.2. Quelle distribution sur la population ?

a) Dans un groupe d'écoles supérieures publiques de formation professionnelle, les épreuves communes de passage de la 1re à la 2e année ont vu la réussite de 1000 élèves, chacun d'eux recevant l'une des mentions suivantes : Passable ; Assez bien ; Bien ; Très bien.

b) Une association d'usagers souhaite connaître la distribution de ces mentions. N'ayant pas accès aux données détenues par l'administration des écoles, elle envoie plusieurs observateurs relever des données affichées (où les mentions figurent par ordre alphabétique des noms des lauréats). L'un des observateurs a relevé la suite de mentions ci-après en les codant ainsi : Passable, 1 ; Assez bien, 2 ; Bien, 3 ; Très bien, 4. La voici.

13123124312131243122222211131243121312431222243111.

En copiant cette liste et en la collant dans un fichier Word, il dénombre les différentes mentions (à l'aide de la fonction **Remplacer**) et obtient ceci.

Mention	1	2	3	4	Total
Effectif	18	17	10	5	50
%	36	34	20	10	100

c) Sur cette base, cet observateur croit pouvoir avancer les conjectures suivantes relatives à la population des 1000 mentions attribuées :

1) comme on pouvait s'y attendre, les effectifs décroissent quand la mention s'élève ;
2) environ un lauréat sur 10 a eu la mention « Très bien » ;
3) environ 70 % des lauréats ont reçu la mention « Passable ou « Assez bien ».

d) D'autres observateurs ont, de même, relevé d'autres séries de mentions.

• On reproduit ci-après 10 séries de 50 mentions.

Série 1 : 11122312311131222421113121312431243122224311111122

Série 2 : 43112124312431243122222311131243122312131222242111

Série 3 : 11124312311131222431113112231242123124312431213124

Série 4 : 31223123111312224211113111312231222243111111211312

Série 5 : 11111241212123114312431223124312132224311113124223

Série 6 : 12131243222421231243122312311131222431111311131243

Série 7 : 12222421111112111131211111122124312311431213124312

Série 8 : 23124322243111212134311243122322243111312134314312

Série 9 : 13124312231222242111312431213124312231231113122243

Série 10 : 11142111312231222243121111112112431221143124312431

• Chaque trinôme de participants dresse, pour l'une de ces séries (qui lui est communiquée dans un fichier Word), le tableau des effectifs ci-dessous (en le reproduisant dans un fichier séparé).

Mention	1	2	3	4	Total
Effectif					

%					

• Dans le tableau ci-après, on a reporté les séries de pourcentages pour chacune des quatre mentions. (Pour les 10 tableaux demandés ci-dessus, voir l'Annexe 1 ci-dessous.)

Mention	**1**	**2**	**3**	**4**	**Total**
Série 1	44	32	16	8	100
Série 2	34	36	18	12	100
Série 3	40	28	20	12	100
Série 4	48	30	18	4	100
Série 5	40	30	18	12	100
Série 6	38	30	22	10	100
Série 7	52	28	12	8	100
Série 8	32	30	24	14	100
Série 9	34	34	22	10	100
Série 10	46	28	14	12	100

• À l'aide du tableau précédent, on examine collectivement les trois conjectures formulées plus haut, à savoir

1) comme on pouvait s'y attendre, les effectifs décroissent quand la mention s'élève ;
2) environ un lauréat sur 10 a eu la mention « Très bien » ;
3) environ 70 % des lauréats ont reçu la mention « Passable ou « Assez bien ».

➔ Il n'est pas toujours vrai que « les effectifs décroissent quand la mention s'élève », même si c'est presque vrai : dans la série 2, ainsi, l'effectif des mentions « Assez bien » dépasse l'effectif des mentions « Passable » ; dans la série 9, ces deux effectifs sont égaux.

➔ La conjecture qu'« un lauréat sur 10 a eu la mention "Très bien" » n'est pas véritablement confirmée sur l'ensemble des dix séries examinées : le pourcentage de mentions « Très bien » attribuées varie de 4 % à 14 %, soit un rapport de 1 à 3,5 ; la proportion selon la série examinée varie de $4/100 = 1/20$ à $14/100 \approx 1/7$. La série des pourcentages est la suivante : 4, 8, 8, 10, 10, 12, 12, 12, 12, 14 ; on voit ainsi que, toutefois, la médiane est égale à 10.

➔ La série des pourcentages de l'événement « Passable ou Assez bien » est la suivante : 62, 68, 68, 68, 70, 70, 74, 76, 78, 80 ; la médiane est 70. Mais on voit que l'étendue est de 18 points !

1.3. Échantillons aléatoires

a) L'étude précédente illustre une situation typique.

• On s'y intéresse à la distribution d'un certain caractère X sur une certaine population Ω. Ici, le caractère X est la mention obtenue à un examen : c'est un caractère ***ordinal*** ; la population Ω, d'effectif 1000, est celle des élèves reçus à l'examen.

• Pour étudier la distribution de X sur Ω, il faudrait connaître l'ensemble des mentions $\{ X(\omega) / \omega \in \Omega \}$. Comme cet ensemble n'est pas connu, on se tourne vers un échantillon E (ou plusieurs). À partir de la connaissance de la distribution de X sur E, on essaie d'***inférer*** la distribution de X sur Ω.

• Les échantillons E que l'on utilise pour tenter de cerner la distribution de X sur Ω sont ici les échantillons que l'on a été capable de se procurer : on parlera alors d'échantillons ***disponibles***. À cet égard, l'auteur d'un ouvrage intitulé (dans son édition originale) *Principles of* Statistics (1971), Victor E. McGee, écrit ceci (*Principes de statistiques*, Vuibert, Paris, 1975, p. 30).

> Beaucoup de recherches sont fondées sur des échantillons disponibles. En fait, aux États-Unis, la recherche effectuée dans le domaine psychologique sur des êtres humains a été caractérisée par l'étude des étudiants de deuxième année, et il est fréquent pour les étudiants suivant des cours d'introduction en psychologie d'être récompensés (par une note meilleure) pour avoir participé à des expériences psychologiques. Dans beaucoup de cas il n'y a rien à redire à cette procédure.

b) L'association d'usagers parvient enfin à obtenir communication de la liste (anonymée) des mentions attribuées.

• On la reproduit ci-après.

```
13123124312131243122222211131243121312431222243111111223123111312224211131213124312431
22224311111122431121243124312431222223111312431223121312222421111124312311131222431113111
22312421231243124312131243122312311131222421113111312231222243111112113121111112412121
23114312431223124312132224311131242231431243124312131222223111312421243124312231231113 1
222231112311131242122221311111124111312111111241213123114243122312131242222431113124323 1
13124312431223122224211131243121312431222243111243123111312222211131243124312431213124 3
12231221113222431111311131223122224311111241113121111112112423114312231243121312432224 2
12312431223123111312224311113111312431222242111111211113121111112212431231143121312431 22
31243222431112121343112431223222431113121343143121312431223122224211131243121312431223 1
2311131222431114211131223122224312111111211243122114312431243122312432221311131243431 42
31113122312431213122312311131222431111111221113121111112412431221113124322312131222242 11
1312431243121312222421111112431221113
```

• Cette liste est communiquée à chacun des trinômes, qui établit alors l'effectif des différentes mentions (codées 1, 2, 3, 4).

• Les résultats de l'étude de cette population sont consignés dans le tableau suivant.

Mention	1	2	3	4	Total
Effectif	409	306	184	101	1000
%	40,9	30,6	18,4	10,1	100

➔ On observe que la première et la deuxième conjectures du premier observateur sont bien vérifiées sur la population totale.

➔ La troisième conjecture appelle un léger correctif : les mentions « Passable » et « Assez bien » représentent 71,5 % du total (et non 70 %).

➔ On notera surtout que, si l'échantillon disponible étudié par le premier observateur avait été l'un des neuf autres examinés ci-dessus, ses inférences auraient pu s'éloigner ***plus ou moins fortement*** de la réalité. On notera encore que la médiane des séries de 50 mentions elle-même fluctue légèrement : égale à 2 dans 9 séries sur 10, elle est égale à 1 dans la série 7 (où l'effectif de la valeur 1 atteint 52 %).

c) Informés des résultats de l'étude conduite par l'association d'usagers, plusieurs formateurs des écoles concernées sont inquiets de la manière dont seront constitués les groupes de formation (GF), dont il est prévu qu'ils regroupent chacun 20 élèves : ils pensent que si ces groupes sont déterminés par l'administration simplement selon l'ordre alphabétique, il y a de grandes chances pour que leur composition varie sensiblement, créant par là des conditions de travail inégalitaires pour les formateurs.

• Chaque trinôme sélectionne un groupe formé des lauréats pris dans l'ordre alphabétique du rang $20n + 1$ au rang $20(n + 1)$, où $0 \leq n \leq 49$, puis dresse le tableau des effectifs des différentes mentions en comparant ces effectifs avec les effectifs « théoriques » indiqués dans le tableau ci-après.

Mention	1	2	3	4	Total
Moyennes	8,18	6,12	3,68	2,02	20
« Idéal »	8	6	4	2	20

(On a calculé la deuxième ligne ainsi : 8,18 = 40,9 % × 20, 6,12 = 30,6 % × 20, 3,68 = 18,4 % × 20, 2,02 = 10,1 % × 20 ; la troisième ligne découle de la deuxième en arrondissant les valeurs de cette dernière.)

➔ Pour $n = 27$, par exemple, on sélectionne dans la liste des mentions celles allant du rang 541 au rang 560.

1312312431213124312222221113124312131243122224311111223123111312224211131213124312431 2
22243111111224311212431243124312222231113124312231213122224211111243123111312224311131 1
22312421231243124312131243122312311131222421111311131223122224311111211312111111241212 1
23114312431223124312132224311131242231431243124312131222223111312421243124312231231113 1
22223111231113124212222131111112411131211111124121312311424312231213124222243111312432 31
13124312431223122224211131243121312431222243111243123111312222211131243124312431213124 3
1223122111322243111131113122312222431111124111312111111211242311…

➔ Le tableau demandé est alors le suivant.

Mention	1	2	3	4	Total
Effectif	9	6	4	1	20
« Idéal »	8	6	4	2	20

➔ En l'espèce, le formateur en charge de ce GF pourra être tenté de réclamer que, dans son groupe, l'administration remplace une mention Passable par une mention Très bien…

➔ On notera toutefois que chacun des 50 GF ne saurait avoir la composition « idéale ». On a en effet ceci : mention 1 : 50 × 8 = 400 < 409 ; mention 2 : 50 × 6 = 300 < 306 ; mention 3 : 50 × 4 = 200 > 184 ; mention 4 : 50 × 2 = 100 < 101.

On pourra trouver un complément d'étude dans les archives du Séminaire 2006-2007 (TD5).

2. Simulations

2.1. Ce que disent les textes officiels

a) Nous avons vu comment le programme de la classe de 2^{de} présente thème de la simulation ; le document « ressources » n'apporte pas d'autres commentaires.

b) Voici ce que le document d'accompagnement du programme de 2001 apportait comme précisions.

> • **Simulation**
>
> Formellement, simuler une expérience, c'est choisir un modèle de cette expérience puis simuler ce modèle : cet aspect sera introduit ultérieurement en première. Dans le cadre du programme de seconde, simuler une expérience consistera à produire une liste de résultats que l'on pourra assimiler à un échantillon de cette expérience (voir plus loin la fiche *listes de chiffres au hasard*). On se contentera de simuler des situations très simples, reposant le plus souvent sur la simulation d'expériences de référence où toutes les issues ont des chances égales d'apparaître.
>
> La simulation permettra de disposer d'échantillons de grande taille et d'observer des phénomènes appelant une explication dans le champ des mathématiques. Pour bien comprendre les mathématiques, il est utile d'apprendre quel type de questions sont à adresser à cette discipline et aussi d'apprendre à reformuler ces questions dans le langage propre des mathématiques ; le langage des probabilités présenté en première S, ES et en option de première L, formalisera le langage naïf des *chances* et du *hasard* employé en seconde ; le calcul des probabilités permettra ensuite d'expliquer certains phénomènes observés.
>
> En seconde, on approche dans le cadre d'un langage simple et familier les techniques de simulation ; pour que l'élève ne soit pas écrasé par la puissance des outils modernes de simulation, il convient qu'il ait établi un lien concret entre l'expérience et sa simulation : certaines expériences simples pourront être réalisées par une partie de la classe et simulées par le reste de la classe ; il n'est pas nécessaire, dans un premier temps, de lier les premiers pas vers la simulation de l'aléatoire à l'introduction de concepts théoriques difficiles tel celui de modèle.

La partie qui suit n'a pas pu être traitée en séance, elle est à travailler hors classe.

2.2. Simuler les fluctuations

On touche là à une deuxième raison d'être de la notion de fluctuation : si l'on extrait un échantillon d'une population de structure connue ou supposée connue, à quoi peut-on s'attendre quand à cet échantillon ?

Un exemple classique à cet égard est le jeu de pile ou face : si la pièce est bien équilibrée, on s'attend à avoir à peu près autant de piles que de faces. Voici par exemple ce qu'on obtient avec des échantillons de taille 10 :

										Piles	Faces
1	1	1	2	1	2	1	1	2	1	**7**	**3**
1	2	1	1	1	1	2	1	2	2	6	4
2	2	1	1	1	2	1	2	2	1	5	5
2	2	1	2	1	2	1	2	2	2	**3**	**7**
1	1	1	1	1	2	1	2	1	1	**8**	**2**
2	2	2	1	1	2	1	2	1	1	5	5
1	1	2	2	1	1	2	1	1	2	6	4
2	1	1	2	1	1	2	1	1	2	6	4
1	2	2	2	2	1	2	2	2	1	**3**	**7**
2	2	2	1	2	1	1	1	1	1	6	4
1	2	1	2	1	1	2	1	1	2	6	4
2	1	1	2	2	1	2	2	1	2	4	6
1	2	1	2	2	2	1	2	2	1	4	6
1	1	2	1	1	1	2	2	1	2	6	4

[Open office ; =ALEA.ENTRE.BORNES(1;2) ; Piles : =SOMME.SI(A7:J7;1) ; Faces = 10 – piles]

4 distributions sur les 14 présentées sont « fortement dissymétriques ».

Nous examinerons ici un problème, fort connu, celui du Chevalier de Méré que Pascal expose ainsi à Fermat dans une lettre du 29 juillet 1654 :

> Je n'ai pas le temps de vous envoyer la démonstration d'une difficulté qui étonnait fort M. de Méré ; car il a très bon esprit, mais il n'est pas géomètre. C'est, comme vous savez, un grand défaut. Il me disait donc qu'il avait trouvé difficulté sur les nombres pour cette raison : Si on entreprend de faire un 6 avec un dé, il y avantage de l'entreprendre par quatre coups. Si on entreprend de faire « sonnez » avec deux dés, il y a désavantage de l'entreprendre en vingt-quatre coups, et néanmoins 24 est à 36, qui est le nombre des faces de deux dés, comme 4 est à 6, qui est le nombre des faces d'un dé. Voilà qui était son grand scandale qui lui faisait dire hautement que les propositions n'étaient pas constantes et que l'Arithmétique se dément.

Si l'on fait rouler un dé équilibré, on peut « avoir avantage » à parier qu'on amènera un 6 en quatre lancers, c'est-à-dire que, plus d'une fois sur deux en moyenne, il se trouvera un 6 parmi les quatre sorties. La première chose à faire, *aujourd'hui*, c'est de tenter de vérifier cette « croyance » *par une simulation* : c'est ce qu'on fera en 2de.

Chaque trinôme de participants effectue une simulation qui permet de se faire une idée de la validité de cette proposition.

Voici par exemple 50 séries de quatre lancers d'un dé.

3 – 5 – 3 – 6 // 4 – 3 – 1 – 4 // 5 – 6 – 3 – 3 // 2 – 3 – 1 – 5 // 1 – 5 – 5 – 5 // 2 – 1 – 6 – 6 // 6 – 4 – 5 – 4 // 1 – 5 – 4 – 1 // 4 – 1 – 4 – 5 // 2 – 1 – 2 – 1 // 6 – 2 – 2 – 3 // 4 – 4 – 4 – 4 // 3 – 4 – 2 – 6 // 5 – 4 – 2 – 2 // 3 – 4 – 3 – 1 // 5 – 3 – 6 – 5 // 1 – 1 – 5 – 3 // 2 – 2 – 1 – 2 // 1 – 4 – 3 – 4 // 3 – 4 – 1 – 6 // 3 – 2 – 4 – 2 // 3 – 6 – 2 – 1 // 4 – 2 – 3 – 3 // 2 – 6 – 6 – 4 // 4 – 4 – 5 – 4 // 2 – 1 – 4 – 3 // 6 – 6 – 6 – 4 // 5 – 5 – 5 – 6 // 2 – 1 – 4 – 6 // 6 – 1 – 3 – 2 // 3 – 2 – 5 – 2 // 2 – 1 – 1 – 1 // 5 – 6 – 4 – 1 // 1 – 2 – 4 – 6 // 3 – 5 – 6 – 5 // 1 – 5 – 3 – 4 // 6 – 3 – 1 – 4 // 4 – 6 – 3 – 4 // 4 – 6 – 6 – 4 // 3 – 6 – 5 – 6 // 6 – 5 – 4 – 1 // 1 – 2 – 5 – 1 // 2 – 5 – 3 – 2 // 2 – 3 – 2 – 6 // 3 – 4 – 5 – 4 // 4 – 6 – 3 – 6 // 4 – 6 – 4 – 5 // 6 – 6 – 1 – 2 // 2 – 2 – 5 – 3 // 5 – 2 – 4 – 4

Parmi ces 50 séries, 24 contiennent un 6, ce qui est donc moins que « prévu » (ou qu'espéré) ! L'examen d'autres séries de quatre lancers permettrait de voir s'il s'agit là d'un fait un peu exceptionnel, ou bien s'il faut conclure par exemple que, s'il y a « avantage », celui-ci est fort limité… Si l'on avait parié d'obtenir un 6 en cinq lancers – mais il aurait fallu trouver un parieur qui relève le défi ! –, les 40 séries de 5 lancers ci-après semblent suggérer que l'affaire aurait été sensiblement plus avantageuse, puisqu'on y compte 23 séries (sur 40) contenant un 6.

3 – 5 – 3 – 6 – 4 // 3 – 1 – 4 – 5 – 6 // 3 – 3 – 2 – 3 – 1 // 5 – 1 – 5 – 5 – 5 // 2 – 1 – 6 – 6 – 6 // 4 – 5 – 4 – 1 – 5 // 4 – 1 – 4 – 1 – 4 // 5 – 2 – 1 – 2 – 1 // 6 – 2 – 2 – 3 – 4 // 4 – 4 – 4 – 3 – 4 // 2 – 6 – 5 – 4 – 2 // 2 – 3 – 4 – 3 – 1 // 5 – 3 – 6 – 5 – 1 // 1 – 5 – 3 – 2 – 2 // 1 – 2 – 1 – 4 – 3 // 4 – 3 – 4 – 1 – 6 // 3 – 2 – 4 – 2 – 3 // 6 – 2 – 1 – 4 – 2 // 3 – 3 – 2 – 6 – 6 // 4 – 4 – 4 – 5 – 4 // 2 – 1 – 4 – 3 – 6 // 6 – 6 – 4 – 5 – 5 // 5 – 6 – 2 – 1 – 4 // 6 – 6 – 1 – 3 – 2 // 3 – 2 – 5 – 2 – 2 // 1 – 1 – 1 – 5 – 6 // 4 – 1 – 1 – 2 – 4 // 6 – 3 – 5 – 6 – 5 // 1 – 5 – 3 – 4 – 6 // 3 – 1 – 4 – 4 – 6 // 3 – 4 – 4 – 6 – 6 // 4 – 3 – 6 – 5 – 6 // 6 – 5 – 4 – 1 – 1 // 2 – 5 – 1 – 2 – 5 // 3 – 2 – 2 – 3 – 2 // 6 – 3 – 4 – 5 – 4 // 4 – 6 – 3 – 6 – 4 // 6 – 4 – 5 – 6 – 6 // 1 – 2 – 2 – 2 – 5 // 3 – 5 – 2 – 4 – 4

En sens inverse, parier sur la sortie de 6 en trois coups apparaîtra nettement plus risqué…

Bien entendu, on pourra aussi explorer par simulation la seconde « croyance » du chevalier de Méré – le fait qu'il y aurait avantage à parier sur la sortie de deux 6 (« sonnez ») en 24 lancers de deux dés.

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2009-2010

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 16 : mardi 2 février 2010

Programme de la séance. 1. Questionnaire d'évaluation // 2. Forum des questions // 3. La question de l'orientation // 4. Recherches dans les archives

Pour information : La réunion des maîtres de stages aura lieu le mercredi 24 février à 14 h 30 sur le site de la canebière.

1. Questionnaire d'évaluation

On reviendra ici brièvement sur les questionnaires d'évaluation qui ont été renseignés le 12 janvier 2010.

Comme il a été dit lors de la dernière séance, pour la grande majorité de la promotion, l'entrée dans la problématisation du métier semble effectuée. Pour l'essentiel, les points positifs de la formation mentionnent les différents dispositifs de la formation didactique et disciplinaire et le travail qui y est accompli. Trois réponses mentionnent les FIT. Les points négatifs de la formation tournent principalement autour des FIT et des GFP IT qui débutaient alors, du manque de travail à propos du C2i2e et du manque de travaux dirigés.

On notera que du travail avait été effectué à propos du C2i2e, notamment du point de vue de l'utilisation des TICE pour la réalisation d'un moment exploratoire et d'un moment technologico-théorique, même s'il n'avait pas été identifié comme tel. On travaillera davantage ce point à la rentrée des vacances de février.

On commentera ci-dessous quelques réponses qui révèlent un évitement ou, au moins, une compréhension encore très incomplète de certaines composantes de la formation.

• Le temps d'attente entre le moment où l'on pose une question et le moment où l'on nous donne les matériaux de réponse.
• Les questions de la semaine. L'équipe de professeurs de math de mon lycée est très soudée et travaille souvent ensemble. M'étant intégré dans l'équipe pédagogique, mes questions trouvent souvent leurs réponses bien avant d'arriver à l'IUFM. Du coup je trouve ce procédé systématique de début de GFP pas toujours pertinent.
• Le caractère non pas théorique mais un peu « angélique » du séminaire. On est loin des problèmes que l'on se pose régulièrement en cours. Les situations manquent de crédibilité, le bagage théorique, certes nécessaire, me paraît excessif et parfois indigeste.
• Beaucoup trop théorique. Pas assez pratique. Peu de réponses aux questions du jour (peut-être pas assez intéressantes).
• Les exemples étudiés sont souvent « trop bien construits » dans le bon ordre de ce que doit faire un

professeur. Il serait peut-être aussi bien de voir quelques exemples de mauvaises séances et de voir comment les améliorer.

On essaiera ci-après de préciser encore certains points, intrinsèquement liés à la démarche de formation.

1. D'une part, les connaissances théoriques ne sont pas déconnectées des pratiques : elles permettent de les produire, de les justifier, de les rendre intelligibles.

Il se peut cependant que certains ingrédients apparaissent provisoirement ne renvoyant à aucune pratique, soit parce qu'ils ont émergé sans fonction technologico-théorique (bien que l'on s'efforce de ne pas le faire dans ce séminaire, il est possible que cela nous échappe...), soit parce que la fonction technologico-théorique n'a pas été vue ou comprise ou encore suffisamment développée. Il faut dans les deux cas se donner les moyens de déterminer la fonction technologico-théorique des ingrédients en jeu, en examinant avec leur secours les difficultés rencontrées et en posant des questions (par le biais des questions de la semaine notamment).

En outre, les exemples examinés sont le fait d'élèves professeurs « ordinaires » des années précédentes une fois passée à peu près la moitié de la formation : il reste encore beaucoup de défauts, que l'évaluation met en évidence et que le développement tente d'améliorer.

On ajoutera que les problèmes que l'on se pose dépendent très directement des connaissances dont on dispose, connaissances dont les savoirs sont généralement des pourvoyeurs indispensables : ainsi, s'il l'on ne sait pas que c'est la piqure d'une puce qui transmet la peste, on ne va pas se poser la question de l'évitement de la piqure des puces et essayer d'y apporter une réponse...

Dans cette perspective, penser qu'un collectif de professionnels apporte systématiquement des réponses du même ordre qu'un collectif de formation qui développe par ailleurs de la recherche pour satisfaire aux besoins de la profession revient à penser que les connaissances relatives à la guérison du sida seront toutes produites par des réunions de médecins généralistes dont certains patients sont atteints du VIH.

2. D'autre part, tenir ce discours est en consonance avec ce que pense la société du métier de professeur : c'est un « petit métier » (certains sociologues parlent de semi-profession[16]), pour lequel on n'a pas réellement besoin de formation professionnelle, pour lequel il n'y a pas véritablement de savoirs spécifiques à acquérir, etc. On donne donc par là la main à la péjoration sociale et culturelle du métier, qui crée bien des obstacles à son exercice.

3. Un certain nombre d'élèves professeurs n'ont, volontairement, pas rendu le questionnaire. Deux aspects nous paraissent devoir être soulignés à ce propos. D'une part, ils se désolidarisent ainsi du collectif d'étude que forment la promotion et ses formateurs et handicapent donc son travail ; d'autre part, ils manifestent une incompréhension du didactique qui, pour des aspirants professionnels de la chose, paraît préoccupante : en effet, le moment de l'évaluation est un moment nécessaire de l'étude, à la fois pour mettre en perspective la « qualité » du rapport que l'on entretient avec l'objet d'étude mais aussi pour évaluer l'objet d'étude lui-même.

4. Les points positifs et négatifs relatifs au travail personnel lié à la formation témoignent dans l'ensemble de progrès effectués dans la capacité à mettre en œuvre un certain nombre de praxéologies (parmi lesquelles la principale citée est la fabrication et la réalisation d'AER) mais

16. Cette notion a été popularisée autrefois par Amitai Etzioni dans son livre *The semi-professions and their organizations : teachers, nurses and social worker* (New York Free Press, 1969).

aussi dans l'identification des aspects qui restent à travailler. À cet égard, plusieurs citent le fait de ne pas avoir le temps de travailler les éléments de la formation, ou encore de donner la priorité au stage en responsabilité : on insistera sur le fait que la progression dans le stage en responsabilité est fortement corrélée au travail effectué sur les éléments de la formation, si « théoriques » ou « angéliques » qu'ils paraissent.
On notera enfin que, pour certains encore, la différence entre les questions 1 et les questions 2 n'a pas pris tout son sens. On rappelle que, une formation étant donnée, il y a plusieurs façons de l'investir et la deuxième série de questions porte précisément sur la façon d'investir la formation, en demandant un aspect positif et un aspect négatif de cet investissement.

2. Forum des questions

À propos d'AER – médiatrice en classe de 6^e^

J'aimerais poser une activité de ce genre : on a trois points A, B et C, comment placer un point à égale distance de ces trois points ? 1) Si je n'ai pas fait le cours sur les médiatrices y a-t-il une chance que les élèves trouvent ? 2) Comment réagir s'ils disent « c'est ce point, monsieur, regardez, ça marche » ? Ou comment l'éviter ? 3) Comment faire en sorte pour que la classe ne s'agite pas (même si les élèves parlent de ce que l'on fait) ? (FA, 15)

Dans la réalisation d'une AER, le fait que « les élèves trouvent » n'est pas une question de « chance » mais une question de conception et de préparation de l'AER de façon à ce qu'ils aient suffisamment de milieu et que le réseau des questions cruciales soit suffisamment dense.
À propos de la médiatrice en sixième, on examinera le compte rendu d'observation d'une classe de 6^e^ reproduit ci-dessous que nous commenterons rapidement.

Il est 15h10 et on en vient donc à l'activité que P distribue (voir ci dessous). La feuille est à coller sur le cahier.
P lit le texte de l'activité et explique : « Vous avez le dessin de la planche avec les deux aimants qui sont en *A* et *B*. Vous lancez la bille doucement car il faut lui laisser le temps de rouler, à partir de la zone de départ pour aller jusqu'à la zone d'arrivée. Le problème est donc : comment lancer la bille pour gagner ? Si on est à la même distance des deux aimants, comme l'un n'est pas plus fort que l'autre, la bille continue d'avancer. Par contre si on est plus près d'un aimant, la bille va être attirée. Est-ce que quelqu'un a une idée, un endroit à me proposer sur la planche où il est sûr que la bille va passer ? ».

[*Commentaire 1 : P empiète sur le topos des élèves. Il aurait fallu laisser quelques minutes aux élèves pour prendre connaissance de l'activité et leur demander d'expliquer l'objet du travail ; Puis quelques minutes encore pour déterminer la trajectoire avant de demander des propositions.*]

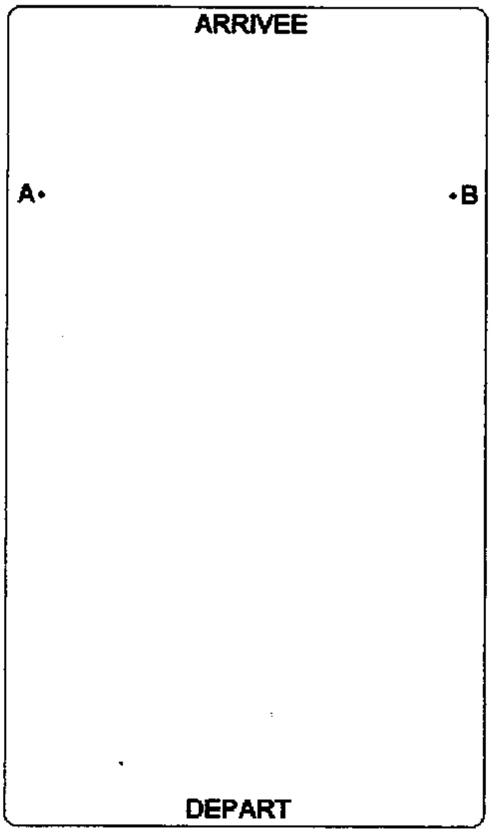
Sa propose de tracer le segment [*AB*] et de prendre le milieu. P. acquiesce, explicite [commentaire 2], et demande aux élèves de tracer [*AB*] pour l'instant avec la règle, de mesurer le segment, il doit faire 7cm et de placer à 3,5 cm le milieu du segment. P rappelle qu'on cherche les points à égale distance de A et B et demande si les élèves ont un autre point à proposer.

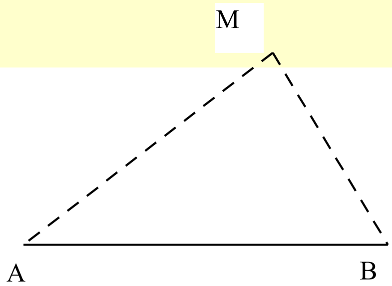
[*Commentaire 2 : Là encore, P empiète sur le topos des élèves. Il aurait été plus productif de solliciter l'élève pour décrire la technique et de demander aux élèves de valider l'assertion proposée (et la technique également).*

Commentaire 3 : Le rappel par P de ce qu'il s'agissait de chercher n'est pas fonctionnel ; il aurait pu d'abord demander d'autres propositions. Puis demander ce qu'il s'agit d'obtenir. La question : comment peut-on savoir qu'un point est à égale distance de A et de B ? s'avère cruciale.]

Dans un stand d'une kermesse on a installé un jeu d'adresse. Il s'agit de lancer sur une planche une bille métallique entre deux gros aimants. Si la bille reste toujours à égale distance des aimants elle peut traverser la planche et l'on gagne la partie. Si elle se rapproche de l'un des aimants, celui-ci attire la bille qui vient se coller dessus et la partie est perdue.

On a représenté la planche et les deux aimants (A et B) sur le dessin ci dessous.
Tracer le trajet de la bille pour gagner la partie.





La classe réfléchit, des élèves discutent entre eux et P trace au tableau en oralisant le point *A*, le point *B*, prend un point *M* quelconque (voir figure ci-contre) et demande si ce point *M* est à égale distance de *A* et de *B*.

[*Commentaire 4 : Là encore, c'est P qui prend l'initiative, alors qu'il aurait pu la faire émerger des travaux des élèves : est-ce que vous avez fait des essais ? Comment vous y êtes-vous pris ? Etc.*]

La classe répond que non, il est plus près de *B*. Le professeur demande alors comment devrait être le triangle *AMB* pour que *M* soit à égale distance de *A* et de *B*. Certains élèves disent « rectangle », d'autres « isocèle ».
P « Oui, isocèle ; donc on va tracer plusieurs, on ne va pas tracer les triangles, ça ne serait pas beau et ça nous servirait à rien ; on va tracer des points qui soient des sommets de triangles isocèles ». Il demande à Li : « comment fait-on pour tracer un triangle isocèle ? », rappelant qu'on a pour base [*AB*] et qu'il s'agit de construire le sommet, *M*.

Li commence mais P l'arrête en lui disant qu'elle est en train de construire un triangle équilatéral. Li reprend la description de la construction « on prend le compas, on prend une longueur et on écarte le compas, on trace un arc

à partir de A et à partir de B » et P réalise la construction au tableau avec le compas, en précisant : « là, on est sûr que *M* est à égale distance de *A* et de *B »*.
P : « Avec votre compas, vous tracez 5 ou 6 points comme celui que l'on vient de tracer au tableau ».

Les élèves s'affairent, P. passe dans les rangs et donne des conseils.
Un élève propose de tracer la perpendiculaire passant par le milieu de [*AB*]. P « Oui, mais on va d'abord la tracer point par point et quand on rejoindra les points on verra que, effectivement, c'est la perpendiculaire passant par le milieu ». Un élève propose de tracer les triangles et P. répète en s'adressant à la classe : « Non, vous ne mettez que les sommets et on les tracera sur la planche ». Puis plus tard : « Ce que je veux, c'est qu'avec le compas vous traciez plusieurs points. Essayez d'en tracer un qui soit entre la ligne d'arrivée et le segment [*AB*]. Un près du départ, un près de l'arrivée, trois ou quatre entre. ».
P va au tableau pour montrer à Am ce qu'il faut faire pour construire un triangle isocèle.

[*Commentaire 5 : P empiète une nouvelle fois sur le topos des élèves. Il aurait pu noter la proposition en demandant de la mettre à l'épreuve par exemple. Il est également assez directif du point de vue du tracé des points, il aurait pu laisser faire, puis mettre à l'épreuve les tracés effectués.*]

Il est 15h21 et P s'adresse à la classe: « une fois qu'on a tous ces points, on peut tracer la ligne qui les rejoint ». Il laisse les élèves le faire sur leur feuille.

[*Commentaire 6 : P affirme ainsi que la trajectoire est une droite, alors qu'il s'agirait de le faire émerger et de le mettre à l'épreuve.*]

Deux minutes plus tard P annonce : « Une fois que vous avez tracé cette droite, c'est effectivement le résultat que certains attendaient ; à peu de choses près, vous avez une droite qui est perpendiculaire au segment [*AB*] et comme cette perpendiculaire passe par le milieu on est à peu près sûrs qu'on vient de tracer la médiatrice » et il fait le tracé au tableau.

[*Commentaire 7 : Même chose : c'est P qui affirme au lieu de le faire émerger, en demandant d'abord par exemple : Vous avez tracé la droite ; quels conseils pourrait-on donner à un joueur pour qu'il augmente ses chances de gagner ? ; puis en mettant à l'épreuve les réponses obtenues et éventuellement en faisant préciser les formulations.*]

Puis il poursuit : « En fait, cela va être une propriété de la médiatrice que certains d'entre-vous connaissaient, tous les points de la médiatrice sont tous les points qui sont à la même distance de *A* et de *B*. On va aller côté synthèse et on va noter ce résultat-là ».

[*Commentaire 8 : La synthèse arrive trop tôt : en particulier, on n'a pas encore dégagé les aspects pratiques de l'OM enjeu de l'étude.*]

Les élèves retourne leur cahier, P s'assure que « tout le monde y est », rappelle « Attention, la fiche vous la collez côté activités, exercices ».
P demande aux élèves de sauter une ligne puis écrit au tableau en l'exprimant oralement :

> *III. Construction de la médiatrice au compas.*

Il précise que la règle sert à la tracer, mais qu'on ne l'utilisera pas pour mesurer et enchaîne : « on va noter une propriété ». Il écrit au tableau en oralisant :

> *<u>Propriété</u> : Les points de la médiatrice d'un segment [AB] sont les points <u>à égale distance</u>*

Il s'interrompt pour expliquer : Il y a un mot mathématique pour dire "à égale distance", c'est équidistant » ; il finit d'écrire :

> *<u>Propriété</u> : Les points de la médiatrice d'un segment [AB] sont les points <u>à</u> <u>égale distance</u> (équidistants) de A et B.*

Reprend l'explication de équidistant et ajoute : « c'est un mot qui est construit comme un autre mot que vous connaissez », des élèves répliquent : « équilatéral », et P poursuit : « équilatéral, on avait dit que cela voulait dire, mêmes côtés. Dans un triangle, tous les côtés sont identiques et là c'est la même construction qu'équilatéral ».

P : « Alors, ça marche dans les deux sens, ça veut dire, si vous avez un point de la médiatrice vous êtes sûrs qu'il est à la même distance de *A* et de *B ;* et on peut l'utiliser dans l'autre sens : si vous voulez un point à égale distance de *A* et *B*, il faudra aller le chercher sur la médiatrice, il n'y a pas d'autres points. Dès qu'on s'écarte de la médiatrice, on est plus près soit d'un point soit de l'autre. » Il développe cet argument en reprenant l'exemple pris dans l'activité puis ajoute : « On a coupé les points en trois parties. Vous avez les points plus près de *A*, les points plus près de *B* et entre les deux, les points qui sont à la même distance de *A* et de *B*. »
Un élève fait remarquer que « c'est normal. La médiatrice du segment est au milieu du segment ». P : « Non, elle n'est pas au milieu, elle passe par le milieu ; si je trace une droite comme ça, elle passe aussi par le milieu du segment mais tous les points de la droite… Ce point par exemple, il est nettement plus près de A que de B ».
Il fait ensuite remarquer que la médiatrice du segment [*AB*] est un axe de symétrie de [*AB*] [17] ; c'est celui qui passe par le milieu. Donc si on prend un point *C* sur la médiatrice de [AB], quand on trace le symétrique de [*AC*], il passe par *C* – comme il est sur l'axe, il n'a pas bougé – et il passe par *B* parce que *A* et *B* sont symétriques ; si on plie, on aura bien, distance *AC* égale à la distance *AB*. Il ajoute que c'est ce qui a été vu précédemment dans l'exercice.

P : « Vous retenez la propriété et on va écrire au dessous ce que l'on vient de faire, c'est-à-dire la méthode pour tracer la médiatrice au compas. En fait, on va utiliser cette propriété-là pour tracer la médiatrice au compas. Il suffira de deux points – pour toute droite, on n'a besoin que de deux points pour la tracer –, on en trace un en haut, un en bas par exemple et il suffit de tracer à partir de *A* et de *B*, deux triangles isocèles, et on aura la médiatrice. »

On note donc :
Tracé de la médiatrice au compas
Un élève interroge P sur la signification du mot « tracé » et P explicite. Puis la méthode est écrite au tableau. On obtient d'abord :
<u>Première étape</u> : Placer un point à égale distance de A et de B avec le compas.
P précise : « Je ne l'explicite pas, vous l'avez déjà appris dans la toute première leçon faite en géométrie au début de l'année ».
On en vient donc à la deuxième étape :
<u>Deuxième étape</u> : Placer un second point à égale distance de A et de B
<u>Dernière étape</u> : Tracer la droite qui passe par ces deux points
Il est 15h.37. La cloche sonne ; un élève fait une remarque qui amène P à préciser que cette droite est la médiatrice et elle est donc perpendiculaire à *[AB*]. P réclame le silence et demande de sortir les cahiers de textes.
Il écrit au tableau en explicitant oralement le travail à faire pour le lundi suivant, le 11 mars : il s'agit de rédiger l'exercice 54 sur feuille en expliquant la construction, et de faire un exercice que P distribue sur une feuille « à coller dans le cahier » (voir annexes). P ramasse les livres et la séance se termine.

Dans l'extrait de séance étudié ici, on a affaire à l'émergence d'un élément technologique, le résultat $\theta_{med\_éq}$: la médiatrice du segment [AB] est l'ensemble des points équidistants de A et de B, ainsi qu'à la technique de construction à la règle et au compas de la médiatrice d'un segment (et du milieu d'un segment) qu'il va permettre de produire.

L'émergence de cette OM prend appui sur des éléments d'organisations mathématiques déjà étudiées : le résultat θ_{med_per}, la médiatrice du segment [AB] est la droite perpendiculaire à (AB) passant par le milieu de [AB] ; l'organisation mathématique relative au type de tâches T_{ctr_iso} : « construire un triangle isocèle ». Ces éléments font partie ici de l'organisation de l'étude, de la praxéologie didactique mise en œuvre par le professeur puisqu'ils permettent la réalisation du moment technologico-théorique et du moment exploratoire. Il faudrait s'assurer, par exemple par un test d'entrée, que ces éléments sont effectivement connus des élèves. Si l'on n'a pas l'élément θ_{med_per}, on pourra bien entendu, une fois que l'on a mis en évidence que le lieu des points cherchés est une droite qui a certaines caractéristiques, la nommer.

Le travail effectué peut être regardé comme un établissement expérimental du résultat $\theta_{med\_éq}$; mais

17. P fait référence à la droite (AB) que les élèves avaient mis en évidence précédemment lors de l'émergence de l'OM.

l’expérience n’est effectuée que sur un cas, celui du segment [AB] de la planche distribuée. On pourrait dès lors contester la véracité de ce fait expérimental : peut-être n’est-ce qu’un heureux hasard, qui ne vaut qu’avec ce segment particulier. Il faudrait donc, pour réaliser véritablement l’expérience, que le travail soit fait sur plusieurs segments, ce qui peut être réalisé à peu de frais dans la classe en distribuant à chaque élève une planche différente, ou encore une planche pour un binôme ou un trinôme d’élève de manière à éprouver les résultats obtenus : on aurait ainsi une dizaine d’expériences, et il faudrait d’ailleurs varier la position des aimants de façon à ce que la droite (AB) ne soit pas toujours parallèle au bord de la planche. On pourrait ensuite penser à convoquer un logiciel de géométrie pour mettre à l’épreuve le travail envisagé.

Le professeur rate, dans le travail de l’activité, l’émergence de la technique de construction à la règle et au compas : il aurait dû laisser les élèves construire leurs triangles équilatéraux et voir d’eux-mêmes qu’il était inutile de tracer les triangles ; et faire faire sans doute au moins un autre cas (avec une position d’aimants différents) pour obtenir un bilan d’étape contenant la construction à la règle et au compas.

On ajoutera que, dans le travail de l’AER, le fait que les élèves s’agitent ou discutent n’est pas un souci : il y a du « bon bruit », à condition bien évidemment qu’il garde des proportions raisonnables.

Fonctions affines et équations de droites

Dans la progression commune de 2^{de} choisie par les professeurs du lycée il est prévu de faire un chapitre sur les équations de droites et systèmes puis plus tard dans l’année un chapitre sur les fonctions de référence dans lequel on doit inclure les fonctions affines. Or je trouve que la raison d’être (motivation) du chapitre équations de droites et systèmes vient de l’étude de situations mettant en jeu les fonctions affines. Exemple : un skieur a le choix entre deux forfaits : forfait A : Abonnement 20 € + 5 € / jour ; forfait B : Abonnement 30 € + 3 € / jour. Le skieur reste une semaine au ski, quel forfait est le plus intéressant ? Il y a un devoir commun prévu au second trimestre qui portera sur le chapitre équations de droites et systèmes (et d’autres chapitres...) alors que nous n’aurons pas encore abordé les fonctions affines. Comment faire face à ce problème ? Dois-je abandonner la progression commune ? Ai-je raison de penser que la raison d’être du chapitre équations de droites et systèmes vient d’exercices mettant en jeu les fonctions affines ? (EF, 13)
Comment introduire les équations de droite ? En faisant référence rapidement aux fonctions affines ? Ou en leur faisant calculer l’équation d’une droite (médiatrice par exemple) avec des propriétés liées à cette droite, qui montrerait que les équations sont du type $y = ax + b$ par expérimentation ? (TT, 13)
Est-ce une bonne idée de traiter en parallèle les équations de droites et les fonctions affines ? Les deux notions sont très liées, mais y a-t-il un risque (important) de perdre les élèves ? (PB, 15)

Les thèmes des fonctions affines et des droites sont évidemment liés du fait que la représentation graphique d’une fonction affine est une droite, et qu’à une droite donnée non parallèle à l’axe des ordonnées, on peut associer une fonction affine : ces aspects sont au programme de la classe de 3e.

Objectifs		
La résolution de problèmes a pour objectifs • de synthétiser le travail conduit sur la proportionnalité dans les classes antérieures, d'approcher la notion de fonction et d'acquérir une première connaissance des fonctions linéaires et affines, • de poursuivre la mise en place de paramètres de position et de dispersion d'une série statistique, • d'initier à la notion de probabilité par l'étude d'exemples simples.		
Connaissances	**Capacités**	**Commentaires**
1.1. Notion de fonction *Image, antécédent, notations* $f(x)$, $x \mapsto f(x)$. [Thèmes de convergence]	*- Déterminer l'image d'un nombre par une fonction déterminée par une courbe, un tableau de données ou une formule.* *- Déterminer un antécédent par lecture directe dans un tableau ou sur une représentation graphique.*	*Toute définition générale de la notion de fonction et la notion d'ensemble de définition sont hors programme.* *La détermination d'un antécédent à partir de l'expression algébrique d'une fonction n'est exigible que dans le cas des fonctions linéaires ou affines.*
1.2 Fonction linéaire, fonction affine. Proportionnalité.		En classe de troisième, il s'agit de compléter l'étude de la proportionnalité par une synthèse d'un apprentissage commencé à l'école primaire.

Connaissances	Capacités	Commentaires
Fonction linéaire. *Coefficient directeur de la droite représentant une fonction linéaire.*	*- Déterminer par le calcul l'image d'un nombre donné et l'antécédent d'un nombre donné.* *- Déterminer l'expression algébrique d'une fonction linéaire à partir de la donnée d'un nombre non nul et de son image.* *- Représenter graphiquement une fonction linéaire.* *- Connaître et utiliser la relation y=ax entre les coordonnées (x,y) d'un point M qui est caractéristique de son appartenance à la droite représentative de la fonction linéaire* $x \mapsto ax$. *- Lire et interpréter graphiquement le coefficient d'une fonction linéaire représentée par une droite*	L'utilisation de tableaux de proportionnalité permet de mettre en place le fait que le processus de correspondance est décrit par une formulation du type « je multiplie par *a* ». *Cette formulation est reliée à* $x \mapsto ax$. Pour des pourcentages d'augmentation ou de diminution, le fait que, par exemple, augmenter de 5 % c'est multiplier par 1,05 et diminuer de 5 % c'est multiplier par 0,95 est établi. *Certains traitements des situations de proportionnalité utilisés dans les classes précédentes sont reliés aux propriétés d'additivité et d'homogénéité de la fonction linéaire.*
Fonction affine. *Coefficient directeur et ordonnée à l'origine d'une droite représentant une fonction affine.* [Thèmes de convergence]	*- Déterminer par le calcul l'image d'un nombre donné et l'antécédent d'un nombre donné.* *- Connaître et utiliser la relation y=ax + b entre les coordonnées (x,y) d'un point M qui est caractéristique de son appartenance à la droite représentative de la fonction linéaire* $x \mapsto ax + b$. *- Déterminer une fonction affine à partir de la donnée de deux nombres et de leurs images.* *- Représenter graphiquement une fonction affine.* *- Lire et interpréter graphiquement les coefficients d'une fonction affine représentée par une droite.* *- Déterminer la fonction affine associée à une droite donnée dans un repère.*	*Parmi les situations qui ne relèvent pas de la proportionnalité, certaines sont cependant modélisables par une fonction dont la représentation graphique est une droite. Cette remarque peut constituer un point de départ à l'étude des fonctions affines. Pour les fonctions affines, la proportionnalité des accroissements de x et y est mise en évidence.*

Du point de vue de la classe de 2de, il s'agit de reprendre ces aspects « géométriques », mais également de les prolonger : d'une part, en caractérisant analytiquement une droite ; d'autre part, en travaillant sur les questions d'alignement de points, de parallélisme et d'intersection dans le cadre de situations géométriques.

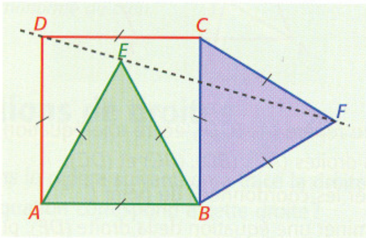
Droites Droite comme courbe représentative d'une fonction affine.	• Tracer une droite dans le plan repéré. • Interpréter graphiquement le coefficient directeur d'une droite.	
Équations de droites.	• Caractériser analytiquement une droite.	On démontre que toute droite a une équation soit de la forme $y = mx + p$, soit de la forme $x = c$.
Droites parallèles, sécantes.	• Établir que trois points sont alignés, non alignés. • Reconnaître que deux droites sont parallèles, sécantes.	On fait la liaison avec la colinéarité des vecteurs.
	• Déterminer les coordonnées du point d'intersection de deux droites sécantes.	C'est l'occasion de résoudre des systèmes d'équations linéaires

Du point de vue des fonctions, on a à travailler notamment la question de la croissance et de la décroissance des fonctions affines, qui n'a pas été étudiée en troisième, en relation avec le signe des expressions algébriques, question qui n'apparaît pas pertinente du point de vue de la géométrie ; et également la modélisation de situations par des fonctions affines qui ne relève généralement pas de la géométrie (voir ci-dessous la question sur les fonctions de référence).

Fonctions de référence Fonctions linéaires et fonctions affines	• Donner le sens de variation d'une fonction affine. • Donner le tableau de signes de $ax + b$ pour des valeurs numériques données de a et b.	On fait le lien entre le signe de $ax + b$, le sens de variation de la fonction et sa courbe représentative.

Une solution qui prenne en compte ces aspects et les contraintes de progression commune des établissements pourrait être de prendre appui, dans le travail sur les droites, sur les acquis de la classe de 3e – acquis dont on s'assure la maîtrise par un test d'entrée et à propos desquels on réalise si nécessaire un travail transitionnel. On examine alors la question de la caractérisation de l'alignement de points donnés par leur coordonnées (ou encore celle de l'appartenance d'un point à une droite) qui permet de mettre en place la notion d'équation de droite, dont une raison d'être géométrique est de donner des techniques d'étude de configurations comme en témoignent les énoncés suivants extraits d'un ouvrage pour la classe de 2de (Collection Indice, éditions Bordas 2009, pages 242) – ce qui permettra notamment d'introduire la caractérisation du parallélisme. Il restera ensuite, dans le cadre du travail sur les fonctions de références, à travailler sur les aspects de sens de variation et de modélisation.

78. * $ABCD$ est un carré, ABE et CBF sont des triangles équilatéraux. Le but de cet exercice est de démontrer que la droite (DE) passe par F.



1. *Méthode analytique*
On se place dans le repère orthogonal $(A ; B, D)$.
a. Déterminer les coordonnées des points B, D et E.
b. Écrire une équation de la droite (DE).
c. Quelles sont les coordonnées de F?
d. Montrer que (DE) passe par F.

2. *Méthode géométrique*
a. Déterminer les angles $\widehat{CDF}$, $\widehat{FBE}$ et $\widehat{DAE}$.
b. En déduire les angles $\widehat{BEF}$ et $\widehat{AED}$, puis conclure.

79. On donne les points $A\ (1 ; 0)$, $B\ (5 ; 0)$, $C\ (3 ; 2)$ et $D\ (2 ; 2)$.

1. Placer ces points dans le plan.

2. Déterminer une équation de chacune des droites (AC), (BD), (AD) et (BC).

3. On note K le point d'intersection des droites (AC) et (BD) et L le point d'intersection des droites (AD) et (BC). Déterminer les coordonnées des points K et L.

4. On note I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[CD]$. Calculer les coordonnées de I et de J.

5. Montrer que les points I, J, K et L sont alignés.

80. Soit d et d' les droites d'équations respectives :

$$y = -2x + 8 \quad \text{et} \quad y = -\frac{1}{2}x + 8.$$

1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection :
– A de d avec l'axe des ordonnées,
– B de d avec l'axe des abscisses,
– C de d' avec l'axe des abscisses.

2. Construire d et d' dans le plan.

3. La parallèle à l'axe des abscisses menée de A coupe en I la médiatrice du segment $[BC]$. Quelles sont les coordonnées de I?

4. Calculer IA, IB et IC. Quel est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC?

5. Soit A' le symétrique de A par rapport à O. Écrire une équation de la droite $(A'C)$.

6. Déterminer les coordonnées du point d'intersection K des droites (AB) et $(A'C)$.

7. Montrer que les droites (AB) et $(A'C)$ sont perpendiculaires.

81. Soit les droites d_1, d_2 et d_3 d'équations :

$$y = x + 3\ ; \quad y = -x + 5\ ; \quad y = \frac{1}{5}x + \frac{7}{5}.$$

Soit A le point d'intersection des droites d_1 et d_2, B celui des droites d_2 et d_3 et C celui des droites d_1 et d_3.

1. Déterminer les coordonnées des points A, B et C.

2. Soit $A'B'C'$ le triangle obtenu en menant par A, B et C les parallèles aux côtés opposés. Déterminer une équation de chacun des côtés du triangle $A'B'C'$.

3. Quel est le rapport des aires des triangles ABC et $A'B'C'$?

82. * Soit d et d' les droites d'équations $y = mx$ et $y = m'x$, où m et m' sont des réels.

1. Calculer les coordonnées du point A de d, d'abscisse 1, et du point A' de d', d'abscisse 1.

2. Montrer que d et d' sont perpendiculaires si et seulement si le triangle OAA' est rectangle en O.

3. En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur m et m' pour que les droites d et d' soient perpendiculaires.

83. Soit les points $A\ (5 ; -1)$ et $B\ (3 ; 3)$.

1. Montrer qu'un point M du plan appartient à la médiatrice du segment $[AB]$ si et seulement si $MA^2 = MB^2$.

2. Soit M un point de coordonnées $(x ; y)$. Calculer MA^2 et MB^2.

3. En utilisant le résultat précédent, déterminer une équation de la médiatrice de $[AB]$.

84. ** Soit le triangle ABC, avec $A\ (-2 ; 3)$, $B\ (0 ; 1)$ et $C\ (2 ; 5)$.

1. Montrer que le point Ω est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC si et seulement si :

$$\Omega A^2 = \Omega B^2 = \Omega C^2.$$

2. Écrire un système de deux équations à deux inconnues dont les coordonnées de Ω sont solutions.

3. Déterminer les coordonnées de Ω.

4. Quel est le rayon du cercle circonscrit au triangle ?

Les fonctions de référence en seconde

Comment peut-on introduire les fonctions de référence en 2^{de} ? Pour la fonction inverse, j'avais pensé à partir d'un circuit électronique en physique. Avec la formule $U = RI$ et une intensité qui ne doit pas dépasser une certaine valeur, trouver la tension maximale (en testant avec des valeurs et tracer des nuages de points). Mais est-ce vraiment judicieux car il suffit qu'ils utilisent leur calculatrice pour avoir la représentation graphique de la fonction inverse ? De même pour la fonction carrée, peut-on simplement leur demander de tracer la fonction carrée (calculatrice ou ordinateur) et de lister tout ce qu'ils remarquent ? En fait, je pense que je n'arrive pas à voir les raisons d'être des fonctions de référence. (FD, 15)

Quelles raisons d'être pouvons-nous trouver pour introduire les fonctions de référence ? (CG, 15)

En seconde, les fonctions $x \rightarrow ax + b$, $x \rightarrow \frac{1}{x}$ et $x \rightarrow x^2$ sont des fonctions de « référence ». Comment faire émerger leurs raisons d'être en particulier pour les fonctions affines, fonctions déjà abordées en classe de 3^e ? (AMJ, 12)

Dans le programme de seconde, concernant les fonctions polynômes de degré 2 et les fonctions homographiques, il est écrit pour la première que « savoir mettre sous forme canonique un polynôme de degré 2 n'est pas un attendu du programme ». Peut-on tout de même le proposer à certains élèves qui ont plus de « facilités » que les autres (et qui souhaitent se diriger vers une 1^{re} S par exemple) ? (AMJ, 13)

En seconde, après avoir lu le programme, je ne comprends pas avec précision si, en fin de classe de seconde, les élèves doivent savoir démontrer qu'une fonction est croissante ($x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$) ou décroissante à partir de la forme canonique de l'expression de la fonction, ou s'il faut simplement qu'ils connaissent les propriétés des fonctions carré et inverse... (JC, 15)

On considérera d'abord ici la question des raisons d'être des « fonctions de référence ». Nous avons vu « en actes », par l'intermédiaire du travail effectué à propos de la séance sur l'optimisation de l'aire de baignade, que les fonctions permettent de modéliser la variation de grandeurs.

1. Dans cette perspective, la caractérisation des fonctions affines par le fait que l'accroissement de la fonction est proportionnel à l'accroissement de la variable permet d'affirmer que, chaque fois que l'on a un système pour lequel la relation entre deux grandeurs attachées à ce système x et y est telle que leurs augmentations sont proportionnelles, cette relation est modélisable par une fonction affine de la forme $y = ax + b$. Cette propriété peut s'énoncer d'une autre manière. En effet, cela revient à dire que, si f est affine, la fonction $x \mapsto f(x+u) - f(x)$ ne dépend pas de x, mais seulement de u et on a même $f(x+u) - f(x)$ est proportionnelle à u. Autrement dit, si on augmente la variable d'une quantité u, l'augmentation de l'image ne dépend pas du point à partir duquel on augmente la variable, mais seulement de la quantité avec laquelle on l'augmente. Cette propriété est illustrée dans les Archives du Séminaire par le problème suivant :

On imagine qu'on entoure la Terre – supposée être une sphère parfaite – avec une corde (qui s'identifie à l'un des grands cercles de la sphère). On augmente alors la longueur de cette corde d'un mètre seulement, et on suppose que la corde dessine encore un cercle parfait autour de la Terre, à une certaine distance de la surface du sol terrestre. Une souris pourrait-elle passer entre la corde et la Terre ?

➊ La réponse paraît *a priori* franchement ***négative***. Modélisons pourtant la situation évoquée : en désignant par r m le rayon de la Terre, par x m la longueur initiale de la corde, on a $x = 2\pi r$; $x+1 = 2\pi(r+\varepsilon)$. Il vient : $\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \approx 0{,}159\ldots$ La distance entre la surface du sol est la corde est donc d'environ 0,16 m = 16 cm. On trouve ainsi, de manière inattendue, que la souris passe... largement ! On voit en outre que la valeur de ε est ***indépendante*** de r.

❷ Ce résultat imprévu n'était pourtant pas ***imprévisible***. Considérons le rayon du cercle dessiné par la corde comme une fonction de la longueur x de la corde : $f(x) = 2\pi\ x$. La fonction f est donc affine (et même linéaire) ; par suite, lorsque x augmente de u, l'accroissement de f, soit $\varepsilon(x, u) = f(x + u) - f(x)$ ***ne dépend pas*** de la valeur x à partir de laquelle se fait l'augmentation, mais seulement de la valeur de u ; plus précisément $f(x + u) - f(x)$ est proportionnel à u, en vertu de la propriété ***caractéristique*** des fonctions affines : $f(x + u) - f(x) \propto u$. L'accroissement de la longueur de la corde à partir de $x = 2\pi r$ entraîne donc un accroissement du rayon qui est le même que celui qu'on obtiendrait à partir de n'importe quelle valeur de x, et par exemple que celui obtenu en remplaçant la Terre par... une balle de ping-pong – auquel cas notre intuition nous « assure » que la souris pourra passer.

❸ Cette étude pourra être prolongée, ultérieurement, par une comparaison, à cet égard, des fonctions affines par rapport aux fonctions convexes (telle x^2), pour lesquelles $x \mapsto f(x + u) - f(x)$ est ***croissante***, et aux fonctions concaves (telle $\sqrt{x}$), pour lesquelles $x \mapsto f(x + u) - f(x)$ est ***décroissante*** (les fonctions affines étant les seules fonctions ***à la fois*** convexes et concaves).

2. Pourquoi distinguer les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto 1/x$? Voici des éléments de réponse qu'apportaient les notes du séminaire 2008-2009 :

Voici par exemple l'organisation mathématique qu'un élève-professeur de l'IUFM d'Aix-Marseille avait constituée avant d'aborder le secteur des fonctions[18]. Cette analyse se présente sous la forme d'un fichier Excel comportant 3 feuilles : la première détaille les types de tâches et les techniques de l'OMR (organisation mathématique régionale, correspondant au secteur) selon le programme et les ouvrages pour la classe de seconde ; la deuxième, les raisons d'être de l'OM à étudier ; la troisième, une analyse de l'OM relative aux fonctions qui a dû être étudiée au collège dont on ne parlera pas ici. On trouvera ci-dessous l'analyse de l'OMR à étudier (pour des raisons pratiques, nous présentons « linéairement » ce qui, dans le fichier proposé, figure en deux colonnes) :

T1 identifier variable et ensemble de définition (fonction définie par courbe, tableau, formule) ;
τ1 : courbe: abscisse (x) ; tableau : 1re ligne ou colonne ; formule : variable de la formule (x ou autre) ;
T11 : dans quelques rares cas l'ensemble de définition ;
τ11 : cas fonction définie par formule: trouver les x pour lesquels on ne peut pas calculer l'image ;
T2 déterminer l'image d'un nombre (fonction définie par courbe, tableau, formule) ;
τ2 : courbe : tracer la verticale passant par ce nombre ; tableau : case correspondante au nombre donné ; formule : remplacer la variable par le nombre.
T3 décrire comportement d'une fonction définie par courbe…
τ3 : placer des flèches montantes ou descendantes en lisant la courbe de gauche à droite ; lire les abscisses des points extrémaux et de changement de sens ;
T31 : avec tableau variation ;
τ31 : placer les flèches dans même ordre que celles de la courbe ; ajouter les abscisses puis les ordonnées des points extrémaux et de changement de sens ;
T32 : avec vocabulaire adapté ;
τ32 : flèches montantes : fonction croissante (id. décroissante) de … à … (abscisses des points)
T4 dessiner une représentation graphique à partir d'un tableau de variations ;
τ4 : placer les points extrémaux et de changement de sens ; relier ces points par un trait continu en suivant les flèches
T51 : établir le sens de variations et représenter graphiquement $x \to x^2$;
τ51 : démontrer croissance sur **R**+ et décroissance sur **R**- ; tableau de variation; calculer 1 point; savoir que la fonction est paire ;
T52 établir le sens de variations et représenter graphiquement $x \to 1/x$;
τ52 : démontrer décroissance sur **R**–* et sur **R**+* ; calculer un point ; savoir que la fonction est impaire ;
T6 connaître la représentation graphique de $x \to \sin x$ et $x \to \cos x$;
τ6 : connaître la représentation graphique sur [0;2π] (savoir calculer les points d'abscisse:0 ; π/2 ;π ;3π/2 ;2π et connaître allure) et tracer par périodicité.

18 Ce document a été communiqué au mois de novembre 2007 pour servir de point d'appui dans le Séminaire de formation au travail d'une question posée par un élève professeur. Voir Artaud et Jullien 2008.

T7 caractériser les fonctions affines par l'accroissement de la fonction est proportionnel à accroissement de la variable

T8 reconnaître la forme d'une expression algébrique (somme, produit, carré, différence de 2 carrés) ;

T9 identifier l'enchaînement des fonctions conduisant de x à $f(x)$ (fonction donnée par une formule) ;

T10 reconnaître différentes écritures d'une même expression et choisir la plus adaptée (donc savoir anticiper les effets d'une modification d'écriture) : réduite, factorisée; lier l'étude des différentes techniques et traitements envisagés ;

T11 modifier, développer, réduire une expression selon l'objectif poursuivi ;

mise en équation ?

T12 résoudre une équation ou inéquation se ramenant au 1er degré ;

T13 utiliser un tableau de signes pour résoudre une inéquation ou déterminer le signe d'une fonction ;

T14 résoudre graphiquement une équation ou une inéquation du type $f(x) = k$; $f(x) < k$; $f(x) = g(x)$, $f(x) < g(x)$.

On notera d'abord que l'OM était en cours de constitution, ce qui peut expliquer par exemple l'absence de l'environnement technologico-théorique, mais qu'elle donne une bonne idée des aspects problématiques même quand le travail a l'ambition d'être mené au niveau du secteur.

On voit en effet apparaître, au delà des quelques maladresses d'analyse du débutant, une succession de types de tâches et de techniques associées qui reflète la structuration du programme sans que leur fonctionnalité soit recherchée. On aboutit alors à une juxtaposition d'organisations mathématiques ponctuelles (dont les blocs technologico-théoriques resteraient à élucider), leur articulation n'étant pas manifeste.

On notera également que certains types de tâches n'en sont pas véritablement, comme par exemple les deux énoncés suivants :

T51 établir le sens de variations et représenter graphiquement $x \to x^2$;

τ51 : démontrer croissance sur R+ et décroissance sur R- ; tableau de variation; calculer 1 point; savoir que la fonction est paire ;

T52 établir le sens de variations et représenter graphiquement $x \to 1/x$ *;*

τ52 : démontrer décroissance sur R-* et sur R+* ; calculer un point ; savoir que la fonction est impaire ;

On a en effet à faire ici à deux tâches, spécimens du type « établir le sens de variation et représenter graphiquement une fonction donnée par son expression algébrique » qui n'apparaît pas dans l'analyse de l'OM du professeur. En outre la fonction de ces tâches au sein de l'organisation mathématique étudiée n'est pas élucidée[19].

Des raisons d'être, on l'a dit, sont avancées :

Optimiser une situation

Exemple : maximiser une aire, minimiser un coût, …

Décrire exhaustivement un phénomène

On peut alors connaître d'autres valeurs, analyser le phénomène, …

Mais, on l'a vu, ces types de tâches ne sont pas reliés aux types de tâches de l'OMR (organisation mathématique régionale) que le professeur a identifiés par ailleurs – ce dont témoigne entre autres l'incertitude liée à la « mise en équation » que manifeste le point d'interrogation.

On pourrait donner de multiples témoignages de ces deux aspects problématiques : manque de fonctionnalisation et vision trop thématique ; nous en donnerons un autre encore, issu de l'observation, en février 2006, d'une séance en classe de seconde sous la responsabilité d'un élève professeur.

19. Ces tâches font parties de l'organisation de l'étude. Elles permettront de constituer une partie de l'environnement technologico-théorique de l'OMR. Cela souligne l'intérêt de mener d'emblée le travail d'analyse sur l'OM dans son ensemble.

À la suite de l'examen du programme par l'ensemble des professeurs de seconde de ce lycée, le secteur des fonctions a été découpé en thèmes associés à des sujets d'étude dont trois ont déjà été étudiés : *les équations* (équations « produits et quotients », mise en équation de problèmes), *généralités sur les fonctions* (notion de « être fonction de… », variable et ensemble de définition, image d'un élément par une fonction, lectures graphiques, fonctions croissantes et décroissantes, maximum et minimum sur un intervalle), *inéquations* (étude de signes d'expressions algébriques) ; un quatrième thème est en cours d'étude : *fonctions de références* (fonctions carrée et inverse).

La définition, le sens de variation et la représentation graphique de la fonction qui à x associe x^2 ont été établis précédemment et il s'agit d'étudier la situation suivante :

On considère ABCD un rectangle tel que AB = 5 et BC = 3. On place les points M, N, P et Q respectivement sur les segments [AB], [BC], [CD] et [DA] de telle sorte que les longueurs AM, BN, CP et DQ soient égales. Il s'agit de déterminer la position du point M sur le segment AB telle que l'aire du parallélogramme MNPQ inscrit dans le rectangle ABCD soit minimum.

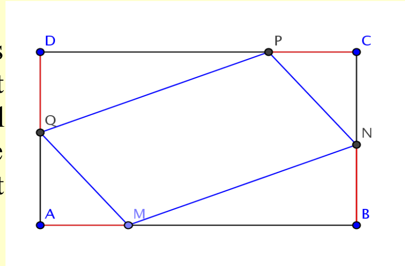


Figure 1

Le travail de la veille a permis d'obtenir que l'aire de MNPQ est donnée par $\mathcal{A}(x) = 2x^2 - 8x + 15$ où x représente la longueur AM. La séance comporte alors trois grandes étapes

1. On met en évidence qu'il s'agit de déterminer le minimum de la fonction $\mathcal{A}$ sur [0 ; 3]
2. Une étude expérimentale à l'aide de calculatrices graphiques met en évidence que $\mathcal{A}$ atteint un minimum en 2 qui vaut 7.
3. On prouve « analytiquement » l'assertion précédente :
   a) en résolvant l'inéquation $\mathcal{A}(x) \geq 7$, qui se ramène à la résolution de l'équation $\mathcal{A}(x) - 7 \geq 0$;
   b) En résolvant l'équation $\mathcal{A}(x) = 7$. [Cette dernière question a été abordée en classe et laissée à faire pour la séance suivante.]

La résolution de l'inéquation $\mathcal{A}(x) \geq 7$ s'effectue de la façon suivante :

$\mathcal{A}(x) - 7 = 2x^2 - 8x + 8 = 2(x^2 - 4x + 4) = 2(x^2 - 2\times 2\times x + 2^2) = 2(x - 2)^2$; cette quantité étant toujours positive, on obtient finalement que pour tout $x \in [0 ; 3]$ $\mathcal{A}(x) - 7 \geq 0$ ce qui équivaut à pour tout $x \in [0 ; 3]$ $\mathcal{A}(x) \geq 7$.

En dehors du fait que la technique mise en œuvre dans la classe pour résoudre une inéquation est purement algébrique, la séance soulève une autre question. Les élèves ont déjà étudié le type de tâches « déterminer le minimum d'une fonction » lors de l'étude du thème « généralités sur les fonctions » et la technique qui a été donnée à cette occasion repose sur une lecture graphique de la courbe. Cette première technique peut être justifiée par la définition de la croissance et de la décroissance d'une fonction : en effet, la fonction étant décroissante sur l'intervalle [0 ; 2] on a $\mathcal{A}(x) \geq \mathcal{A}(2)$ pour tout x appartenant à cet intervalle ; de même la fonction étant croissante sur l'intervalle [2 ; 3], $\mathcal{A}(x) \geq \mathcal{A}(2)$ pour tout x appartenant à cet intervalle et finalement, sur l'intervalle [0 ; 3], on obtient $\mathcal{A}(x) \geq \mathcal{A}(2)$ soit, puisque $\mathcal{A}(2) = 7$, $\mathcal{A}(x) \geq 7$. Ce qu'il resterait à justifier analytiquement, ce sont les variations de la fonction $\mathcal{A}$ sur l'intervalle, nous y reviendrons. Le professeur fait donc émerger dans la séance une autre technique relative au même type de tâches, qui s'appuie sur cette première technique dans la partie expérimentale tout en s'en éloignant d'un point de vue technologique puisqu'elle repose sur un travail algébrique.

La motivation de l'apport de la nouvelle technique n'est pas véritablement abordée dans la séance, mais elle apparaît implicitement dans le discours du professeur comme étant mieux justifiée parce qu'elle donnerait la « valeur exacte » du minimum. Pourtant, cette valeur exacte du minimum et de la valeur en laquelle il est atteint a été conjecturée à partir de la représentation graphique de la fonction ce qui limite de fait la portée de la technique algébrique[20].

Pour résoudre les difficultés que nous venons d'évoquer, il faudrait disposer d'une technique de détermination de l'extrémum dont la justification repose sur la théorie des fonctions. Voyons cela.

Si l'on sort un moment des contraintes du programme de seconde, une technique classique pour produire la valeur de l'extrémum d'une fonction du second degré, une consiste à mettre l'expression sous « forme canonique » de la façon suivante : $2x^2 - 8x + 15 = 2(x^2 - 4x) + 15 = 2(x - 2)^2 - 8 + 15 = 2(x - 2)^2 + 7$. Cette expression met alors en évidence le minimum de la fonction, 7, et la valeur en laquelle il est atteint, 2, la valeur qui annule le terme variable. Cette expression de la fonction permet également de justifier analytiquement les variations de la fonction : la fonction carré étant croissante sur $\mathbb{R}+$ et décroissante sur $\mathbb{R}-$, la fonction qui à x associe $(x - 2)^2$ est croissante sur $[2 ; +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty ; 2]$, et il en est donc de même pour la fonction qui à x associe $2(x - 2)^2$ puis pour la fonction qui à x associe $2(x - 2)^2 +7$, soit la fonction $\mathcal{A}$.

On le voit, on rejoint là un thème du programme, « fonctions et formules algébriques », à travers les types de tâches « Identifier l'enchaînement des fonctions conduisant de x à $f(x)$ quand f est donnée par une formule », « Reconnaître différentes écritures d'une même expression et choisir la forme la plus adaptée au travail demandé (forme réduite, factorisée…) » et « Modifier une expression, la développer, la réduire selon l'objectif poursuivi ».

[*Commentaire : C'est l'ancien programme de 2^de^ qui est cité ici ; le nouveau programme dit les mêmes choses sous une mise en forme légèrement différente.*]

Ce thème permet alors d'unifier les deux techniques précédentes pour déterminer les extrémums d'une fonction sur un intervalle de la façon suivante :
– tracer la courbe de la fonction sur cet intervalle à la calculatrice et établir à partir de cette courbe le tableau de variation de la fonction ;
– justifier les variations de la fonction à partir des variations des fonctions de références, en mettant si nécessaire l'expression algébrique de la fonction sous une forme adaptée ;
en particulier, dans le cas d'une fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$, mettre l'expression sous la forme $a(x - \alpha)^2 + \beta$; dans le cas d'une fonction $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$, mettre l'expression sous la forme $\alpha + \frac{\mu}{cx+d}$;
– donner alors les inégalités à justifier et utiliser la définition de la croissance et de la décroissance d'une fonction pour les justifier.

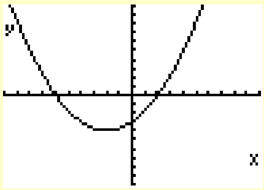
Il reste encore à régler le problème de la mise en place d'une technique permettant de mettre les expressions du second degré sous la forme $a(x - \alpha)^2 + \beta$. On donnera ci-dessous les éléments d'une telle technique en la mettant en œuvre sur deux spécimens, sans aborder ici la question de sa mise en place.

20 On ajoutera en outre que la technique algébrique qui vit actuellement le plus souvent dans les classes de seconde permet généralement de produire la valeur du minimum mais en donnant la forme canonique de la fonction du second degré.

$h : x \mapsto \left(\frac{1}{4}\right)x^2 + x - 3$.

Partie expérimentale

Représentation graphique de la fonction



```
WINDOW FORMAT
Xmin=-10
Xmax=10
Xscl=1
Ymin=-10
Ymax=10
Yscl=1
```

Tables de valeurs

X	Y1
-5	-1.75
-4	-3
-3	-3.75
-2	-4
-1	-3.75
0	-3
1	-1.75

X=-5

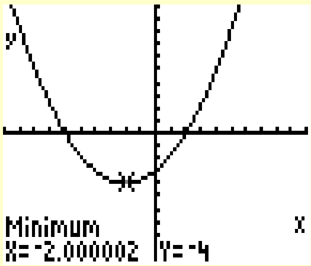
X	Y1
-5	-1.75
-4	-3
-3	-3.75
-2	-4
-1	-3.75
0	-3
1	-1.75

Y1=-3.75

X	Y1
-2.3	-3.978
-2.2	-3.99
-2.1	-3.998
-2	-4
-1.9	-3.998
-1.8	-3.99
-1.7	-3.978

Y1=-4

Détermination graphique du minimum



La fonction est décroissante sur]- ∞ ;–2] et croissante sur [–2 : + ∞ [. Elle admet un minimum en –2 qui vaut –4.

Elle se met sous la forme $\left(\frac{1}{4}\right)(x+2)^2 - 4$, ce que l'on vérifie :

```
Y1=(1/4)*X^2+X-3
Y2=(1/4)*(X+2)^2
-4
Y3=
Y4=
Y5=
Y6=
```

X	Y1	Y2
-3	-3.75	-3.75
-2.5	-3.938	-3.938
-2	-4	-4
-1.5	-3.938	-3.938
-1	-3.75	-3.75
-.5	-3.438	-3.438
0	-3	-3

X=-3

Preuves :

1. On a $(x+2)^2 =$. Donc $\frac{1}{4}$ $(x+2)^2 = \frac{1}{4}$ $x^2 + x + 1$ et finalement $\frac{1}{4}$ $(x+2)^2 - 4 = \frac{1}{4}$ $x^2 + x - 3$

2. On considère $a \leqslant b \leqslant -2$. On a alors $a+2 \leqslant b+2 \leqslant 0$. Comme la fonction $x \mapsto x^2$ est décroissante sur $]-\infty\,;0]$, on obtient que $(a+2)^2 \geqslant (b+2)^2$ et donc $\left(\frac{1}{4}\right)(a+2)^2 \geqslant \left(\frac{1}{4}\right)(b+2)^2 \geqslant 0$, soit finalement $\left(\frac{1}{4}\right)(a+2)^2-4 \geqslant \left(\frac{1}{4}\right)(b+2)^2-4 \geqslant -4$. La fonction est ainsi décroissante sur $]-\infty\,;-2]$ et sur cet intervalle on a $h(x) \geqslant 4$.

3. On considère $a \geqslant b \geqslant -2$. On a alors $a+2 \geqslant b+2 \geqslant 0$. Comme la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $[0\,;+\infty[$, on obtient que $(a+2)^2 \geqslant (b+2)^2$ et donc $\left(\frac{1}{4}\right)(a+2)^2 \geqslant \left(\frac{1}{4}\right)(b+2)^2 \geqslant 0$, soit finalement $\left(\frac{1}{4}\right)(a+2)^2-4 \geqslant \left(\frac{1}{4}\right)(b+2)^2-4 \geqslant -4$. La fonction est ainsi croissante sur $[-2\,;+\infty[$ et sur cet intervalle on a $h(x) \geqslant 4$.

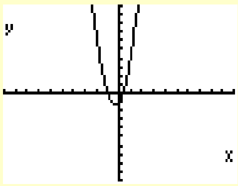
4. On a ainsi $h(x) \geqslant -4$ pour tout x, et –4 est le minimum de h. $h(-2) = -4$, et il est donc atteint pour $x = -2$.

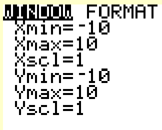
L'étude du forum des questions s'est arrêtée là en séance ; la suite est à travailler hors classe...

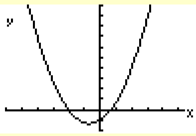
g : x $\mapsto 3x^2 + 2x - 1$;

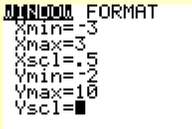
Partie expérimentale

Représentation graphique :



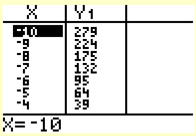


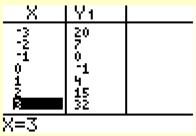


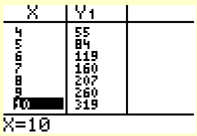


Tables numériques

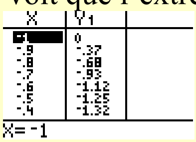
Pas de 1

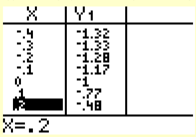




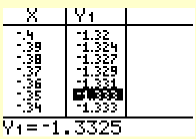


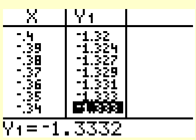
On voit que l'extrémum est atteint entre -1 et 1 ; pas de 0,1 à partir de -1 :

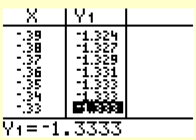


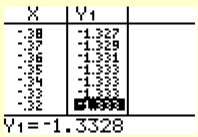


L'extrémum est atteint entre -0,4 et -0,2 ; pas de 0,01 :

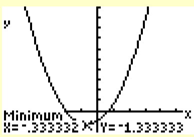






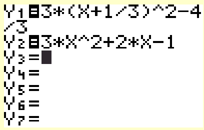


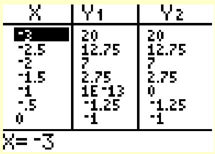
Détermination graphique du minimum (calc – minimum)



La fonction est décroissante de $\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{3}\right]$ et croissante sur $\left[-\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$; elle admet un minimum en $-\dfrac{1}{3}$ qui vaut $-1+\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{3}$.

Elle se met sous la forme $3(x + 1/3)^2 - 4/3$, ce que l'on vérifie :





On notera que la table fournit une valeur approchée de Y1 en -1.

Preuves :

1. $3\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2-\dfrac{4}{3} \;= 3\left(x^2+\dfrac{2}{3\,x}+\dfrac{1}{9}\right) = 3x^2 + 2x - 1$.

2. On considère $a \leq b \leq -1/3$. On a alors $a + 1/3 \leq b + 1/3 \leq 0$. La fonction $x \mapsto x^2$ étant décroissante sur $]-\infty\,;0]$, on obtient que $(a + 1/3)^2 \geq (b + 1/3)^2 \geq 0$, soit que $3(a + 1/3)^2 \geq 3(b + 1/3)^2 \geq 0$, et finalement que $3(a + 1/3)^2 - 4/3 \geq 3(b + 1/3)^2 - 4/3 \geq -4/3$, ce qui prouve que la fonction g est décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{3}\right]$ et que sur cet intervalle $g(x) \geq -4/3$.

3. On considère $a \geq b \geq -1/3$. On a alors $a + 1/3 \geq b + 1/3 \geq 0$. La fonction $x \mapsto x^2$ étant croissante sur $[0\,;+\infty[$, on obtient que $(a + 1/3)^2 \geq (b + 1/3)^2 \geq 0$, soit que $3(a + 1/3)^2 \geq 3(b + 1/3)^2 \geq 0$, et finalement que $3(a + 1/3)^2 - 4/3 \geq 3(b + 1/3)^2 - 4/3 \geq -4/3$, ce qui prouve que la fonction g est croissante sur l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$ et que sur cet intervalle $g(x) \geq -4/3$.

4. On a donc $g(x) \geq -4/3$ sur $\mathbb{R}$, ce qui prouve que g admet un minimum qui vaut $-4/3$; il est atteint pour $x = -1/3$, puisque $g(-1/3) = -4/3$.

On obtient ainsi des techniques compatibles avec ce que demande le programme en liant de manière fonctionnelle le travail algébrique aux fonctions, qui préparent les élèves aux techniques qui seront étudiées dans les classes ultérieures du lycée et qui leur donnent la possibilité d'accomplir le type de tâches dans sa totalité, ou du moins d'avoir prise sur l'ensemble de la technique et de sa justification si l'on fait le choix d'une *technique coopérative*.

Ces techniques font également apparaître de manière lisible *une raison d'être de l'étude qualitative* de fonctions : on constitue pour l'essentiel la *base expérimentale* qui va permettre de faire surgir les premiers éléments de la théorie des fonctions, de la même manière que le travail à partir de figures permet de faire surgir des éléments de la théorie géométrique. La position relative des deux techniques, source de difficultés dans la séance en classe évoquée plus haut, trouve alors une solution semblable à celle adoptée en géométrie : on ne doute pas à l'issue de l'expérimentation graphique que le minimum de la fonction d'aire est 7, atteint en 2, de la même façon qu'une expérimentation graphique convainc qu'un triangle de côtés (3, 4, 5) est rectangle ; on a là deux faits, l'un numérique et l'autre géométrique, avérés. Il reste cependant, pour faire œuvre de mathématicien, à vérifier que l'on peut les déduire de la théorie fonctionnelle disponible (TFD) ou de la théorie géométrique disponible (TGD) : si cela n'était pas le cas, il faudrait travailler à augmenter la théorie des ingrédients pertinents (éventuellement lors d'une année d'étude ultérieure, comme cela sera le cas de quelques types de fonctions pour lesquelles on en restera, en seconde, à la conviction expérimentale).

Scinder fortement l'étude qualitative des fonctions de celle des fonctions de référence comme le fait actuellement la norme de la profession constitue donc un obstacle pour faire entendre le travail d'élaboration théorique en cours de constitution, comme en témoigne par exemple la question suivante posée par un élève professeur l'an dernier :

> Les élèves de la classe de 2^{de} que j'ai en responsabilité ont énormément de mal à s'exprimer clairement. Surtout sur le thème des fonctions, ils mélangent les notions appartenant au domaine fonctionnel avec celles appartenant au domaine graphique. Je pense pourtant le répéter souvent et bien faire la distinction. Que pourrais-je faire ? (20, 2^{de}, 2007-2008)

Les techniques que nous venons de développer font en outre apparaître que les tâches T51 et T52, rencontrées précédemment dans l'OMR découpée par l'élève professeur, ont une fonction technologique puisqu'elles permettent de justifier et/ou de produire une technique de détermination des variations respectivement des fonctions polynômes du second degré et des fonctions homographiques par un « enchaînement de fonctions ».

À suivre...

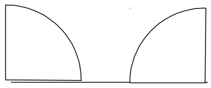
Analyser, évaluer & développer une séance

> La technique qui apparaît dans l'analyse du compte-rendu doit-elle être celle observée pendant la séance si elle est fausse ? Si la technique ne s'applique pas à tous les spécimens du type de tâches doit-on la modifier pour que ce soit le cas ? (CP, 15)

Dans l'analyse, on « décrit » ce qu'il y a dans la séance, donc la technique que l'on voit émerger, même « fausse ». L'évaluation permet d'expliciter ce qui va et ce qui ne va pas. Pour pouvoir mettre en évidence ce qui ne va pas dans l'évaluation, on peut contraster l'analyse de ce qui existe par ce qui pourrait exister, ce qui peut consister à rétablir, s'il y a lieu, les erreurs relevées dans l'OM observée et analysée. On peut également, pour montrer ce qu'on entend, développer rapidement un aspect : si on affirme que la technique ne vaut pas pour certains spécimens du type de tâches – on dit qu'elle a une *portée limitée* –, on le justifie en en donnant un exemple et on peut montrer ce que pourrait être une technique qui vaut pour l'ensemble du type de tâches. Il faut également différencier selon que la technique en question apparaît comme faisant partie de l'OM enjeu de l'étude ou comme permettant son émergence, soit encore comme une partie de l'OD. On donnera un exemple à propos de l'observation étudiée dans la première question de ce forum.

> *Analyse des moments exploratoire et technologico-théorique (extrait)*
> (...)
> On voit apparaître dans le travail de la classe, parmi les *tâches mathématiques* à accomplir, « prendre le milieu du segment AB », « tracer un triangle isocèle de base AB », tâches qui relèvent des *types de tâches* : déterminer le milieu d'un segment et construire un triangle isocèle de base donnée, qui constituent des éléments du milieu pour faire émerger l'OM enjeu de l'étude.
>
> Si l'on considère le type de tâche T : construire un triangle isocèle, identifié précédemment, un élève propose la technique τ suivante : « on prend le compas, on prend une longueur et on écarte le compas, on trace un arc à partir de *A* et à partir de *B* », que P reprend à son compte. La description de de la technique est partielle.
>
> Partons ainsi du segment *AB* suivant : ———————— ; prenons la longueur ℓ suivante ——— et traçons

« un arc à partir de *A* et à partir de *B* » ; on obtient le schéma ci-contre :



Pour obtenir un triangle isocèle, il faut, bien entendu que les arcs se coupent, soit prendre une longueur supérieure à *AB*/2, et tracer les arcs de cercle centrés respectivement en *A* et *B* de façon qu'ils soient sécants, ce qui suppose qu'on les trace « du même côté » de (AB). Une description de la technique pourrait être ainsi : Écarter le compas d'une longueur ℓ supérieure à la moitié du segment ; tracer un arc de cercle de centre *A* et de rayon ℓ, et un arc de cercle de centre *B* et de rayon ℓ de façon à ce qu'il soit sécant avec le précédent en *C*. Tracer le triangle *ABC*.

(...)

Évaluation (extrait)

(…)

Compte tenu du fait que certains élèves semblent encore peu au point sur cette technique (on voit par exemple dans la séance P expliciter au tableau la technique pour un élève), P aurait dû développer, ou plutôt faire développer, la description de la technique proposée par l'élève, description dont on aurait pu se contenter si le type de tâches était routinier pour l'ensemble de la classe. (...)

3. La question de l'orientation

Plusieurs questions font une référence, plus où moins explicite, à cette partie du métier que sont les processus ***d'orientation***.

Est-il prévu au cours de la formation une information concernant l'orientation des élèves (fin de collège, de 2de) ? (JA, 12)

Si une famille s'obstine à refuser une orientation SEGPA pour leur fille, quelles solutions se présentent à nous pour aider au mieux l'élève ? (JBM, 6a)

Aura-ton dans l'année une conférence sur l'orientation en secondaire pour les élèves ? (Sous-entendu, à l'IUFM.) (JBM, 9b)

Pourrait-on parler des différentes orientations possibles en collège ? Nous n'avons pas de conseiller d'orientation et la majorité des collègues est incapable de répondre à une question d'orientation. (GS, 6)

Peut-on faire une explication du conseil de classe (enjeu, attitude à avoir, ...) ? (AB, 9)

Le conseil de classe a eu lieu. J'ai été déçu car on parle peu au final des élèves, on survole les cas, notamment dans ma classe où il n'y a pas de cas difficiles. De plus, j'ai été surpris de la prise de parole au niveau des professeurs, c'est à dire il faut véritablement s'imposer pour parler. Ai-je bien compris le rôle du conseil de classe ? En quoi consiste-t-il réellement ? (MC, 12)

Le fait que cela fasse partie intégrante du métier est attesté par son inscription dans les « dix compétences », plus précisément dans la compétence « travailler en équipe et coopérer avec les parents et les partenaires de l'école » :

(...)

Il aide l'élève à construire son projet d'orientation.

Connaissances

Le professeur connaît :

(...)

– les procédures d'orientation et les différentes voies dans lesquelles les élèves peuvent s'engager.

Capacités Le professeur est capable : – d'inscrire sa pratique professionnelle dans l'action collective de l'école ou de l'établissement, notamment : (...) – dans le domaine de l'orientation ; (...)

1. Face à un problème aussi complexe, et pour lequel la profession dans son ensemble n'a pas de solution[21], la première attitude et le devoir d'un professionnel de l'enseignement est de *s'instruire* sur cette question. Nous allons aujourd'hui entamer un Parcours d'Étude et de Recherche sur ce thème.

2. Nous allons donc nous instruire d'abord sur les modalités de l'orientation au collège et au lycée. Nous nous appuierons pour cela sur un ensemble de documents que l'on trouve sur le site Eduscol.

Procédures à l'issue de la classe de sixième

L'entrée en sixième au collège n'est pas seulement un changement de classe comme les années précédentes.

L'élève va découvrir de nouvelles matières et de nouveaux lieux comme les différentes salles de classe, le CDI, la salle des professeurs... mais aussi une nouvelle organisation de son travail et enfin de nouvelles personnes : chef d'établissement avec un secrétariat, différents professeurs dont un professeur principal, surveillants, CPE (conseiller principal d'éducation), CO-P (conseiller d'orientation-psychologue), infirmière, assistant de service social.... Il va devoir s'adapter à ce nouvel environnement.

La sixième constitue l'année du cycle d'adaptation.

Les procédures en fin de sixième sont elles aussi modifiées par rapport à l'école élémentaire.

Chronologie

Deuxième trimestre

- La famille demande le passage en cinquième ou le **redoublement**.
- Le conseil de classe répond à cette demande, de façon provisoire.
- En cas de désaccord, un dialogue commence entre la famille et le professeur principal. Il est maintenu jusqu'au troisième trimestre.

Troisième trimestre

- La famille demande le passage en cinquième ou le redoublement.
- Le conseil de classe propose une des deux modalités en tenant compte du bilan de l'élève et des objectifs du niveau de sixième.
- En cas d'accord, la proposition devient décision du chef d'établissement ; elle est notifiée à la famille.
- En cas de désaccord, un entretien est proposé à la famille par le chef d'établissement.

21. Y compris les Conseillers d'Orientation Psychologues dont c'est la fonction essentielle.

• Si le désaccord persiste, le chef d'établissement doit motiver sa décision et la famille dispose de trois jours pour décider de recourir à une commission d' appel. La décision de la commission d'appel est définitive.
• En cas de difficultés de l'élève, la famille ou l'équipe éducative peuvent être amenées à envisager d' autres modalités de scolarité.

Commentaire : Les autres modalités sont essentiellement les SEGPA (environ 100 000 élèves concernés) et les EREA (environ 10 000 élèves concernés).

Procédures à l'issue de la classe de cinquième

La cinquième constitue la première année du cycle central.
Le cycle central permet aux élèves d'approfondir et d'élargir leurs connaissances et compétences.

Dans un certain nombre de collèges, l'apprentissage de la seconde langue vivante débute par anticipation dès la classe de 5e.

Chronologie

Deuxième trimestre

• La famille demande le passage en quatrième ou le redoublement.
• Le conseil de classe répond à cette demande de façon provisoire.
• En cas de désaccord, un dialogue commence et est maintenu jusqu'au troisième trimestre entre la famille et le professeur principal.

Troisième trimestre

• La famille demande le passage en quatrième ou le redoublement.
• En fin de cinquième, le redoublement ne peut intervenir que sur demande écrite de la famille ou sur proposition du chef d'établissement, avec l'accord écrit de la famille.

En fin de cinquième, les élèves vont faire le choix de leur deuxième langue étrangère ou régionale.

Procédures à l'issue de la classe de quatrième

La quatrième constitue la deuxième année du cycle central.
En quatrième, les élèves entreprennent l'étude d'une seconde langue vivante étrangère ou régionale lorsque celle-ci n'a pas été débutée par anticipation dès la classe de 5e.

En plus de la formation commune obligatoire qui leur est dispensée, les élèves ont la possibilité de choisir des enseignements optionnels facultatifs tel que le latin, qui enrichissent leurs parcours de formation. L'offre de ces enseignements optionnels peut varier d'un établissement à un autre.

Pour élaborer leur projet personnel les élèves peuvent demander conseil auprès du professeur principal et du conseiller d'orientation-psychologue.

A l'issue de la quatrième, l'élève et sa famille peuvent choisir différentes options parmi lesquelles l'option découverte professionnelle 3 heures ou le module de découverte professionnelle 6 heures.
Ils peuvent également opter pour une poursuite de leur scolarité en alternance.

Chronologie

Deuxième trimestre

- La famille demande le passage en troisième ou le redoublement.
- Le conseil de classe répond à cette demande de façon provisoire.
- En cas de désaccord, le dialogue commence, et est maintenu jusqu'au troisième trimestre.

Troisième trimestre

- La famille demande le passage en troisième ou le redoublement.
- Le conseil de classe propose une des deux modalités (en troisième ou le redoublement) en tenant compte du bilan de l'élève par rapport aux objectifs du niveau de quatrième.
- En cas d'accord, la proposition devient décision du chef d'établissement qui la notifie à la famille
- En cas de désaccord, un entretien est proposé à la famille par le chef d'établissement.
- Si le désaccord persiste, le chef d'établissement doit motiver sa décision et la famille a trois jours pour décider de recourir à une commission d'appel. La décision de celle-ci est définitive.

Procédures d'orientation à l'issue de la classe de troisième

La classe de troisième constitue le cycle d'orientation.
Cette année a pour objectifs de compléter les acquisitions des élèves, de les aider à préciser leur projet personnel et de les préparer aux voies de formation ultérieures.

Ils vont avoir à faire un choix parmi les trois voies d'orientation que sont :

- la seconde générale et technologique
- la seconde professionnelle qui constitue la première année du cycle de préparation en trois ans du baccalauréat professionnel ou la première année du cycle de deux ans conduisant à l'une des spécialités de brevets d'études professionnelles maintenus
- la première année du cycle de deux ans conduisant à une spécialité de certificat d'aptitude professionnelle.

Depuis l'année scolaire 2006-2007, un entretien personnalisé d'orientation est proposé à tous les élèves de troisième.

Trois voies d'orientation

La classe de seconde générale et technologique

Cette année permet aux élèves de découvrir de nouvelles matières par l'intermédiaire des enseignements de détermination. Si l'objectif de ces enseignements est de permettre aux élèves de tester leurs intérêts, il n'en reste pas moins que ce choix est important et doit être réfléchi notamment lorsque l'élève envisage un baccalauréat ou un parcours précis.
La seconde spécifique : certains brevets de techniciens (BT) ou les baccalauréats technologiques hôtellerie et techniques de la musique et de la danse se préparent obligatoirement à partir d'une seconde spécifique. Aprés une classe de seconde à régime spécifique, les élèves se dirigent vers la

classe de première puis de terminale correspondantes.

La classe de seconde professionnelle

Cette classe correspond à la première année du baccalauréat professionnel en trois ans. Il existe 55 spécialités. Une préparation au brevet d'études professionnelles (BEP) rénové ou au certificat d'aptitude professionnelle (CAP) est intégrée dans ce parcours.

Il s'agit également de la première année du brevet d'études professionnelles d'une des quatres spécialités maintenues : carrières sanitaires et sociales, conduite et service dans le transport, métiers de la restauration et de l'hôtellerie, optique lunetterie.

La première année du certificat d'aptitude professionnel en 2 ans

Cette classe à pour objectif de former en 2 ans des jeunes à des techniques pointues pour exercer un métier déterminé. La formation associe enseignement général et formation professionnelle.

Chronologie

Deuxième trimestre

• la famille demande le passage dans l'une des trois voies d'orientation ou le redoublement. Elle peut aussi indiquer ses préférences en termes d'options ou de spécialités ou son souhait de recourir à l'apprentissage.
• En cas de désaccord, le dialogue commence entre la famille et l'équipe éducative et est maintenu jusqu'au troisième trimestre.

Troisième trimestre

• la famille demande le passage dans l'une des trois voies d'orientation ou le redoublement.
• Le conseil de classe propose une des modalités sur la base du bilan scolaire au regard des objectifs du niveau troisième et des motivations de l'élève.
• En cas d'accord, la proposition devient décision du chef d'établissement qui la notifie à la famille.
• En cas de désaccord, un entretien est proposé à la famille par le chef d'établissement.
Si le désaccord persiste, le chef d'établissement doit motiver sa décision et la famille dispose de trois jours pour faire connaître son choix de recourir à une commission d'appel. La décision de celle-ci est définitive.

Le choix des options de seconde générale et technologique et des spécialités de CAP, BEP et baccalauréat 3 ans appartient à la famille. Au niveau de l'enseignement public, les inscriptions en seconde générale et technologique, en seconde professionnelle ou en première année de CAP sont soumises à une commission d'affectation.

Procédures d'orientation à l'issue de la classe de seconde générale et technologique

L'année de seconde générale et technologique marque un changement important dans la scolarité des élèves. Année de détermination, elle va leur permettre de tester leur goût, notamment par le biais des enseignements de détermination, d'apprécier leurs capacités et méthodes de travail, d'autonomie... en vue d'une orientation vers une série de première puis une terminale générale ou technologique.

Chronologie

Deuxième trimestre

• La famille demande le passage dans l'une des voies d'orientation ci-dessous ou le redoublement.
• Le conseil de classe répond à cette demande, de façon provisoire.
• En cas de désaccord, le dialogue commence, et est maintenu jusqu'au troisième trimestre.

A l'issue de la seconde générale et technologique, les élèves peuvent :

- se diriger vers l'une des séries des baccalauréats technologiques :
  - **STI (Sciences et technologies industrielles)** ;
  - **STG (Sciences et technologies de la gestion) ;**
  - **ST2S (Sciences et technologies de la santé et du social) ;**
  - **STL (Sciences et technologies de laboratoire) ;**
  - **STAV (sciences et technologies de l'agronomie et du vivant)**
- se diriger vers l'une des séries des baccalauréats généraux :
  - **littéraire (L) ;**
  - **économique et social (ES) ;**
  - **scientifique (S)**

également accéder à la classe de première puis terminale préparant au **brevet de technicien** (BT).

Troisième trimestre

• L'élève et sa famille formulent des vœux définitifs.
• Le conseil de classe propose, compte tenu du bilan scolaire de l'élève et de son projet personnel, le passage en première en précisant la (ou les) série(s), ou le redoublement.
• En cas d'accord, la proposition devient décision du chef d'établissement qui la notifie à la famille.
• En cas de désaccord, un entretien est proposé à la famille par le chef d'établissement. Si le désaccord persiste, le chef d'établissement doit motiver sa décision et la famille peut, sous trois jours, faire connaître son choix de recourir à une commission d'appel.

3. En second lieu, la connaissance des statistiques concernant l'orientation et le redoublement peut être une aide précieuse. Elle permet de se faire une idée sur les pratiques dans ce domaine ainsi que sur leur évolution. Nous poursuivrons l'étude de ce point de vue à la rentrée.

4. Recherche dans les archives

N.B. On rappelle que les matériaux exposés ainsi que les supports utilisés, sont déposés sur Espar.

4.1.

Que nous disent les *Archives du Séminaire* quant à la ***réalisation du moment d'institutionnalisation et de la synthèse*** ?

• Le compte rendu de la recherche (soit l'exposé) s'efforcera de présenter (en les choisissant adéquatement) des matériaux pour une réponse aux questions de la semaine ci-après éventuellement présents dans les *Archives*.

> 1. Quand on fait la synthèse après une activité, on réécrit les propriétés vues en activité. Les élèves ont une impression de répétition, ils se plaignent "on l'a déjà écrit ça." Comment puis-je éviter cela ? Dois-je leur dire que l'on apprend à force de répétition ou est-ce que je ne dois pas leur faire écrire la propriété en activité ? (EF, 7)
>
> 2.Est-ce que l'on peut institutionnaliser certaines choses uniquement en exercices s'il est écrit dans le programme que celles-ci ne doivent pas faire l'objet d'un cours à part entière ? Et est-ce que tout ce qui figure dans le programme doit être mis dans la partie synthèse ou certains points peuvent n'être vus qu'au cours d'exercices ? (EF, 9)
>
> 3. Dans le chapitre « proportionnalité », il y a de nombreux exemples basés sur des tableaux. Est-il judicieux de donner sur polycopié le tableau en partie complété (pour la partie synthèse) ? (CS, 13)
>
> 4. Peut-on travailler l'organisation mathématique à l'aide du dispositif « exercices » avant d'institutionnaliser les techniques, en se basant uniquement sur les bilans d'étape des AER (informels) ? (LA, 13)

Le compte rendu de la recherche sera exposé lors de la séance du 2 mars 2010.

4.2.

Que nous disent les *Archives du Séminaire* quant à ***l'enseignement de la géométrie dans l'espace*** ?

• Le compte rendu de la recherche (soit l'exposé) s'efforcera de présenter (en les choisissant adéquatement) des matériaux pour une réponse aux questions de la semaine ci-après éventuellement présents dans les *Archives*.

> 1. Utiliser la perspective cavalière est-il un type de tâches exigible en seconde ? J'en ai parlé en classe, on a fait quelques exercices à ce propos mais je n'ai pas vérifié les acquis lors de l'évaluation. (EO, 11)
>
> 2.Je redoutais le chapitre de géométrie dans l'espace mais au final cela a été très positif et a permis d'aborder au passage des points de logique et raisonnement. Notamment la démonstration par l'absurde. Sur ce point j'ai malheureusement perdu la moitié de la classe, dont l'œil vif traduisait sans aucun doute l'incompréhension totale. J'ai notamment eu du mal à illustrer, la figure étant nécessairement absurde (j'ai pris l'exemple : Si une droite est parallèle à une droite d'un plan elle est parallèle au plan). Quel(s) exemple(s), par exemple tirés de situations physiques, me permettraient de donner une illustration plus convaincante ? (JPB, 11)
>
> 3. Sur le début de la géométrie dans l'espace, j'ai du mal à mettre en place une praxéologie du fait des nombreuses définitions. Comment mettre en place une praxéologie sur un début de chapitre où les définitions sont nombreuses ? (GBR, 8)

Le compte rendu de la recherche sera exposé par lors de la séance du 2 mars 2010.

4.3. Il restait un exposé que nous n'avions pas pu faire la dernière fois.

Que nous disent les *Archives du Séminaire* quant à l'***effet des attentes du professeur à l'égard des élèves, et notamment de l'effet Pygmalion*** ?

• Le compte rendu de la recherche (soit l'exposé) s'efforcera de présenter (en les choisissant adéquatement) des matériaux pour une réponse aux questions de la semaine ci-après éventuellement présents dans les *Archives*.

1. Une élève de la classe est en très grande difficulté. Elle vient m'en faire part. Elle m'explique que malgré le fait qu'elle travaille à la maison, elle ne comprend pas. Elle est en PPRE (1 h par semaine) mais cela ne suffit pas. Que faire ? (CS, 8)

2. Que faire quand un élève qui a des difficultés devient amorphe / insolent lorsqu'on lui demande de passer au tableau ? (Visiblement, il laisse tomber et n'est là que pour ne pas être absent physiquement.) (MAC, 9)

3. Comment inciter une élève à prendre part à la vie de la classe et à participer à l'avancement du cours ? C'est une excellente élève à l'écrit mais en classe sa seule réponse aux interrogations est « je ne sais pas ». (AL, 11)

4.4. Nous écoutons un nouvel exposé :

Que nous disent les *Archives du Séminaire* quant à ***l'enseignement du théorème de Pythagore*** ?

• Le compte rendu de la recherche (soit l'exposé) s'efforcera de présenter (en les choisissant adéquatement) des matériaux pour une réponse aux questions de la semaine ci-après éventuellement présents dans les *Archives*.

1. Si on traite le théorème de Pythagore en deux parties, est-il préférable de parler de propriété caractéristique du triangle rectangle dès le début ou bien en conclusion des deux chapitres ? (JA, 11)

2. Existe-t-il une démonstration du théorème de Pythagore au niveau 4^{e} n'utilisant pas la double distributivité ? (JA, 10)

3. Comment introduire le théorème de Pythagore en quatrième ? Je n'arrive pas à trouver un problème concret. J'ai du mal à imaginer que le savoir émerge des élèves dans ce chapitre. (AM, 11)

4. Dans le chapitre sur Pythagore, les élèves découvrent actuellement la réciproque du théorème. C'est la contraposée du théorème qui me pose question : faut-il expliquer clairement cette notion aux élèves ? Et de quelle manière ? NB. Le programme dit : « on ne distingue pas le théorème de Pythagore direct de sa réciproque (ni de sa forme contraposée) ». Est-ce possible de ne pas les distinguer au cours de l'enseignement ? (SB, 13)

5. En ce qui concerne la réciproque du théorème de Pythagore, est-il possible de la faire trouver par les élèves grâce à un exercice de français ? Exemple : si le prof est juste alors les élèves le respectent. (KR, 7)

6. En 4^{e}, lorsqu'on aborde le théorème de Pythagore, peut-on différer la démonstration car en soi elle ne s'inscrit pas dans le moment d'institutionnalisation ni dans le moment technologico-théorique de l'OD ? J'entends par différer, de la garder par exemple pour un moment de travail dans le chapitre dédié au cosinus et/ou dans le chapitre dédié au calcul littéral (démonstration par les aires). (JBM, 13)

Prochaine séance de séminaire : le mardi 23 février 2010.

D'ici là, on étudiera les notes du séminaire, on préparera la réalisation du corpus B – sans oublier la mise en forme de l'organisation mathématique du thème étudié –, on travaillera l'intégration des

TICE dans les organisations de l'étude dans la perspective du C2i2e sans oublier le mémoire...

Bonnes Vacances !!!

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2009-2010

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 17 : mardi 23 février 2010

Programme de la séance. 1. Faisons le point ! & Forum des questions // 2. Observation, analyse & évaluation : algèbre en 4e // 3. La question de l'orientation

NB : la séance du 2 mars sera suivie d'un TD TICE : merci aux élèves professeurs faisant partie du groupe 2 de se munir de leur ordinateur portable.

1. Faisons le point ! & Forum des questions

Nous ferons ci-après le point sur quelques ***éléments de didactique des mathématiques*** à partir de questions qui ont été posées lors des dernières semaines de travail.

Je n'ai pas très bien compris ce qu'était la chronogenèse. (3e, 15)

La chronogenèse, comme l'indique l'étymologie du mot qui désigne le concept, c'est la création (genèse) de temps (chronos) de l'étude : cela désigne donc le processus qui permet de ***produire*** de l'***avancée dans*** le temps de l'étude, le ***temps didactique***.

Le temps de l'étude, nous l'avons étudié dès le début de l'année, notamment à travers la notice du même nom, dont on reproduit ci-après le chapeau :

Dans la conduite d'une classe, le professeur a en charge la tâche essentielle de créer du temps didactique, ce temps de l'étude *dont il règle l'avancée tout en régulant les apprentissages qu'impulse et scande cette avancée. On examine ci-après les principaux problèmes qui surgissent dans l'exercice de cette mission essentielle du professeur, qui le distingue notamment de tout autre « aide à l'étude ».*

Pour le dire autrement, le professeur à en charge la tâche essentielle de la ***chronogenèse***. Sans reprendre toute la notice, nous en reproduisons ci-dessous quelques brefs extraits de nature à éclairer, à la lumière du travail accompli jusqu'ici dans le séminaire, la notion de chronogenèse.

3.1. Le professeur ne se contente pas de « séquencer » la matière à enseigner à l'échelle de l'année, du trimestre, du mois, de la semaine : son magistère s'étend jusqu'à l'***heure*** de classe, qu'il doit programmer minutieusement. Cette organisation de l'étude, qui fait du professeur le « maître du temps » – le « chronomaître » –, rend l'élève très fortement ***dépendant du professeur***. (page 6)

Dans tous les cas, le programme doit jouir d'une ***forte publicité au sein de la classe***, par affichage lorsque c'est possible, et, dans tous les cas, par diffusion aux élèves d'une version adaptée servant de support à ***un repérage collectif régulier*** de l'avancée de l'étude, repérage permettant à la classe de situer le ***travail accompli*** et ***celui qui reste à accomplir***, et contribuant par là à relancer dans la classe le pacte d'instruction.

3.3. Au-delà du programme de travail de l'année, il convient encore de présenter aux élèves le programme de travail ***de périodes de temps plus restreintes***. Il n'était pas rare autrefois de voir l'instituteur expliciter le programme de la ***journée*** [22]. Une telle pratique semble trouver moins facilement sa place lorsque la durée de la séance est inférieure à la demi-journée ; *a fortiori* peut-elle paraître déplacée dans une séance de durée inférieure à l'heure ! Même dans ce cas pourtant, on doit regarder comme une saine pratique le rituel consistant à ***lancer la séance*** en en présentant d'abord rapidement le « menu » – et cela par exemple de vive voix, tout en notant ou en faisant noter par un élève, dans un coin du tableau, et pour mémoire, quelques mots clés. (page 7)

4.1. La situation dominée des élèves par rapport à l'avancée de l'étude les porte à être vigilants : ils attendent en particulier du professeur ***qu'il fasse avancer le temps didactique*** ; et, s'il est vrai qu'ils s'entendent souvent à freiner cette avancée – en « traînant les pieds », en faisant de la résistance d'une manière ou d'une autre –, le professeur se méprendrait, au risque d'essuyer bientôt de vives critiques, voire de perdre une partie de sa légitimité, s'il succombait à la tentation de se rendre à ce type de sollicitations, alors que les élèves attendent de lui qu'il avance ***en dépit même des ralentissements qu'ils cherchent à lui imposer***.

4.2. Une telle attente est à l'évidence antinomique de la pratique des ***révisions systématiques***. (page 8)

[...] [L]a pratique des révisions permet au professeur novice de différer le moment où il devra affronter, au double plan psychologique et technique, la difficile tâche consistant à ***créer du temps didactique*** : dans les révisions, en effet, de même par exemple que dans les leçons particulières (qui constituent fréquemment la seule expérience de direction d'étude du professeur novice), on travaille sur du temps didactique ***créé par d'autres***, et on n'a donc pas véritablement à créer du temps didactique *ex nihilo*. Par contraste, la fonction chronogène qu'assume normalement le professeur ayant la responsabilité d'une classe apparaît alors comme extrêmement exigeante : elle appelle un effort didactique et psychologique non négligeable. (page 8)

4.11. L'obligation de créer du temps didactique ne doit pas conduire à oublier que l'étude est un moyen au service d'une fin : ***l'apprentissage***. Si le temps didactique impulsé par le professeur fixe un cadre collectif de progrès, c'est bien le travail des élèves qui peut faire que les ***temps de l'apprentissage*** apparaissent globalement ***en phase*** avec l'avancée officielle de l'étude, dont le professeur reste le garant. À cet égard, l'exigence contractuelle d'un temps didactique séquentiel et irréversible ne doit pas être plaquée mécaniquement sur les processus effectifs d'apprentissage, qui se développent au contraire ***dans un décalage nécessaire avec l'actualité didactique officielle***, et où triomphent ***travail d'après-coup*** et ***retours en arrière***. Les dynamiques cognitives individuelles se cachent souvent derrière un certain immobilisme apparent ; l'apprentissage se réalise bien rarement « en temps didactique réel », et le professeur ne saurait donc se contenter d'être l'ordonnateur du temps didactique officiel. Il est tout autant un ***aide à l'étude*** qui, à travers divers dispositifs didactiques (modules, soutien, etc.), contribue de manière décisive à favoriser la mise en accord du temps individuel de chaque « apprenant » avec le temps collectif de l'étude. (page 11)

Commentaires développés oralement

Qu'est la mésogenèse ? Que veut dire ce mot ?
Pouvez-vous nous donner des définitions précises d'espace sensible et de milieu ? (2^de^, 15)

L'***espace sensible*** est l'espace qui nous entoure, celui que nous percevons et dans lequel nous nous déplaçons, que nous pouvons éprouver par l'intermédiaire de nos sens.

22 Le vendredi 9 mars 1888, à l'école de Biesles (Haute Marne), le programme de travail était ainsi le suivant : « *Matin :* Instruction morale : devoirs relatifs au corps / Copie de la rédaction / Histoire de France : Louis XIV / Devoir d'histoire de France. *Soir :* Lecture : Lyon le soir / Exercice de géométrie : tracé des tangentes / Exercice d'application / Écriture du cahier-journal ».

La ***mésogenèse*** désigne le processus de création du milieu : il reste donc à « définir » le milieu. Nous en avons donné plusieurs fois dans le séminaire des « définitions » en compréhension.Pour certains des participants au moins, ces définitions semblent insatisfaisantes. Pour aller plus loin, il faut introduire davantage de théorie puisque, dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (TAD) qui est la théorie dans laquelle nous travaillons, le milieu peut se définir à partir de la notion de rapport personnel et institutionnel à un objet. Voyons cela.

On part en TAD de quelques notions primitives : la notion d'objet (tout est objet, comme tout est ensemble en théorie des ensembles), celles de personne et d'institutions, de rapport personnel et institutionnel. On les examinera à partir d'extraits d'un texte d'Yves Chevallard, qui est à l'origine de la TAD (on trouvera la totalité du texte sur le site de son auteur : http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=62.

En théorie anthropologique du didactique, la première notion fondamentale est celle d'*objet* : est objet toute entité, matérielle ou immatérielle, *qui existe pour au moins un individu*. Tout est donc objet, y compris les personnes. Sont ainsi des objets le *nombre* sept, et aussi le *chiffre* 7, la *notion* de père et aussi ce jeune père qui promène son enfant, ou encore l'*idée* de persévérance (ou de courage, ou de vertu, etc.), et le concept mathématique de dérivée, et aussi le symbole ∂, etc. En particulier, toute *œuvre*, c'est-à-dire tout produit intentionnel de l'activité humaine, est un objet.

La deuxième notion fondamentale est celle de *rapport personnel* d'un individu x à un objet o, expression par laquelle on désigne le système, noté $R(x, o)$, de toutes les interactions que x peut avoir avec l'objet o – que x le manipule, l'utilise, en parle, en rêve, etc. On dira que *o existe pour x* si le rapport personnel de x à o est « non vide », ce qu'on note $R(x, o) \neq \varnothing$.

La troisième notion fondamentale, celle de *personne*, est alors le couple formé par un individu x et le système de ses rapports personnels $R(x, o)$, à un moment donné de l'histoire de x. Le mot de personne, tel qu'on l'emploie ici, ne doit pas faire illusion : *tout individu est une personne*, y compris le tout petit enfant, l'*infans* (étymologiquement, celui qui ne parle pas encore). Bien entendu, au cours du temps, le système des rapports personnels de x évolue : des objets qui n'existaient pas pour lui se mettent à exister ; d'autres cessent d'exister ; pour d'autres enfin le rapport personnel de x change. Dans cette évolution, l'invariant est l'*individu* ; ce qui change est la *personne*.

Lorsqu'un objet o existe pour une personne x, on dit encore que *x connaît o*, le rapport $R(x, o)$ précisant *la manière dont x connaît o*. On appelle alors *univers cognitif* de x l'ensemble $U(x) = \{ (o, R(x, o)) / R(x, o) \neq \varnothing \}$. Il convient de souligner que l'adjectif *cognitif* n'est pas pris ici dans son acception intellectualiste courante : j'ai un rapport personnel à ma brosse à dents, à la machine à café de la cafétéria, à la pédale de frein de ma voiture, etc., tous objets qui font partie de mon univers *cognitif*, de la même manière qu'en font partie, par exemple, la notion d'équation du second degré ou celle de dérivée.

Pour expliquer la formation et l'évolution de l'univers cognitif d'une personne *x*, il convient d'introduire une quatrième notion fondamentale, celle d'*institution* [1]. Une institution *I* est un dispositif social « total », qui peut certes n'avoir qu'une extension très réduite dans l'espace social (il existe des « micro-institutions »), mais qui permet – et impose – à ses *sujets*, c'est-à-dire aux personnes *x* qui viennent y occuper les différentes *positions p* offertes dans *I*, la mise en jeu de *manières de faire et de penser propres*. Ainsi la *classe* est-elle une institution (dont les deux positions essentielles sont celles de *professeur* et d'*élève*), de même que l'*établissement* (où d'autres positions apparaissent : celles de CPE, d'infirmière conseillère de santé, etc.), de même encore que cette institution qui englobe classes et établissements et qui foisonne en positions de toutes sortes, le *système éducatif*.

Comment se constitue, et comment change, l'univers cognitif $U(x)$ d'un individu x ? Comment expliquer cette *dynamique cognitive* ? Le rapport personnel de x à un objet o change – ou se crée, s'il n'existait pas encore – par l'entrée de x dans certaines œuvres O dont l'objet o est constitutif, et qui vivent en certaines institutions I où x vient occuper une certaine position p. Dès sa naissance, tout individu est ainsi *assujetti à* – c'est-à-dire à la fois *soumis à* et *soutenu par* – de multiples institutions, telle *sa famille*, dont il devient le *sujet*. En particulier, l'*infans* est assujetti d'emblée à cette institution qu'est le *langage*, et plus précisément à *cette* langue, bien qu'il ne la parle pas encore : il ne peut y échapper, et, en même temps, c'est elle qui lui permettra de parler, qui lui donnera sa « puissance » linguistique. D'une manière générale, c'est par ses *assujettissements*, par le fait qu'il est le sujet d'une multitude d'institutions, que l'individu x se constitue en une *personne*.

La théorie de la connaissance esquissée jusqu'ici à propos des individus se transfère aux institutions. Étant donné un objet o, une institution I, et une position p dans I, on appelle *rapport institutionnel* à o en position p, et on note $R_I(p, o)$, le rapport à l'objet o qui devrait être, idéalement, celui des sujets de I en position p. Dire que x est un *bon sujet* de I en position p, c'est dire que l'on a $R(x, o) \cong R_I(p, o)$, où le symbole $\cong$ désigne la *conformité* du rapport personnel de x au rapport institutionnel en position p. De même que pour une personne x, on parle alors de l'*univers cognitif de la position p de I*, $U_I(p) = \{ (o, R_I(p, o)) \mathbin{/} R_I(p, o) \neq \emptyset \}$, et, par extension, de l'univers cognitif de I, $U(I) = \bigcup_p U_I(p)$. En particulier, s'il existe une position p de I telle que $R_I(p, o) \neq \emptyset$, on dit que *I connaît o*. Pour nombre d'objets o, on a $R_I(p, o) = \emptyset$: les sujets de I en position p n'ont pas alors, *en tant que tels*, à connaître o.

En devenant sujet de I en position p, un individu x, qui est toujours déjà une personne dotée d'un certain univers cognitif $U(x)$, s'assujettit aux rapports *institutionnels* $R_I(p, o)$, qui vont remodeler ses rapports personnels : si o existe pour les sujets de I en position p, le rapport personnel de x à o, $R(x, o)$, tendra à ressembler au rapport institutionnel $R_I(p, o)$, à moins que x ne se révèle être, à cet égard, un *mauvais sujet* de I. D'une manière générale, nos rapports « personnels » sont ainsi le fruit de l'histoire de nos assujettissements institutionnels passés et présents. Réciproquement, une institution I, et les différentes œuvres O auxquelles elle sert d'habitat, ne sauraient exister sans sujets. Ceux-ci sont les acteurs de l'institution I, et donc des œuvres O qui vivent dans I, et font que celles-ci continuent d'y vivre. Il y a ainsi une dialectique *des institutions, des œuvres et des personnes*. Instituer, c'est, en français, mettre sur pied, établir, fonder, ordonner, régler : le rôle des personnes dans la *création* des institutions est ainsi attesté par le langage courant. Mais leur rôle dans le *fonctionnement* des institutions n'est pas moins essentiel. Inversement, privées d'institutions et d'œuvres – ce qui est la définition même de *l'exclusion* –, les personnes cesseraient bientôt d'exister, la désagrégation de la personne étant le prélude à la mort, sociale et peut-être biologique, de l'individu.

À partir de ces notions primitives, on peut « définir précisément » la notion de milieu de la façon suivante : à un instant t donné, le milieu institutionnel pour une institution donnée est l'ensemble des objets pour lesquels le rapport institutionnel à ces objets existe et est réputé stable et qui vont pouvoir jouer le rôle d'un « fragment de nature ». Il y aura donc mésogenèse si, entre deux instants t_1 et t_2, le milieu change parce que de nouveaux objets y sont introduits ou que le rapport à certains objets ont évolué.

On voit ainsi que la notion de milieu est relative. On peut d'abord parler du milieu pour une institution ou une personne. Dans le travail que nous poursuivons, c'est le milieu pour cette institution qu'est « une classe », ou plutôt pour un système didactique composé d'un professeur de mathématiques, y, d'élèves x_1, x_2, x_3, ... x_n, réunis autour *d'une question à étudier Q,* que nous considérons. [Un système didactique est un triplet composé d'aides à l'étude, Y, d'étudiants X, et d'un enjeu de l'étude, Q.]

La notion de rapport institutionnel permet de préciser que le milieu dont on parle dans notre travail est relatif à deux positions : celle de professeur et celle d'élève ; nous avons vu à plusieurs reprises dans les analyses et les évaluations de séances effectuées ou dans le forum des questions que ces deux milieux peuvent différer – ce qui n'est pas sans poser des problèmes pour la réussite de l'étude.

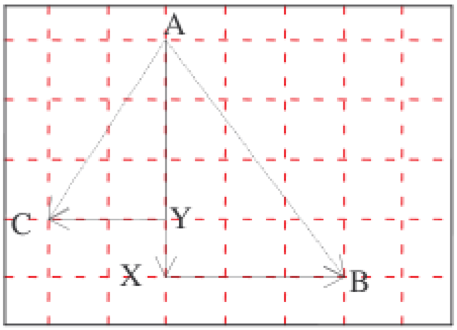
Le fait que l'institution soit le système didactique met en évidence que ce milieu dépend de la question à étudier et de l'étude menée, ce que nous avons là-encore illustré dans le travail effectué dans les séances précédentes : n'importe quel système d'objets n'est pas apte à jouer le rôle de milieu dans l'étude d'un problème. Nous le développerons ci-après en considérant deux questions qui posent le problème de la ***dialectique des médias et des milieux*** dans le cas du théorème de Pythagore ou dans des situations du même type :

> Comment élaborer une activité de début de thème lorsque le(s) élément(s) technologique(s) ne peuvent être obtenus par expérimentation (car trop difficiles...) ? Doit-on faire émerger non pas les éléments technologiques, mais des plus simples ? (Un exemple pour vous aider : théorème de Pythagore.) (4e & 3e, 14)
>
> J'ai des problèmes à imaginer une AER pour introduire le théorème de Pythagore. Je veux accorder une place suffisante au *topos* des élèves mais pour faire ressortir l'égalité de Pythagore, il faudrait leur donner par exemple la configuration (ci-contre) pour qu'ils travaillent dessus. J'avais pensé partir du problème du calcul d'hypoténuse dans un triangle rectangle, mais pour l'égalité de Pythagore, c'est un problème. Comment faire ? (J'ai cherché dans les archives du séminaire mais je n'ai rien trouvé de satisfaisant.) (4e & 3e, 16)

Nous avons vu à plusieurs reprises des praxéologies d'étude dans lesquelles une réponse à la question *Q* pouvait être produite de façon *endogène*, par le biais d'un travail d'étude du ou des problème(s) proposé(s) dirigé par des questions cruciales qui permet de confronter des assertions à un *milieu* – qui est ici, donc, un ensemble d'objets pour lesquels le rapport institutionnel est réputé stable et dénué d'intention par rapport à la question *Q*. Cela suppose, pour que l'émergence de l'OM se produise, que l'on dispose à la fois d'un ***milieu*** « suffisamment riche » (nous avons vu par exemple qu'inclure les TICE dans le milieu permettait souvent de l'enrichir) mais aussi de ***médias***, soit encore de « systèmes de mise en représentation d'une partie du monde naturel ou social à l'adresse d'un certain public : le « cours » du professeur de mathématiques, un traité de chimie, le journal d'un présentateur de télévision, un quotidien régional ou national, un site Internet, etc., relèvent en ce sens du système des médias ». Les médias utilisés dans ce cas sont par exemple pour l'essentiel les traces écrites des OM antérieurement produites et les réponses $R^{\lozenge}$ proposées par les élèves.

Les questions précédentes invoquent, par le biais du théorème de Pythagore notamment, le cas où il serait difficile que l'émergence se produise faute de pouvoir rendre possible une dialectique des médias et des milieux « endogène ». Ce cas est mentionné par les archives du Séminaire, à propos du théorème de Pythagore justement : voici par exemple un extrait des notes du Séminaire 2004-2005.

> Pour le « théorème » de Pythagore, comme pour tout autre résultat technologique, une AER qui lui est consacrée doit d'abord s'efforcer de le faire apparaître comme un résultat clé pour la réalisation de tâches de certains types (types de tâches qui seront donc, dans l'enseignement donné, les raisons d'être du théorème de Pythagore).
> ① On peut par exemple envisager de faire rencontrer aux élèves le type de tâches illustré sur la figure suivante.

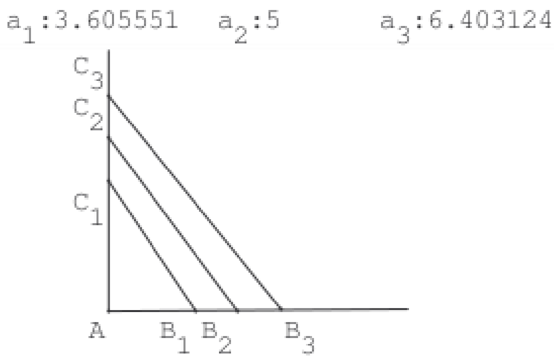


On lit sur le quadrillage que AX = 4 et XB = 3 ; on peut ***mesurer*** [AB] et trouver que AB ≈ 5. De même, on lit que AY = 3 et YC = 2 ; en mesurant [AC], on trouve que AC ≈ 3,6. Mais peut-on ***calculer*** AB et AC à partir des données lues sur le quadrillage ?

② Notons ici que la ***motivation*** de la recherche d'un tel procédé de ***calcul*** est, en géométrie, très générale : ***mesurer*** est souvent coûteux, voire impossible. On peut mesurer par exemple les diagonales des « faces » d'une armoire ayant la forme d'un parallélépipède rectangle ; mais comment mesurer sa grande diagonale avant de s'engager dans le déménagement de ladite armoire par un escalier étroit ?…

③ Répondre à la question précédente revient à déterminer la fonction de deux variables réelles strictement positives $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ telle que f(AX, XB) = AB, f(AY, YC) = AC, etc. Il s'agit là d'une question ***difficile***, même s'il est facile de voir par exemple que l'on a $f(x, y) = f(y, x)$, ou que, en vertu de l'inégalité triangulaire étudiée en 5^e, on a $f(x, y) < x + y$, ce qu'on peut bien sûr vérifier ***expérimentalement*** mais qu'on ne pourra établir ***théoriquement*** que plus tard (on a : $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} < \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy} = \sqrt{(x + y)^2} = x + y$.)

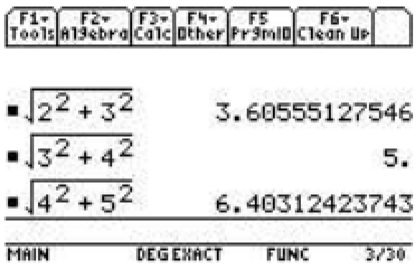
④ Une enquête pour s'assurer qu'une réponse à la question soulevée est certainement disponible « dans la culture » est un geste essentiel ! Comme en bien d'autres cas, aujourd'hui, une telle enquête peut s'appuyer sur le constat suivant : si on demande à un logiciel de géométrie dynamique de calculer la distance BC dans un triangle ABC rectangle en A dont on a fixé les longueurs des côtés [AB] et [AC], puis si on lui demande de ***calculer*** (on ne sait pas comment il le fait…) et d'***afficher*** la longueur de l'hypoténuse [BC], on obtient de sa part une réponse d'une grande précision – comme sur la figure ci-dessous, où a_i = B_iC_i, i = 1, 2, 3 – qui ne peut pas avoir été obtenue par une mesure (au moins au sens usuel du terme…), et doit donc résulter d'un calcul.



2. On peut imaginer de façon réaliste que, à l'issue de cette enquête, on soit quasiment certain que l'expression de BC en fonction de AB et AC dans un triangle rectangle ABC est connue, et, à consulter par exemple le manuel de la classe, on ait cru comprendre qu'on avait en fait

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

① On doit d'abord chercher à s'assurer qu'il n'y a pas là de ***méprise***, et, pour cela, vérifier par exemple que les résultats numériques fournis par le logiciel de géométrie et ceux donnés par la calculatrice (ou le tableur) concordent, comme le suggère ceci :

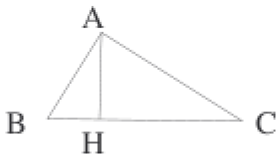


② Bien entendu, le travail mathématique ***difficile*** consisterait à ***« produire »*** la formule $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ – et non pas, simplement, à la ***déduire*** dans le cadre de la théorie géométrique disponible (ce qui, certes, n'est pas trivial). Une telle entreprise réclame une science mathématique qui est au-delà de celle disponible en 4^e, mais peut-être pas en 2de par exemple. On décrit l'affaire rapidement ici.

❶ On suppose d'abord connu un résultat fondamental de la « théorie » des aires :

Soit $\mathcal{P}$ une famille de polygones convexes ABCD... ***semblables entre eux***. Il existe un réel $k > 0$ tel que, quel que soit le polygone $P \in \mathcal{P}$ on a : $\mathcal{A}(P) = kBC^2$ (où $\mathcal{A}(P)$ désigne l'aire de P).

❷ Le résultat technologique précédent permet alors de conclure, dès lors qu'on aura observé que, dans le triangle ABC rectangle en A, la hauteur [AH] détermine trois triangles rectangles ***semblables entre eux***, ABC, HBA et HAC. Il existe donc $k > 0$ tel que l'on ait : $\mathcal{A}(ABC) = kBC^2$, $\mathcal{A}(HBA) = kBA^2$, $\mathcal{A}(HAC) = kAC^2$. Comme à l'évidence on a $\mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(HBA) + \mathcal{A}(HAC)$, il vient $kBC^2 = kBA^2 + kAC^2$ et donc : $BC^2 = BA^2 + AC^2$.



❸ La relation de Pythagore apparaît ainsi comme « forcée » par des contraintes de la géométrie du plan exprimées en termes d'aires. En classe de 2de, la « démonstration » précédente – publiée en 1908 par un professeur de mathématiques hollandais, H.A. Naber – pourra s'intégrer dans le travail de construction de la capacité (« attendue ») à ***résoudre des problèmes mettant en jeu formes et aires***.

La solution proposée est ainsi de faire appel à un média exogène, le livre de la classe ici mais on peut également penser à Internet ou tout autre média approprié. Il reste alors « classiquement » à mettre à l'épreuve de milieux le résultat obtenu. Cette dialectique des médias et des milieux, qui consiste à faire parler des médias et à mettre à l'épreuve de milieux les assertions obtenues, est au cœur du travail de réalisation des moments exploratoires et technologico-théoriques, nous y reviendrons.

La dévolution du problème est-elle un moment à part entière ou est-ce un dispositif de mise en place des moments ? (2de, 16)
Dans l'analyse du TER, doit-on faire une analyse détaillée des différents points dans la partie gestion de classe ? Concernant le *topos*, par exemple, doit-on préciser quel *topos* nous avons dans les différents moments de la séance ou bien faire une synthèse ? Peut-on considérer la dévolution comme le premier épisode de la séance ? (3e, 16)
Dans l'analyse d'un compte-rendu, la gestion de la classe doit-elle être mise dans le paragraphe gestion de la séance ? (2de, 16)

Faire dévolution aux élèves d'un certain problème, c'est (réussir à) faire qu'ils se considèrent comme responsables de sa résolution, au lieu de se livrer à des tâches parcellaires impulsées par les consignes successives de l'enseignant (et non par la stratégie de résolution dans laquelle ils se seraient engagés) : il ne s'agit pas d'un moment de l'étude mais d'une tâche didactique que doit accomplir le professeur et qui conditionne la réalisation des moments de l'étude. On peut la voir comme faisant partie le plus souvent de la réalisation du moment de première rencontre, et/ou suivant les OD de celle du moment exploratoire. Il y a également, dans le processus d'étude, à faire dévolution de tâches didactiques aux élèves par le biais de questions cruciales appropriées – il est par exemple le plus souvent nécessaire de faire dévolution du problème de la validité des assertions émises –, mais cela fera partie, là encore, de la réalisation des moments de l'étude – dans le cas de la validité des assertions, il s'agit de la réalisation du moment technologico-théorique.

La rubrique « gestion de la séance » de l'analyse consigne les éléments pour lesquels le professeur a pris une décision « dans l'action » qui va changer le devenir de la séance. Il s'agit ainsi de mettre en évidence les événements «impromptus », « non prévus », qui ont fait que les choses se sont passées ainsi alors que, si telle autre décision avait été prise, elles auraient pu se passer autrement. Dans cette perspective, les éléments de gestion de la classe, ou encore de gestion du *topos* des élèves ne relèvent pas tous de la gestion de la séance. Par exemple, si le professeur fait mettre les élèves en groupe, il s'agit très vraisemblablement d'un dispositif prévu qui fait partie de l'organisation didactique, ou encore s'il ne prend pas en charge, de manière récurrente, les propositions des élèves, on a là un trait de l'organisation de l'étude ; tandis que si, à un moment donné dans la séance, un professeur « choisit » d'écarter ou de ne pas entendre la proposition d'un élève, on pourra le mentionner dans la rubrique gestion de la séance.

On ajoutera pour terminer cette mise au point des éléments relatifs à l'évaluation des séances observées qui semble poser problème dans le travail de TER.

On l'a dit, et on le répète, l'évaluation prend appui sur l'analyse : elle doit expliciter dans les ingrédients mis au jour dans l'analyse ceux pour lesquels on considère que « ça va » et ceux pour lesquels on considère que « ça ne va pas ». Pour faciliter le travail, on pourra suivre, donc, la même structure que l'analyse : on évaluera d'abord l'organisation mathématique, puis l'organisation didactique et enfin la gestion de la séance.

Du point de vue de l'évaluation de l'organisation mathématique, on évaluera notamment le ou les types de tâches choisis du point de vue de leur explicitation, de leur pertinence, de leur avenir,... ; la (voire les) techniques mises en place, en particulier du point de vue de leur intelligibilité, de leur portée, de leur fiabilité, ... ; les éléments technologiques et leur justification. Cela suppose que l'on ait soigneusement analysé l'OM enjeu de l'étude.

Du point de vue de l'évaluation de l'organisation didactique, il n'y a pas lieu de suivre une structure différente de la structure de l'analyse : on examinera en quoi la réalisation des moments de l'étude analysée va ou ne va pas. On soulignera deux points :
1. d'une part, la structuration de l'évaluation en deux parties distinctes, points positifs et points négatifs, est en généralement peu aisée à rédiger parce qu'elle comporte des redondances, ce qui amène le plus souvent les rédactions à des incohérences formelles. Il est plus productif de donner une évaluation contrastée de la réalisation des moments didactiques en disant que telle chose va tandis que telle autre chose ne va pas ;
2. d'autre part, structurer l'évaluation selon les quatre axes de la chronogenèse, de la topogenèse, de la mésogenèse et de la dialectique du groupe et de l'individu est peu adapté au travail à effectuer pour deux raisons au moins : cela demande un recul que la grande majorité des élèves professeurs n'ont pas (pas encore !), ne serait-ce que parce qu'ils sont assez dialectiquement liés, et les résultats obtenus avec ce point de vue sont la plupart du temps insuffisants et peu convaincants ; le problème du professeur est de celui de la réalisation des moments de l'étude et c'est donc par cette entrée qu'il est le plus fonctionnel de travailler, les quatre axes mentionnés donnant une « grille d'évaluation » (et d'analyse aussi, bien sûr) des techniques de réalisation des moments de l'étude sans qu'il faille nécessairement la faire ressortir comme structure de rédaction.

Je voudrais quelques précisions sur le PER. Dans l'exemple que nous avions vu en séminaire, il s'agissait de construire un morceau de figure effacé ou hors de la feuille à l'aide de techniques différentes (et technologies différentes). J'ai vu d'autres activités depuis, faisant partie ou considérées comme PER. Mais un PER est-ce :

- un même énoncé, questions différentes (différents types de tâches) (dans chaque activité) ?
- même type de tâches, pas même énoncé (spécimen), pas même technique ?
- suite d'une AER pour plusieurs types de tâches ? (2de, 16)

Un parcours d'étude et de recherche, c'est d'abord un dispositif qui va permettre la mise en place d'une OM au niveau d'un secteur d'étude. On rappelle ici la partie spécifique de l'***échelle des niveaux de codétermination didactique*** que nous manipulons depuis le début de l'année (échelle que nous complèterons ultérieurement) :

$$\text{sujet} \leftrightarrows \text{thème} \leftrightarrows \text{secteur} \leftrightarrows \text{domaine} \leftrightarrows \text{discipline}$$

Par exemple, pour la classe de 4^{e}, un sujet pourra être le calcul de la longueur d'un coté d'un triangle rectangle dont on connaît les deux autres côtés, qui dépend du thème relatif au théorème de Pythagore, ce thème étant inséré dans le secteur des Figures planes relatif au domaine de la Géométrie.

Il va donc partir d'un type de tâches « assez large » : par exemple en géométrie, calculer une longueur dans une configuration du plan, est un type de tâches qui peut faire émerger une bonne partie du secteur des Figures planes en 4^{e}. Il faut cependant, pour faire étudier ce type de tâches, le spécifier dans un certain nombre de problèmes qui relèveront de sous-types de tâches : par exemple, en 4^{e} toujours, calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle, ou encore calculer la longueur du côté d'un triangle dont on connaît certaines longueurs déterminées par une parallèle à un côté, etc. On a donc un type de tâches assez large, relevant du secteur, que l'on spécifie en problèmes permettant d'aborder des types de tâches relevant d'un thème voire d'un sujet.

L'émergence de l'OM à partir de ces problèmes, soit encore la dynamique de l'étude de ces problèmes, peut nécessiter la considération de plusieurs problèmes du même type. Examinons par exemple le début de PER à propos des fonctions en seconde que nous avions commencer à étudier. Il part d'un type de tâches, maximiser une aire, qui relève du type de tâches plus général, optimiser une grandeur, à travers le problème suivant :

> Un maître nageur dispose d'un cordon flottant de 160 mètres de longueur. Il veut délimiter une surface de baignade de forme rectangulaire. Comment peut-il disposer le cordon ?

Supposons par exemple, ce qui n'est pas le cas dans le scénario prévu, que les élèves trouvent rapidement la longueur du côté pour que la surface de baignade soit maximum. Il peut être opportun, avant d'engager le travail de déduction, d'explorer un autre spécimen du même type de problème en prenant une autre longueur de cordon, 185 m par exemple, où le maximum n'est pas atteint en une valeur entière :cela permettrait notamment d'enrichir le milieu.

Nous poursuivrons ici l'examen de ce début de PER en considérant d'abord l'organisation mathématique dont l'émergence est visée.

Le principal type de tâches identifié durant les séances, déterminer le maximum d'une fonction, *f*, sur un intervalle, *I*, s'accomplit suivant une technique que l'on peut analyser ainsi :

> τ. Représenter graphiquement la fonction *f* sur l'intervalle *I* ; lire l'ordonnée du point le plus haut sur la représentation graphique ; le vérifier, lorsque l'on a l'expression algébrique de *f*, avec une table de valeurs.

On notera que dans le compte rendu fictif proposé par les auteurs du mémoire, la lecture graphique de la valeur du maximum est considérée comme transparente, alors que dans le cas considéré elle nécessite un travail non négligeable, notamment dans le choix des fenêtres graphiques. On notera aussi qu'ils n'ont pas proposé d'utiliser la fonction « maximum » du module graphique de la calculatrice, ce qui aurait permis d'obtenir « directement » le résultat cherché.

Cette technique repose principalement sur la définition du maximum d'une fonction et de sa courbe représentative.
Cette OML devrait venir s'amalgamer à d'autres pour créer une organisation mathématique régionale (OMR) dans laquelle la technique τ viendrait s'intégrer comme étape expérimentale pour certaines fonctions au sein d'une technique comme la suivante, τ_{max} :

1) Si la fonction est homographique, du second degré voire trigonométrique,
   a) τ ;
   b) déduire de la théorie fonctionnelle disponible la valeur du maximum identifié.
2) Sinon, τ

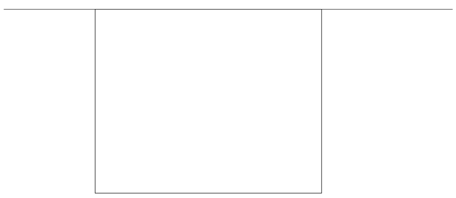
Cet ingrédient de la conception d'un PER, qui relève de la gestion d'un temps didactique « à plus long terme », n'est pas mentionné par les élèves professeurs, même comme horizon : on ne peut cependant pas en déduire qu'ils l'ignorent puisque l'ambition du mémoire professionnel est « limitée » à l'amélioration de la séance observée sur un aspect jugé négativement – il ne s'agit en aucun cas de développer un PER.

Il peut être formulé, plus généralement, ainsi : lorsque l'on a fait émerger plusieurs techniques pour un même type de tâches, il convient de les amalgamer en une technique, l'amalgamation se faisant selon la portée de chacune des techniques. C'est cela qui permettra de constituer une OMR.

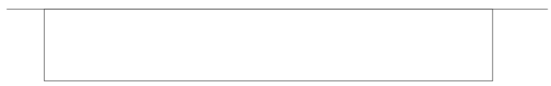
On poursuivra le travail en examinant la manière dont sont réalisés les moments exploratoires et technologico-théoriques.

Comme nous l'avons déjà signalé, le compte rendu fictif débute par un épisode de dévolution de la tâche problématique, qui va permettre de faire rencontrer le type de tâches enjeu de l'étude : maximiser l'aire d'un système. L'exploration de ce type de tâches constitue l'essentiel de la première séance prévue, et permet d'aboutir à la mise en évidence d'un premier embryon de technique : il s'agit d'exprimer cette grandeur, l'aire, en fonction d'une autre grandeur, exogène, attachée au système. On y trouve aussi un début de constitution de l'environnement technologico-théorique (les notions de fonction et d'intervalle de définition) ; nous y reviendrons. Ce moment exploratoire se poursuit dans la « deuxième » séance développée dans le mémoire, qui voit la constitution de la technique tandis que le moment technologico-théorique y est, quant à lui, fort peu développé.

On examinera d'abord ci-après le début du travail exploratoire, que l'on peut considérer inauguré par la deuxième question cruciale envisagée : « Est-on capable de trouver des rectangles correspondant à des surfaces de baignade possibles » (p. 41). On l'a vu plus haut, ce moment exploratoire débute par un épisode expérimental qui aboutit d'abord à un premier modèle géométrico-numérique de la situation proposée, sous la forme des deux spécimens suivants :



50 + 60 + 50 = 160



20 + 120 + 20 = 160

Les élèves professeurs enchaînent alors assez rapidement les troisième, quatrième, cinquième, sixième et septième questions cruciales.

Bilan : Rectangle 1 largeur = 50 m longueur = 60 m
Rectangle 2 largeur = 20 m longueur = 120 m

Question cruciale n°3 : « Parmi les propositions précédentes comment le maitre nageur va-t-il alors choisir de poser le cordon ? »

E : Comme il y a beaucoup de monde, on prend celle où il y a le plus de place pour nager.
E' : Mais c'est le même cordon toutes les surfaces de baignade qu'on fera auront la même aire.
E'' : Mais non !
P : On a qu'à vérifier avec les deux propositions qui sont au tableau.

Question cruciale n°4 : quelle est l'aire des deux rectangles au tableau ?

Un élève va au tableau pour rédiger la réponse :
rectangle 1 : 50 60 = 3000 l'aire est de 3000 m^2
rectangle 2 : 120 20 =2400 l'aire est de 2400 m^2
E : Donc même si on a le même cordon, la surface de baignade qu'on délimite n'est pas forcément la même.

Bilan : L'aire du rectangle 1 est de 3000 m^2 et celle du rectangle 2 est de 2400 m^2.
L'aire varie.

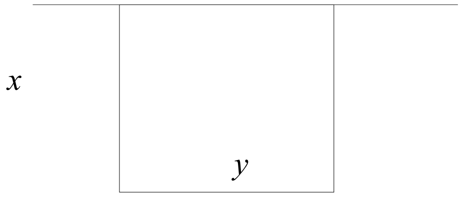
Question cruciale n°5 : de quoi dépend l'aire ?

E : De la largeur et la longueur du rectangle.
P : Oui, et alors le maitre nageur on lui conseille quelle proposition ?
E : Ben la première parce que l'aire est plus grande.
P : Et on peut trouver mieux, c'est à dire un plus grande surface de baignade avec le même cordon ?
E : Ben sûrement.

Question cruciale n°6 : comment on pourrait faire pour trouver la meilleure proposition ?

E : On calcule dans le cas général.

E : Comme l'aire dépend de la largeur et de la longueur, on pose x la largeur du rectangle et y sa longueur.



Bilan : Posons x la largeur du rectangle et y sa longueur.

Question cruciale n°7 : comment mettre en équation les données du problème ?

Rien ne justifie, du point de vue de l'expérimentation, la limitation à deux exemples de rectangle, tout au contraire : il s'agit ici d'obtenir un rectangle d'aire maximale et on peut d'abord essayer de faire davantage fonctionner le modèle précédent. On pourrait par exemple obtenir assez vite sans doute les égalités complémentaires suivantes et les valeurs des aires correspondantes [23] :

10 m + 140 m + 10 m = 160 m ; aire = 1400 m^2 // 30 m + 100 m + 30 m = 160 m ; aire = 3000 m^2 // 40 m + 80 m + 40 m = 160 m ; aire = 3200 m^2 // 60 m + 40 m + 60 m = 160 m ; aire = 2400 m^2 // 70 m + 20 m + 70 m = 160 m ; aire = 1400 m^2.

On pourrait voir ainsi que, apparemment, l'aire augmente, puis diminue, ou encore que parmi les données produites, la valeur maximale de l'aire est 3200 m^2.

C'est ce type de travail que les élèves professeurs éludent : la technique qu'ils envisagent pour mettre en place l'expression de l'aire en fonction de la longueur, à savoir la « résolution du système » $\begin{cases} A = x \times y \\ 2x + y = 160 \end{cases}$, paraît trop éloignée de la dynamique de l'étude et inutilement compliquée. En effet, si le travail exploratoire avait été davantage développé, on aurait pu s'attendre

Côté 1	10 m	20 m	30 m	40 m	50 m	60 m	70 m
Côté 2	140 m	120 m	100 m	80 m	60 m	40 m	20 m
Aire	1400 m^2	2400 m^2	3000 m^2	3200 m^2	3000 m^2	2400m^2	1400 m^2

à ce que la classe obtienne d'abord un tableau de résultats du type suivant :

Il s'agirait ensuite de mettre ces assertions à l'épreuve (ou l'une d'entre elles si les deux n'émergent pas), par exemple en convoquant un tableur. On trouvera dans le tableau 1 les traces d'une telle expérimentation.

Tableau 1. Traces de l'expérimentation sur un tableur.

Coté 1	Coté 2 160-2*coté1	Aire Coté 1 * coté 2
1	158	158
5	150	750
10	140	1400
15	130	1950
20	120	2400
25	110	2750
30	100	3000
35	90	3150
40	80	3200
45	70	3150
50	60	3000
55	50	2750
60	40	2400
65	30	1950
70	20	1400
75	10	750
80	0	0

Coté 1	Coté 2 160-2*coté1	Aire Coté 1 * coté 2
30	100	3000
31	98	3038
32	96	3072
33	94	3102
34	92	3128
35	90	3150
36	88	3168
37	86	3182
38	84	3192
39	82	3198
40	80	3200
41	78	3198
42	76	3192
43	74	3182
44	72	3168
45	70	3150
46	68	3128

23 . Nous avons systématiquement restitué les unités manquantes dans les égalités.

Coté 1	Coté 2 160-2*coté1	Aire Coté 1 * coté 2
37	86	3182
37,5	85	3187,5
38	84	3192
38,5	83	3195,5
39	82	3198
39,5	81	3199,5
40	80	3200
40,5	79	3199,5
41	78	3198
41,5	77	3195,5
42	76	3192
42,5	75	3187,5
43	74	3182

Coté 1	Coté 2 160-2*coté1	Aire Coté 1 * coté 2
39	82	3198
39,1	81,8	3198,38
39,2	81,6	3198,72
39,3	81,4	3199,02
39,4	81,2	3199,28
39,5	81	3199,5
39,6	80,8	3199,68
39,7	80,6	3199,82
39,8	80,4	3199,92
39,9	80,2	3199,98
40	80	3200
40,1	79,8	3199,98
40,2	79,6	3199,92
40,3	79,4	3199,82
40,4	79,2	3199,68
40,5	79	3199,5

De plus, la répétition du calcul du deuxième côté à partir du premier ferait apparaître le fait que côté 2 = 160 m – 2 × côté 1, ce qui permettrait, quand cela s'avère nécessaire, d'exprimer l'aire en fonction du premier côté. (Suivant la modélisation, il pourrait bien entendu apparaître également le fait que le premier coté est la moitié de la différence entre le périmètre et le deuxième côté.)
On voit ainsi se dessiner une arborescence de questions cruciales qui pourrait être la suivante :

- Est-on capable de trouver des rectangles correspondant à des surfaces de baignade possibles ?
  - Si certains rencontrent des problèmes : comment s'y prend-on pour trouver un rectangle qui convient ?
  - Si l'expression de l'un des côtés en fonction de l'autre apparaît, la mettre à l'épreuve : est-ce que cette technique de détermination des côtés fonctionne ?
- Peut-on trouver d'autres rectangles ? (Pour relancer éventuellement la fabrication de données.)
- Parmi les rectangles dont on dispose, lequel correspond à la plus grande surface de baignade ? Peut-on en trouver une plus grande ?
  - Si la proposition de faire le travail avec le tableur n'émerge pas : comment pourrait-on obtenir davantage de données plus rapidement ?
- Etc.

Par contraste, on voit poindre dans le compte rendu fictif proposé une introduction opportuniste d'objets mathématiques alors que le traitement de la situation ne l'exige pas : la technique d'*exploration du type de tâches* semble clairement trop peu développée, avec notamment une dialectique des médias et des milieux trop pauvre. Explorer un type de tâches devrait en effet amener à se donner un corpus de données « suffisant », qui puisse constituer un morceau de médias/milieux pour permettre ou favoriser l'émergence de la technique : il s'agit de « faire parler » ce corpus ou, pour le dire autrement, de produire des assertions à propos de ce corpus de données et de les mettre à l'épreuve, quitte à enrichir le corpus de données pour cela, mais sans anticiper, c'est-à-dire sans utiliser des ingrédients mathématiques que les élèves n'ont pas à connaître ou n'ont pas encore étudié. (Une telle anticipation pourrait être ici de faire remarquer la « symétrie » des données par rapport à 40 alors qu'elle n'apparaît pas encore dans le corpus de données que les élèves se sont rendu disponible ou qu'ils ne la voient pas en ces termes.)
Ce travail exploratoire doit être effectué par la classe, mais aussi, au préalable, par *les professeurs* qui doivent en explorer tous les aspects possibles, parce que c'est ce travail qui va permettre de produire une arborescence de questions cruciales, comme on en a vu les prémisses plus haut. Manifestement, ici, la suite de questions cruciales n'est pas issue d'une étude de ce type mais ressemble, particulièrement à partir de la septième question cruciale, à une étude lacunaire « standard ».

On ajoutera que la réalisation du moment technologico-théorique, n'est pas véritablement prise en charge dans le compte rendu fictif développé, spécialement dans la deuxième séance envisagée. La définition d'un maximum, notamment, n'est pas mise en relation avec la modélisation graphique proposée (le point le plus haut de la courbe) qui, elle-même, est considérée comme allant de soi. Pour le dire autrement, aucune question cruciale ne pose le problème de la mise à l'épreuve des assertions formulées, ce qui empêche la réalisation d'un épisode du moment technologico-théorique. On notera que cela handicape également la mise en forme de l'organisation mathématique étudiée : si la distinction faite dans le mémoire entre les bilans d'étape et la synthèse est pertinente pour permettre l'institutionnalisation d'OM suffisamment amalgamées, la synthèse visée manque les fonctions technologiques des propriétés qui y sont enregistrées.

2. Observation, analyse & évaluation : algèbre en quatrième

Nous débuterons ici le travail d'observation et d'analyse d'une séance relative à l'algèbre en classe de 4^{e}.

Examen collectif du début de la vidéo (17 minutes) dont on trouvera le compte rendu ci-dessous.

La séance observée s'est déroulée le jeudi 22 février 2007, de 11 h 15 à 12 h 10.

Il est 11 h 16. Les élèves entrent, non sans déambulations dans la salle. P apostrophe l'un d'eux. Un élève à l'air bougon va se placer au fond de la classe, à droite. P donne le signal de s'asseoir.

Il est 11 h 18. P : « Alors, tout d'abord, on reprend le bilan de ce qu'on a fait à 8 heures… Qu'est-ce que vous tirez de ce qu'on a fait sur les programmes de calcul ? » Un élève : « Ils sont tous pareils ! » P marque son étonnement : « Qu'est-ce que vous avez marqué ? Dans le bilan ? Ouais… » Puis : « Vous dites tous à peu près pareil. À chaque fois on a fait la même suite de calculs. Un programme de calcul, ça nous sert à répondre à un problème. Par rapport à l'utilisation de l'ordinateur ? Ça va plus vite ! » Un élève : « Eh oui ! » Un autre décrit la création du contenu de la colonne A (on tape 1 dans A1, 2 dans A2, etc.). P approuve : « Sur la colonne A on donne des valeurs à x ; et puis ?… » Un élève : « On a fait des calculs avec. » P : « Sur l'autre colonne, on avait le… programme de calcul, d'accord ! Ça vous permet d'aller très vite. » Elle enchaîne : « Maintenant, je vais vous donne un programme de calcul. Chacun vous choisissez un nombre et vous le faites. » Murmures… Il est 11 h 22.

P : « Vous choisissez un nombre ! » Bruits, léger chahut. « Je vous donne un programme de calcul ; vous choisissez un nombre, vous ne me dites pas ce nombre, vous calculez. » Elle commence : « Vous le multipliez par –3. » Le garçon du fond à droite : « Je comprends rien ! » P poursuit : « Vous ajoutez 8 à ce résultat. » Puis : « Vous multipliez ce résultat par 5. » Un élève s'exclame : « –65 !… » P : « Non ! Vous ne le dites pas ! » Elle continue : « Maintenant vous ajoutez 17 fois le nombre de départ. » Des élèves : « Hein ? Quoi !… » Un élève, sur la gauche : « Ça marche pas ! » P : « Pour terminer, vous retranchez 40. » Certains élèves semblent ne pas comprendre le sens du verbe « retrancher » ; P reformule la consigne : « Vous enlevez 40. » Elle commente : « Maintenant, le programme de calcul est terminé ! Ça y est ? Tout le monde a son nombre d'arrivée ? » Elle se déplace dans la classe, apostrophe de loin des élèves bruyants : « Oh ! S'il vous plaît, là ! »

P : « Qui peut me donner le résultat obtenu ? » Des élèves lèvent le doigt. Sur l'indication de l'un d'eux, P écrit au tableau le nombre prétendument obtenu :

185

P : « Il trouve 185 comme résultat final. Il a pris… » (Elle écrit le nombre et entoure l'écriture du nombre.)

$\boxed{92{,}5}$

Ce n'est pas ça ! Un élève a compris le « truc » : « Madame, vous avez divisé par 2 pour savoir. » P demande un autre résultat. Elle l'écrit, et marque à la suite le nombre choisi au départ :

20 668

10 334

Ce n'est pas ça non plus ! P : « Ça veut dire que vous avez fait des erreurs… Qui trouve que le nombre d'arrivée est le double du nombre de départ ? » Plusieurs doigts se lèvent. P confirme que c'était cela qu'il fallait trouver : « On avait un programme de calcul qui était quand même assez compliqué. Qu'est-ce qui se passe ? » Un élève : « Normalement, ça devrait être plus grand ! » P poursuit : « Moi, j'arrive en un instant à vous dire le nombre que vous avez choisi au départ. On trouve le double. » Un élève : « Plus que le double ! » Des élèves : « Non ! Le double ! »

Commentaires développés oralement
1. Le fait de travailler oralement implique que les élèves n'ont pas de moyen de contrôler ce qu'ils font pendant l'exécution du programme de calcul (c'est un problème de mésogenèse : on les prive d'un élément de milieu). En outre, le travail effectué dans cette partie n'aura aucune traces écrites.
2. Le professeur ne donne pas aux élèves de place dans la validité des assertions et elle tue le problème posé « dans l'œuf » : ce problème de topogenèse est très lié à une question de mésogenèse : s'il y a débat entre le professeur et les élèves sur le nombre dont on est parti, quel milieu convoquer pour mettre à l'épreuve les assertions produites ?

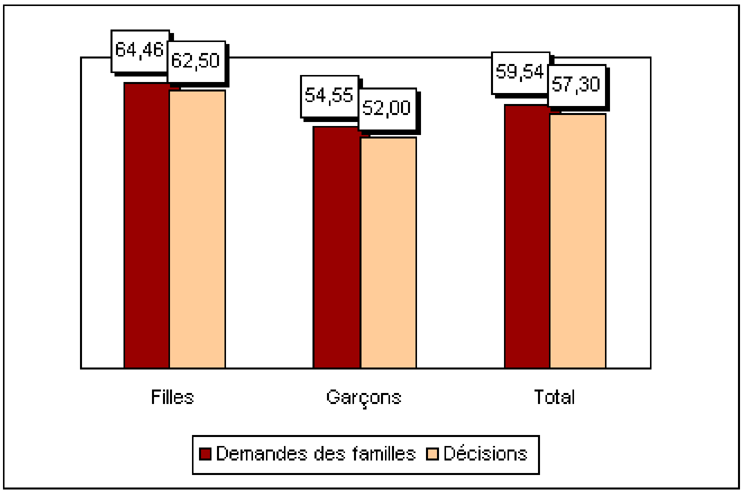
On poursuivra ce travail lors de la prochaine séance.

3. Forum des questions : l'orientation (suite)

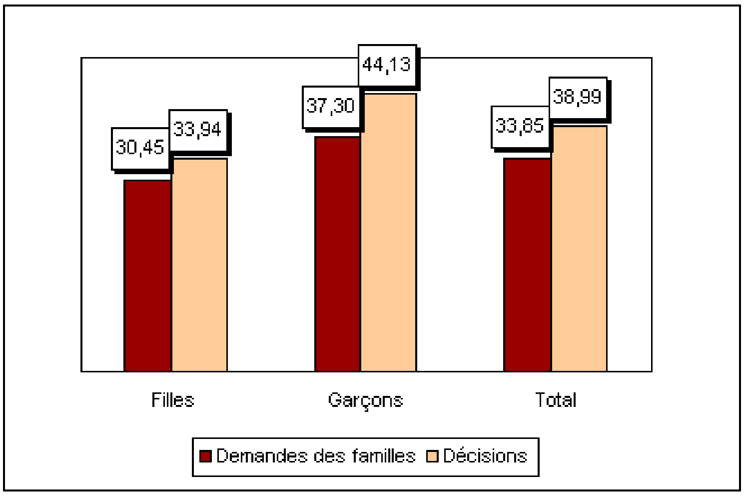
Nous avions dit, lors de la dernière séance, que la connaissance des statistiques concernant l'orientation et le redoublement peut être une aide précieuse. Elle permet de se faire une idée sur les pratiques dans ce domaine ainsi que sur leur évolution. Là encore, on s'appuiera sur des documents du même site Eduscol.

Orientation en fin de troisième (année 2008)

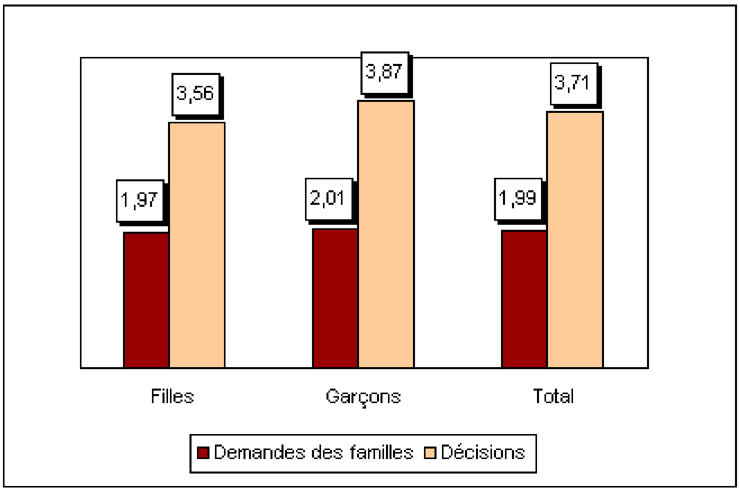
• Passage en classe de seconde général et technologique



• Passage en classe de seconde professionnelle :



• Redoublement :



On peut regarder quelle est l'évolution ces dernières années de ces différents taux (passage en seconde générale, passage en seconde professionnelle, redoublement) :

Passage en seconde générale et technologique

Demandes des familles	**juin-05**	**juin-06**	**juin-07**	**juin-08**
Filles	68, 65	67, 27	64, 96	64, 46
Garçons	60, 63	60, 05	55, 50	54, 55
Total	64, 64	63, 74	62, 92	59, 54
Décisions	**juin-05**	**juin-06**	**juin-07**	**juin-08**
Filles	64, 84	64, 15	62, 08	62, 50
Garçons	55, 98	55, 70	52, 13	52, 00
Total	60, 41	60, 05	57, 15	57, 30
Écarts décisions-demandes	**juin-05**	**juin-06**	**juin-07**	**juin-08**
Filles	-3, 81	-3, 12	-2, 88	-1, 96

Garçons	-4, 65	-4, 35	-3, 37	-2, 55
Total	-4, 23	-3, 69	-5, 77	-2, 24

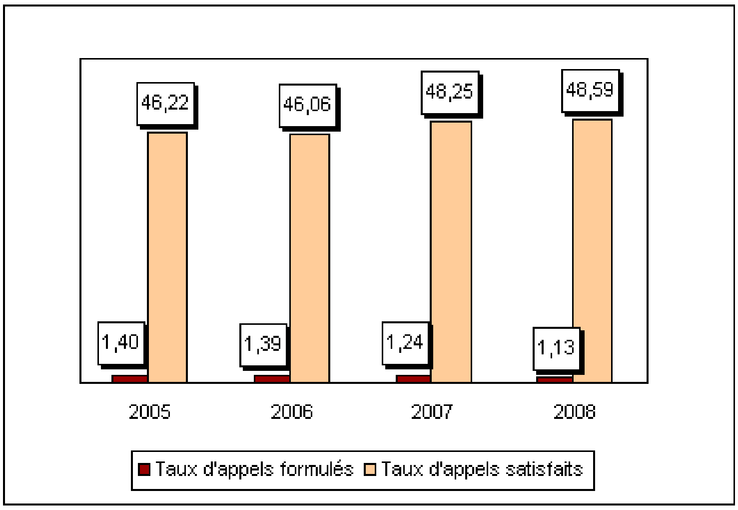
Passage en seconde professionnelle et en première année de CAP

Demandes des familles	juin-05	juin-06	juin-07	juin-08
Filles	26, 94	27, 79	29, 95	30, 45
Garçons	32, 95	32, 81	36, 15	37, 30
Total	29, 95	30, 24	30, 83	33, 85
Décisions	**juin-05**	**juin-06**	**juin-07**	**juin-08**
Filles	30, 74	31, 45	34, 01	33, 94
Garçons	39, 00	39, 41	43, 54	44, 13
Total	34, 87	35, 31	38, 74	38, 99
Écarts décisions-demandes	**juin-05**	**juin-06**	**juin-07**	**juin-08**
Filles	3, 80	3, 66	4, 06	3, 49
Garçons	6, 05	6, 60	7, 39	6, 83
Total	4, 93	5, 07	7, 91	5, 14

Redoublement de la troisième

Demandes des familles	juin-05	juin-06	juin-07	juin-08
Filles	2, 18	2, 37	2, 08	1, 97
Garçons	2, 30	2, 42	2, 12	2, 01
Total	2, 24	2, 40	1, 96	1, 99
Décisions	**juin-05**	**juin-06**	**juin-07**	**juin-08**
Filles	4, 41	4, 40	3, 91	3, 56
Garçons	5, 03	4, 89	4, 33	3, 87
total	4, 72	4, 64	4, 12	3, 71
Écarts décisions-demandes	**juin-05**	**juin-06**	**juin-07**	**juin-08**
Filles	2, 23	2, 03	1, 83	1, 59
Garçons	2, 73	2, 47	2, 21	1, 86
Total	2, 48	2, 24	2, 16	1, 72

On sait qu'en cas de désaccord entre la proposition du conseil de classe et la demande des familles, il est possible de faire appel. Quel est l'évolution du taux de satisfaction en appel ?

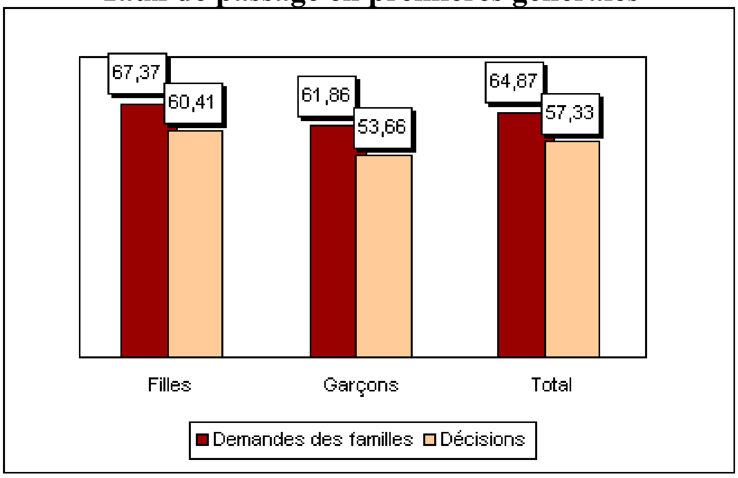


Orientation en fin de seconde générale et technologique

Regardons comme précédemment l'orientation des élèves en fin de seconde (juin 2008)

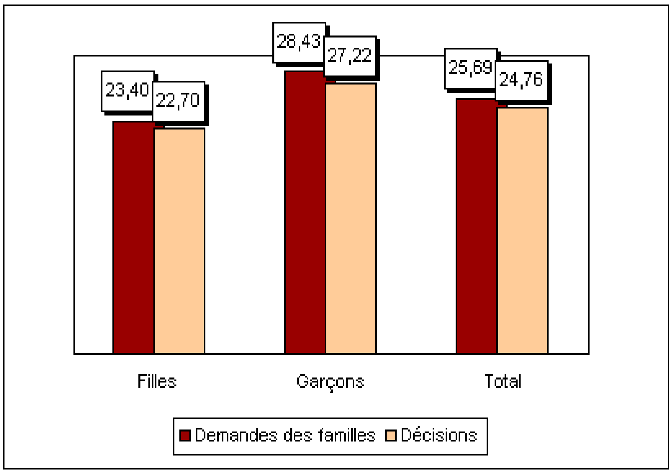
- Passage en classe de premières générales

Taux de passage en premières générales



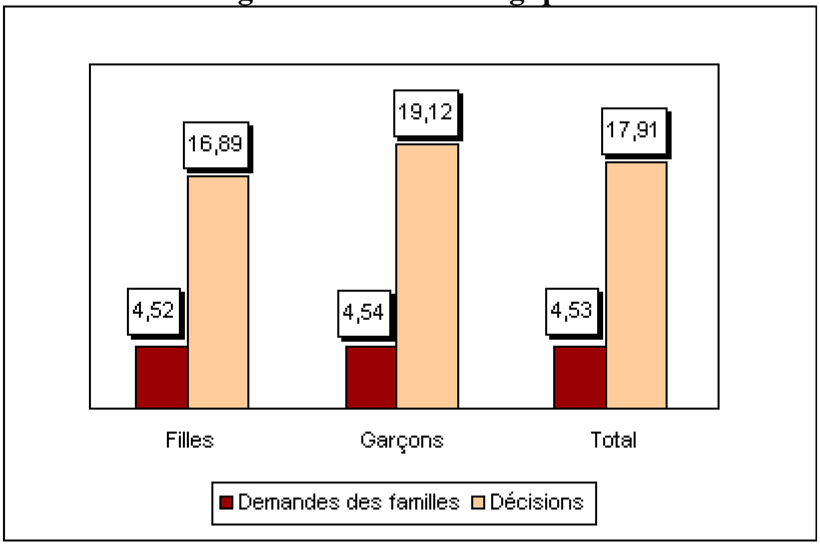
- Passage en classe de premières technologiques

Taux de passage en premières technologiques



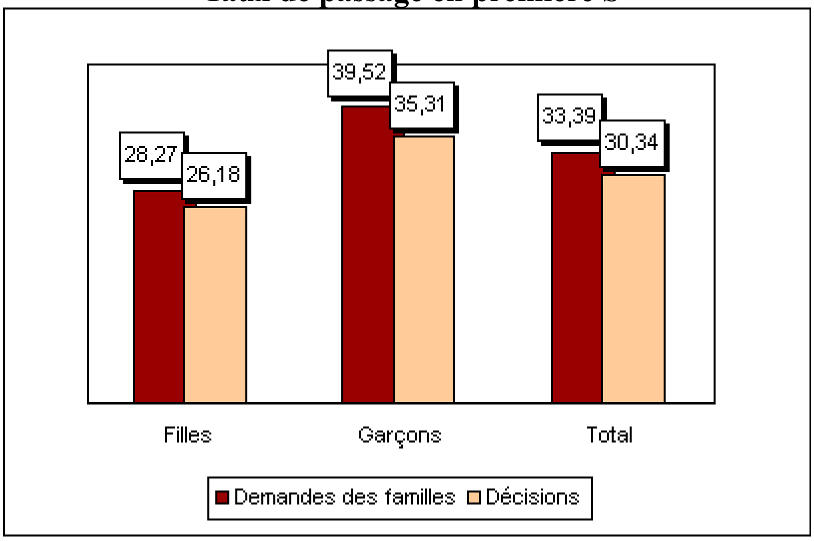
• Redoublement

Taux de redoublement de la classe de seconde générale et technologique



Par curiosité, pour des professeurs de mathématiques, qu'en est-il de l'orientation en classe de 1re S ?

Taux de passage en première S



Comme précédemment, on peut regarder l'évolution au fil des années (2003 – 2006) :

• Passage en première toutes séries confondues

Demandes des familles	juin-03	juin-04	juin-05	juin-06	juin-07	juin-08
Filles	90, 3	90, 2	90,06	89,6	90,06	90,77
Garçons	89, 6	89, 3	89,6	89,09	89,75	90,29
Total	90, 0	89, 8	89,85	89,37	89,92	90,56
Décisions	**juin-03**	**juin-04**	**juin-05**	**juin-06**	**juin-07**	**juin-08**
Filles	79, 1	80, 0	81,1	80,28	81,8	83,11
Garçons	75, 9	76, 9	78,5	77,8	79,86	80,88
Total	77, 7	78, 6	79,94	79,18	80,93	82,09
Écarts décisions-demandes	**juin-03**	**juin-04**	**juin-05**	**juin-06**	**juin-07**	**juin-08**
Filles	-11, 2	-10, 2	-8,96	-9,32	-8,26	-7,66
Garçons	-13, 7	-12, 4	-11,09	-11,25	-9,89	-9,41
Total	-12, 3	-11, 2	-9,91	-10,19	-8,89	-8,47

• Redoublement

Demandes des familles	juin-03	juin-04	juin-05	juin-06	juin-07	juin-08
Filles	5, 4	5, 2	5, 2	5, 4	5,06	4,52
Garçons	5, 8	5, 6	5, 4	5, 6	4,94	4,54
Total	5, 6	5, 4	5, 3	5, 5	5,01	4,53
Décisions	**juin-03**	**juin-04**	**juin-05**	**juin-06**	**juin-07**	**juin-08**
Filles	15, 7	14, 2	12, 6	13, 8	18,2	16,89
Garçons	17, 9	15, 9	14, 3	15, 2	20,11	19,12
Total	16, 7	14, 9	13, 4	14, 4	19,07	17,91
Écarts décisions-demandes	**juin-03**	**juin-04**	**juin-05**	**juin-06**	**juin-07**	**juin-08**
Filles	10, 3	9, 0	7, 4	8, 4	13,4	12,37
Garçons	12, 1	10, 3	8, 9	9, 6	15,17	14,58
Total	11, 1	9, 5	8, 1	8, 9	14,06	15,38

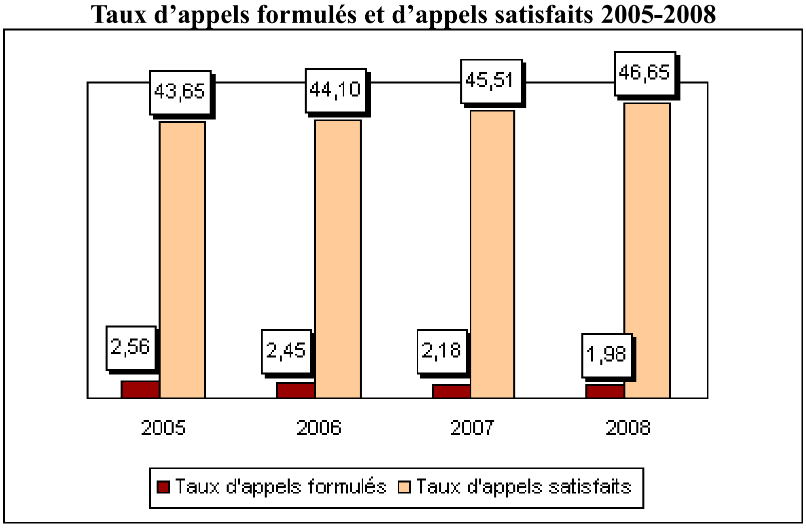
• Passage en série scientifique (S)

Demandes des familles	juin-03	juin-04	juin-05	juin-06	juin-07	juin-08
Filles	26, 0	26, 5	26, 8	27, 2	28,07	28,27
Garçons	37, 8	37, 8	38, 3	38, 6	39,32	39,52
Total	31, 3	31, 6	32, 0	32, 4	33,17	33,39
Décisions	**juin-03**	**juin-04**	**juin-05**	**juin-06**	**juin-07**	**juin-08**
Filles	23, 3	24, 0	24, 6	24, 8	25,89	26,18
Garçons	32, 4	33, 0	33, 7	33, 9	35,15	35,31
Total	27, 4	28, 0	28, 7	28, 9	30,09	30,34
Écarts décisions-demandes	**juin-03**	**juin-04**	**juin-05**	**juin-06**	**juin-07**	**juin-08**
Filles	-2, 7	-2, 5	-2, 2	-2, 4	-2,18	-2,09
Garçons	-5, 4	-4, 8	-4, 6	-4, 7	-4,17	-4,21
Total	-3, 9	-3, 6	-3, 3	-3, 5	-3,08	-3,05

• Satisfaction des appels

Taux d'appels formulés et d'appels satisfaits 2003-2006

Taux d'appels formulés et d'appels satisfaits 2005-2008



4. La question du redoublement

4.1. Pour mieux comprendre le phénomène du redoublement il est fondamental d'en comprendre les origines en regardant l'évolution du système éducatif. Nous nous pencherons sur cette question lors de la prochaine séance.

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

Le mardi 9 mars, il n'y aura ni GFP, ni séminaire. La prochaine journée de travail aura lieu le mardi 16 mars.

➔ Séance 18 : mardi 2 mars 2010

Programme de la séance. 1. Forum des questions // 2. Observation, analyse & évaluation : l'algèbre en 4^{e} // 3. Recherches dans les archives

1. Forum des questions

Organisation mathématique et corpus B

Qu'est-ce qui est attendu exactement pour l'analyse mathématique dans le corpus B ? Est-ce la même chose que ce qui est fait dans le TER ? (17, 2de)

En ce qui concerne le corpus B, dans la partie « Organisation mathématique », faut-il rédiger comme dans le mémoire ou bien présenter par « tirets » : (types de tâches / techniques / éléments technologiques / théorie) ? (17, 5^{e} & 4^{e})

Pour le corpus B, il faut faire une analyse succincte de l'organisation mathématique. On nous a spécifié qu'il fallait donner des types de tâches suffisamment amalgamés. Ceci signifie-t-il la chose suivante : donner le type de tâches général puis spécifier les différentes techniques travaillées en faisant apparaître les différents sous-types de tâches ? (17, 2de)

Il s'agit effectivement de la « même chose que dans le TER », mais à l'échelle de la séquence, et dans une perspective un peu différente au sens où l'OM a, normalement, été constituée par l'auteur du corpus B avant d'effectuer la séquence : il n'y a donc qu'à la mettre en forme et à l'ajuster à l'OM effectivement mise en place. On notera cependant que la rédaction n'est pas imposée, et qu'il faut effectivement avoir une mise en forme « amalgamée », ce qui signifie, à peu de choses près, ce que développe l'auteur de la dernière question posée « donner le type de tâches général puis spécifier les différentes techniques travaillées en faisant apparaître les différents sous-types de tâches ». Voici par exemple une organisation mathématique relative au thème « triangle rectangle et cercle » en classe de 4^{e}, issue d'un corpus B de l'an dernier, qui n'est certes pas exempte de critiques mais qui répond « formellement » à la demande faite :

L'organisation mathématique du thème "triangles rectangles et cercles" ressort dans la synthèse que les élèves ont dans leur cahier. En effet, les titres de paragraphes sont les types de tâches travaillés dans ce chapitre, les propriétés sont les éléments technologiques utilisés pour les exercicies et les exemples et methodes donnés dans cette synthèse font partie des techniques à savoir mettre en oeuvre.

Type de tâches :

- type de tâches général 1 : calculer une longueur
- type de tâches T1 : montrer qu'un point appartient à un cercle.
- type de tâches T2 : calculer la longueur d'une médiane dans un triangle rectangle.

- type de tâches général 2 : calculer un angle
- type de tâches T3: montrer qu'un triangle est rctangle.

Techniques :

- T1 : - repérer le triangle rectangle ainsi que son hypoténuse dans les données.
  - utilser la propriété τ 1 puis conclure.
- T2 : - repérer le triangler rectangle ainsi que la médiane issue du sommet de l'angle droit
  - utilser la propriété τ 2 puis conclure
- T3 : * - repérer le triangle inscrit dans le cercle et son plus grand côté
  - utilser la propriété τ 3 puis conclure

  * - repérer le triangle avec les longueurs d'une médiane et d'un côté
  - utilser la propriété τ 4 puis conclure

Technologies :

- Relative à T1 : τ 1 "le cercle circonscrit à un triangle rectangle a pour diamètre l'hypoténuse".
- Relative à T2 : τ 2 "dans un triangle rectangle, la médiane issue du sommet de l'angle droit mesure la moitié de la longueur de l'hypoténuse".
- Relative à T3 : τ 3 - "si le plus grand côté d'un triangle est un diamètre de son cercle circonscrit, alors ce triangle est rectangle".
  τ 4 - "si la médiane relative à un côté d'un triangle a pour longueur la moitié de celle de ce côté, alors ce triangle est rectangle".

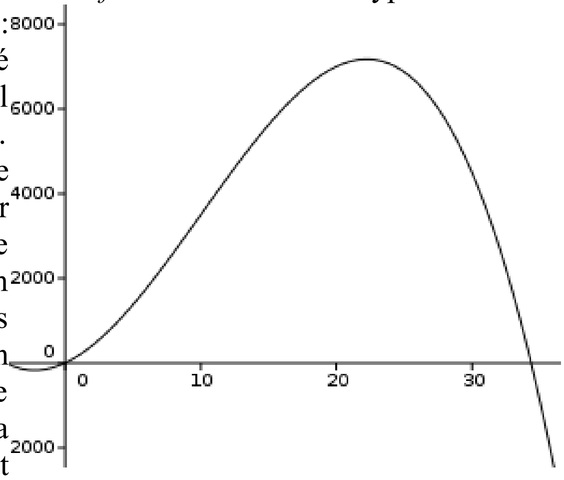
On notera que la demande d'amalgamation des OM répond à des préoccupations toutes « concrètes » comme l'illustre, à nouveau, la question suivante :

Pour démontrer que M est le max de f, il y a deux méthodes : soit le sens de variation de f, soit en montrant par le calcul que $f(x) - M \leqslant 0$. Quelle que soit la méthode que l'on présente en premier, il est difficile ensuite de motiver la seconde. (17, 2^{de})

Il y a effectivement une difficulté objective à faire exister plusieurs techniques pour un même type de tâches, pour une raison d'abord d'économie didactique : l'acte d'apprentissage ne se fait pas « à coût nul », et, lorsque l'on dispose d'une manière de faire, il faut une « bonne »raison pour en faire apprendre une deuxième... c'est ce que l'on pourrait appeler, en paraphrasant les économistes, le « comportement rationnel de l'étudiant ».

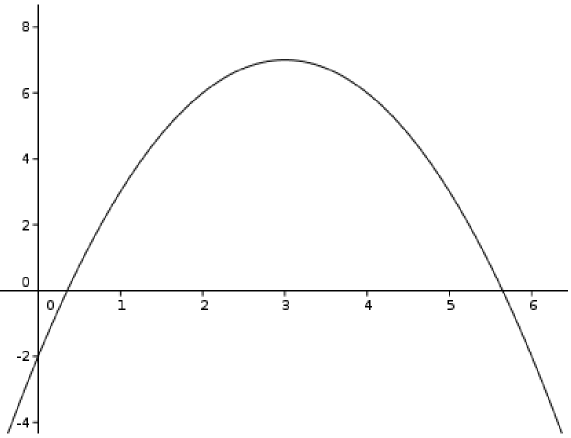
La solution vient du fait qu'il y a très rarement deux techniques qui sont identiques notamment du point de vue de leur portée, c'est-à-dire des tâches du type de tâches qu'elles permettent d'accomplir, de leur fiabilité et/ou de leur robustesse ou encore de leur économie ou de leur avenir. Voyons cela à propos des deux techniques citées.

1. On notera d'abord que « Démontrer que M est le maximum de f sur I » est un sous-type de tâches du type de tâches déterminer le maximum de f sur I : l'accomplir suppose que l'on a, auparavant déterminé expérimentalement une valeur de ce maximum et qu'il s'agit maintenant de déduire de la théorie dont on dispose.



Supposons que la fonction f soit la fonction de bénéfice d'une entreprise donnée par $150x - x^3 + 30x^2$ sur l'intervalle [0 ; 30]. La représentation graphique de cette fonction met en évidence que l'on a bien un maximum mais sa détermination exacte semble hors de portée des ressources d'un élève de 2[de] : il n'en ira pas de même d'un élève de première S ou ES qui aura à sa disposition ce puissant environnement technologico-théorique qu'est la dérivation, qui permet d'obtenir que le maximum est atteint sur l'intervalle considéré en $x_M = \dfrac{-30+\sqrt{1350}}{150}$.

2. Plaçons nous maintenant dans le champ des fonctions du second degré : on dispose là, avec la symétrie de la courbe, d'une technique permettant de déterminer l'abscisse en lequel le maximum est atteint pourvu que l'on ait deux abscisses, x_1 et x_2, ayant même image par la fonction f : $x_M = \dfrac{x_1+x_2}{2}$.



Supposons que l'on n'ait pas enregistré les éléments sur laquelle repose cette technique dans la théorie disponible et qu'elle ait le statut de technique expérimentale. Il reste donc à déduire de la théorie dont on dispose la valeur du maximum. Prenons le cas de la fonction f définie par $f(x) = -x^2 + 6x - 2$. Le maximum est 7, atteint en 3.

On peut donc mettre $f(x)$ sous la forme : $-(x-3)^2+7$, ce que l'on vérifie en développant :
$-(x-3)^2+7 = -x^2+6x-9+7 = -x^2+6x-2$.
On peut alors établir les variations de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty ; 3]$, puis sur l'intervalle $[3 ; +\infty[$. En effet, si l'on considère a et b tels que $a \leqslant b \leqslant 3$, on a $a-3 \leqslant b-3 \leqslant 0$ et par suite $(a-3)^2 \geqslant (b-3)^2$ puisque la fonction carré est décroissante sur $\mathbb{R}^-$; on obtient ainsi que $-(a-3)^2 \leqslant -(b-3)^2$ puis que $-(a-3)^2+7 \leqslant -(b-3)^2+7$ ce qui prouve que la fonction est croissante sur l'intervalle $]-\infty ; 3]$. Si l'on considère a et b tels que $3 \leqslant a \leqslant b$, on a $0 \leqslant a-3 \leqslant b-3$

et par suite $(a-3)^2 \leqslant (b-3)^2$ puisque la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}^+$; on obtient ainsi que $-(a-3)^2 \geqslant -(b-3)^2$ puis que $-(a-3)^2+7 \geqslant -(b-3)^2+7$ ce qui prouve que la fonction est décroissante sur l'intervalle [3 ; +∞[.

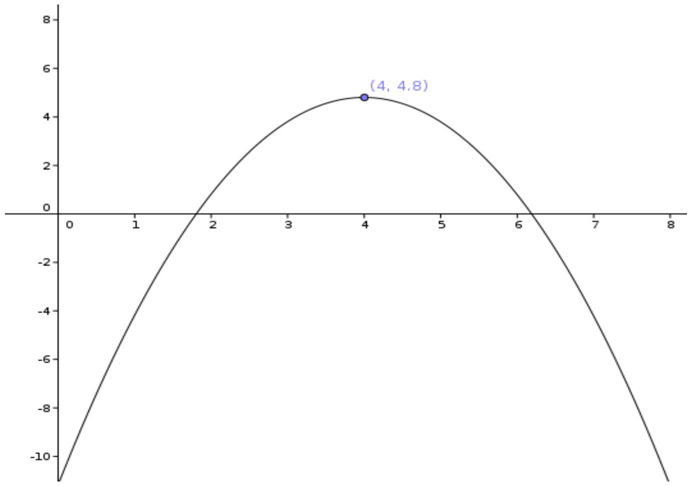
La technique repose ici sur les variations de la fonction carrée et la forme canonique de la fonction.

On peut également, si l'on dispose d'un résultat qui donne le comportement d'une fonction du second degré (elle est monotone sur chacun des intervalles du type]-∞ ; *a*] et [*a* ; +∞[, de sens de monotonie contraire), justifier seulement le sens de variation sur l'un des intervalles.

C'est cette technique qui aura de l'avenir, parce que c'est elle qui permettra de justifier, dans les classes ultérieures, l'existence d'un maximum en un point, même si on établira les variations autrement. En outre, elle permet de fonctionnaliser la notion de croissance et de décroissance d'une fonction ainsi que l'étude de la fonction $x \mapsto x^2$, qui mérite ainsi l'appellation de « fonction de référence ».

Pourtant, une fois la forme canonique obtenue, la technique consistant à montrer que $f(x)-M \leqslant 0$ est la plus économique. Si cette technique a été produite, elle va « tuer » la technique des variations dans les cas où la courbe est donnée par son expression algébrique. [On notera que pour la plupart des fonctions, la démonstration d'inégalités du type $f(x) \leqslant M$ se fait en déterminant le signe de $f(x)-M$ par l'étude des variations de la fonction $x \mapsto f(x)-M$...]

Si maintenant la fonction *g* est donnée par sa courbe représentative, par exemple la courbe suivante :



C'est ici la technique reposant sur les variations de la fonction qui s'avère pertinente. Si l'on souhaite donner les deux techniques, on peut donc les amalgamer selon leur portée respective :

Déterminer le maximum d'une fonction du second degré
1. Déterminer expérimentalement la valeur du maximum, M=*f*(*a*)
2. Si *f* est donnée par sa courbe représentative, justifier que *f* est croissante sur]-∞; *a*] et que l'on a ainsi $f(x) \leqslant f(a)$ sur cet intervalle ; puis que *f* est décroissante sur [*a* ; +∞[et que l'on a donc $f(a) \geqslant f(x)$ sur cet intervalle.
Si *f* est donnée par son expression algébrique, mettre *f*(*x*) sous sa forme canonique et montrer que $f(x)-M \leqslant 0$.

Bien entendu, cela sera l'aboutissement du processus d'étude et il faudra que vive, pendant un temps au moins, la technique reposant sur la mise en place algébrique des variations d'une fonction du second degré à partir des variations de la fonction carré.

Nous reprendrons ici le travail sur le **C2i2e** à travers l'étude de quelques questions posées ces dernières semaines.

Est-ce qu'on pourrait faire un petit point sur le C2i2e ? J'ai lu le document « C2i2e – Repères et balises », ce sont les balises qui indiquent ce que l'on doit faire ainsi que les activités possibles du stagiaire ? Est-ce que la rubrique « pistes possibles pour l'évaluation » concerne seulement les formateurs ? Les sujets de mes AER qui incluent l'utilisation d'un logiciel de géométrie détaillent les commandes ; est-ce que cela sera validé ? (17, 3^{e})
Je fais beaucoup de séances de TICE avec mes élèves, lorsqu'ils découvrent un logiciel, je leur donne une fiche qui détaille les éléments de ce logiciel, en leur indiquant les points importants, et je leur donne une fiche détaillée du TD à faire, avec les touches sur lesquelles ils doivent appuyer, etc. Mais, dès la séance suivante, ils ne se rappellent plus de rien et ne ramènent pas les feuilles. Dois-je faire une fiche détaillée à chaque TD ou bien continuer à leur faire prendre conscience de l'utilité d'amener ses affaires ? (16, 2de)
Toujours sur le chapitre des droites, j'ai introduit ce chapitre par une activité sur Geogebra. Mais c'est plutôt une activité pour conjecturer les propriétés du cours. Vu que nous avions déjà abordé les fonctions affines, il ne me semblait pas nécessaire de faire une AER proprement dite et cela permettait de manipuler le logiciel. Est-ce judicieux ? (17, 2de)

Le document « C2i2e – Repères et balises » est disponible sur les pages du site réservées aux élèves de l'IUFM. Il donne des ***repères*** issus des textes officiels, qui permettent de situer ce que l'on attend des élèves professeurs, et des ***balises,*** qui développent ces repères de façon à indiquer de manière plus proche de la formation, la voie à suivre pour intégrer les TICE dans ses praxéologies professionnelles de façon à manifester les compétences requises.

À titre d'exemple, nous examinerons ci-dessous les « repères et balises » relatives à l'item B.2.2.

B.2.2. « Concevoir des situations d'apprentissage et d'évaluation mettant en œuvre des logiciels généraux ou spécifiques à la discipline, au domaine enseigné, au niveau de la classe »

a) *Repères*

Activités possibles du stagiaire
– Il est mis en situation de pratique des logiciels présentés.
– Il complète ses connaissances par une recherche et une pratique individuelle ou collective.
– Il conçoit des séances comprenant des situations d'apprentissage mettant en œuvre un des logiciels dont il a acquis la maîtrise.
– Il amorce une réflexion sur les apports liés à l'utilisation de ces logiciels spécialisés ; la préparation comme l'analyse de séquences et de séances en constitue le cadre.
Pistes pour l'évaluation
– Le stagiaire devra montrer qu'il est apte à mettre en relation les possibilités offertes par des logiciels généraux avec les objectifs d'apprentissage et la didactique de la discipline.
– Il devra également témoigner de sa connaissance de quelques logiciels spécialisés dans la discipline.
– Il devra enfin intégrer cette compétence dans la conception d'une séance.
– L'évaluation peut également être ponctuelle dans le cadre d'une observation de séance.

– Les temps d'analyse de pratiques en présentiel ou sur plate-forme de formation peuvent également constituer un cadre pour cette évaluation.

– Cette compétence peut être intégrée à une évaluation plus globale à l'occasion d'une activité collective relevant d'un projet.

b) *Balises*

• Cette compétence peut s'exprimer dans le travail de conception d'un scénario d'AER incluant la simulation à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique d'une expérience graphique relative à une propriété géométrique que cette AER conduit à conjecturer et à mobiliser à titre d'outil de résolution du problème étudié, et cela en relation notamment avec cet item du B2i collège : « Je sais utiliser un outil de simulation (ou de modélisation) en étant conscient de ses limites. »

• Cette compétence peut s'exprimer dans le travail de conception d'un scénario d'AER incluant la simulation à l'aide d'un tableur d'une expérience numérique relative à une propriété algébrique que cette AER conduit à conjecturer et à mobiliser à titre d'outil de résolution du problème étudié, et cela en relation notamment avec cet item du B2i collège : « Je sais utiliser un outil de simulation (ou de modélisation) en étant conscient de ses limites. ».

• Cette compétence peut s'exprimer dans le travail de conception d'un scénario didactique pour une classe de collège qui ait pour objectif la recherche et l'identification de calculatrices téléchargeables gratuites ou en ligne.

• Cette compétence peut s'exprimer dans le travail de conception d'un scénario didactique pour une classe de collège qui ait pour objectif l'étude et l'établissement de modes d'emploi d'un ensemble donné de calculatrices téléchargeables gratuites ou en ligne.

• Cette compétence peut s'exprimer par la conception d'une AER intégrant l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique pour identifier les propriétés géométriques justifiant tel procédé de production ou de reproduction de figures simples (exemple : construire un carré ABCD dont les points A et B sont donnés).

• Cette compétence peut s'exprimer par la conception d'une AER intégrant l'utilisation d'un logiciel de géométrie dans l'espace pour étudier des notions géométriques usuelles du plan (exemple : examen de la représentation à l'écran de propriétés métriques planes usuelles lorsqu'on utilise un logiciel de géométrie dans l'espace).

• Cette compétence peut s'exprimer par la conception d'un PER sur les conditions et le contrôle de l'utilisation de divers moyens de calcul (calculatrices, tableurs, etc.), en ligne ou non (exemple : utilisation de calculatrices pour la comparaison de fractions).

• …

Commentaires développés oralement

Les pistes pour l'évaluation sont des indications qui valent pour la communauté d'étude : les formateurs comme les élèves professeurs y trouvent ce qui est attendu de ces derniers en matière d'intégration des TICE. Les balises précisent, en faisant référence à la formation dispensée, comment ces repères peuvent se concrétiser.

Examinons maintenant, à la lumière de ce qui précède le document suivant, déposé sur Espar pour la validation des items B.2.1, B.2.2, B.2.3 et B.4.1.

Chapitre 5 : Triangle rectangle et cercle circonscrit

Activité

Première partie : Caractériser un triangle rectangle.

A. Conjecture

1) Ouvrir le logiciel geogebra.
2) Construire deux points B et C

Commande « nouveau point »

puis le demi-cercle de diamètre [BC].

Commande « demi-cercle créé par deux points »

3) Placer un point A sur le demi-cercle.
4) Afficher la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.
5) Enregistrer votre figure dans le dossier collège/quatrièmeC/mathématiques sous le nom *chap5-votrenom.*
6) Faire bouger le point A sur le demi-cercle.

Observation :

………

………

………

………

7) Conjecturer alors une propriété.

………

………

………

Deuxième formulation :

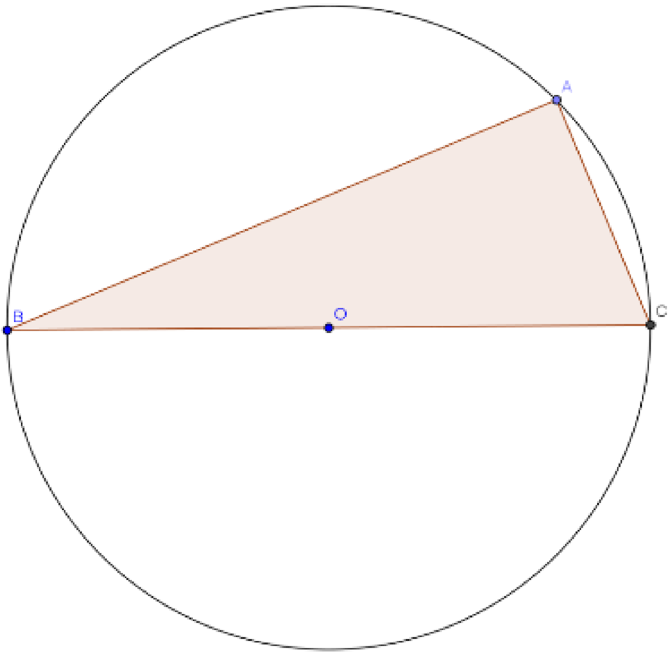
………

………

………

B. Démonstration

Figure



Objectif : démontrer la propriété « Si un triangle est inscrit dans un demi-cercle dont un diamètre est un côté du triangle alors ce triangle est rectangle ».

Etape 1 : Construire le symétrique A' du point A par rapport à O.

But :..

....

Etape 2 : Démonstration.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Etape 3 : Conclusion.

....

....

Il est assorti du commentaire suivant :

> Ci-joint des séances que j'ai effectué dans ma classe de quatrième. La première utilise une animation disponible via un site internet permettant la manipulation de figures en 3D dans le cadre de la découverte des pyramides et cônes de révolution. La seconde utilise le logiciel GEOGEBRA dans le but de conjecturer puis de démontrer les propriétés relatives au triangle inscrit dans un demi-cercle.

Ces deux activités me permettent donc d'attester que je suis capable d'identifier les situations d'apprentissage propices à l'utilisation des TICE (B.2.1.), de concevoir des situations d'apprentissage et d'évaluation mettant en œuvre des logiciels généraux ou spécifiques à la discipline, au domaine enseigné, au niveau de classe(B22) et aussi d'intégrer des outils et des ressources dans une séquence d'enseignement, en opérant des choix entre les supports et médias utilisables et leurs modalités d'utilisation (B.2.3.).
Enfin, elles me permettent d'attester que je sais identifier les compétences des référentiels TIC (B2i® ou C2i®) mises en œuvre dans une situation de formation proposée aux élèves, aux étudiants.

Si on examine ce qui est proposé du point de vue de l'item B.2.2., on a la conception d'une « situation d'apprentissage mettant en œuvre des logiciels généraux ou spécifiques à la discipline, au domaine enseigné, au niveau de la classe ». ***Mais***, cette conception est loin d'être pertinente : on voit d'abord une activité qui ne ressemble en rien à une AER ou à une partie d'AER, le travail mené n'a aucune raison d'être, le *topos* des élèves est très fortement limité par des questions très découpées... On est loin de ce que décrit la première balise que l'on reproduit à nouveau ci-dessous :

Cette compétence peut s'exprimer dans le travail de conception d'un scénario d'AER incluant la simulation à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique d'une expérience graphique relative à une propriété géométrique que cette AER conduit à conjecturer et à mobiliser à titre d'outil de résolution du problème étudié, et cela en relation notamment avec cet item du B2i collège : « Je sais utiliser un outil de simulation (ou de modélisation) en étant conscient de ses limites. »

La 3e question citée trouve ainsi une réponse : il n'est pas « judicieux », sauf exception comme par exemple l'existence dans la classe d'un PER « la réciproque est-elle vraie ? » de produire un élément « technologique » (on devrait plutôt dire « potentiellement technologique ») qui ne vienne répondre à aucun problème... Quand on l'a fait, il reste à constituer au moins un bloc practico-technique qu'il viendra produire et justifier.

Par contraste, la proposition suivante est davantage en adéquation avec ce qui est requis d'un élève professeur.

TP ordinateur

On entend souvent dire que les femmes vivent plus longtemps que les hommes. Que faut-il en penser ?

On dispose de données donnant l'âge au décès de 180 Canadiens en 1988 (source: *La Presse*, Montréal, édition du 27 juin 1988)

Hommes (effectif: 92)

25	65	79	59	58	77	73	33	75	68	66	75	71	63	89	63
66	77	84	84	79	77	59	60	81	45	65	84	31	67	82	68
74	78	86	76	56	59	56	78	84	62	48	79	41	60	41	
79	71	72	34	43	59	63	68	65	89	54	59	83	77	77	
75	61	73	7 6	52	68	87	62	72	52	71	79	81	80	58	
86	75	83	63	63	80	59	84	64	64	79	79	63	75	63	

Femmes (effectif: 88)

94	82	63	56	90	88	72	76	94	89	67	88	82	82	61
97	88	68	89	91	56	85	77	68	81	88	45	73	97	78
83	74	91	80	76	80	95	62	98	73	66	90	71	73	66
55	53	94	57	69	62	81	80	90	81	43	76	91	88	87
73	80	87	87	84	64	78	77	64	54	81	88	84	85	
44	84	97	54	76	87	59	80	72	90	90	70	87	74	

Il est assorti d'un document justifiant la demande de validation des compétences (voir ci-après).

Cela étant, on aimerait avoir un peu plus d'éléments d'analyse, comme par exemple le fait qu'il s'agit là du moment de travail de l'OM, des indications sur la manière dont a été géré le milieu, les raisons qui ont poussé le professeur à limiter le topos des élèves en donnant le fichier Excel, etc.

Remarque : Formulation des types de tâches.

Validation des compétences

- B.1.1 : Rechercher, produire, partager et mutualiser des documents, des informations, des ressources dans un environnement numérique - B.2.1 : identifier les situations d'apprentissage propices à l'utilisation des TICE - B.2.2 : concevoir des situations d'apprentissage et d'évaluation mettant en œuvre des logiciels généraux ou spécifiques à la discipline, au domaine envisagé, au niveau de la classe

J'ai travaillé avec mes élèves sur le thème des statistiques. La séance a eu lieu en fin de chapitre : les élèves avaient donc à leur disposition les connaissances en statistiques qu'on peut exiger en fin de troisième.

Il est dit dans les programmes de la classe de troisième :
En introduction :
À la fin de cette classe terminale du collège, la maîtrise par les élèves de plusieurs types de savoirs est visée : (…)

- dans le domaine des TICE : utilisation d'un tableur-grapheur

Dans les commentaires :
L'utilisation d'un tableur permet d'avoir accès à des situations plus riches que celles qui peuvent être traitées « à la main ».

J'ai proposé aux élèves une série de valeurs donnant l'âge au décès d'hommes et de femmes. Les élèves devaient travailler sur la question : « les femmes vivent-elles plus longtemps que les hommes ? »

Les types de tâches de cette séance sont :
T_1 : interpréter les résultats d'une série statistique pour répondre à une question donnée
T_2 : savoir utiliser les formules statistiques dans un tableur

J'avais préalablement placé le fichier « tp statistiques » dans leur dossier. J'ai utilisé le module « devoirs » comme le montre la copie d'écran du document « utilisation du module devoir ».

Les élèves se sont placés par trois face à un ordinateur. Le nombre élevé d'élèves par ordinateur s'explique par des problèmes informatiques récurrents dans mon établissement. Nous avons tout d'abord travaillé sur le premier document : comment reformuler la question posée et comment y répondre. Le but d'utiliser le tableur s'explique par un nombre élevé de valeurs à traiter.

Les élèves ont ouvert le document « tableur ». Nous avons d'abord classé les valeurs grâce à la fonction « tri ». Nous avons utilisé les fonctions « moyenne », « médiane » et « quartile » pour remplir le tableau.

J'ai récupéré les travaux d'élèves par la suite à l'aide du module devoirs. J'ai évalué leur travail (sans les noter) et j'ai demandé aux élèves de faire des demandes de validations d'items sur le site du B2I pour pouvoir valider les compétences.

A la séance suivante, nous avons repris les résultats (mis sur feuille) et nous avons répondus à la question initiale grâce aux valeurs.

La compétence B.1.1 est pratiquée : j'ai utilisé le module « devoirs » pour mettre des documents dans les dossiers des élèves.

La compétence B.2.1 est pratiquée : j'ai identifié un thème qui est propice à l'utilisation d'un tableur. De plus, le fait d'étudier des séries statistiques avec un nombre élevé de valeurs st laborieux à la main.

La compétence B.2.2 est pratiquée : j'ai mis en place un exercice permettant de mettre en œuvre l'esprit critique des élèves (réponse à une question), permettant aux élèves de mesurer l'utilité des outils statistiques qu'ils ont à leur disposition. De plus, l'utilisation du tableur a été l'occasion de travailler sur les formules et comment les utiliser. Beaucoup d'élèves n'avaient jamais vu comment écrire des formules dans un tableur ou sinon ne s'en souvenaient pas.

Dans cette perspective, le fait de donner un descriptif détaillé des commandes, s'il facilite le travail instantané, crée des obstacles à long terme comme le suggère exemplairement la deuxième question citée. En cette matière, comme dans le reste du travail, on donnera du *topos* aux élèves en faisant surgir les commandes (qui sont des éléments technologiques) lorsque le besoin s'en fait sentir et on constituera des traces écrites organisées selon les types de tâches à accomplir.

L'exemple de la séance de quatrième observée : travail collectif dirigé

Observation de 4 minutes du travail des élèves (41 à 45)

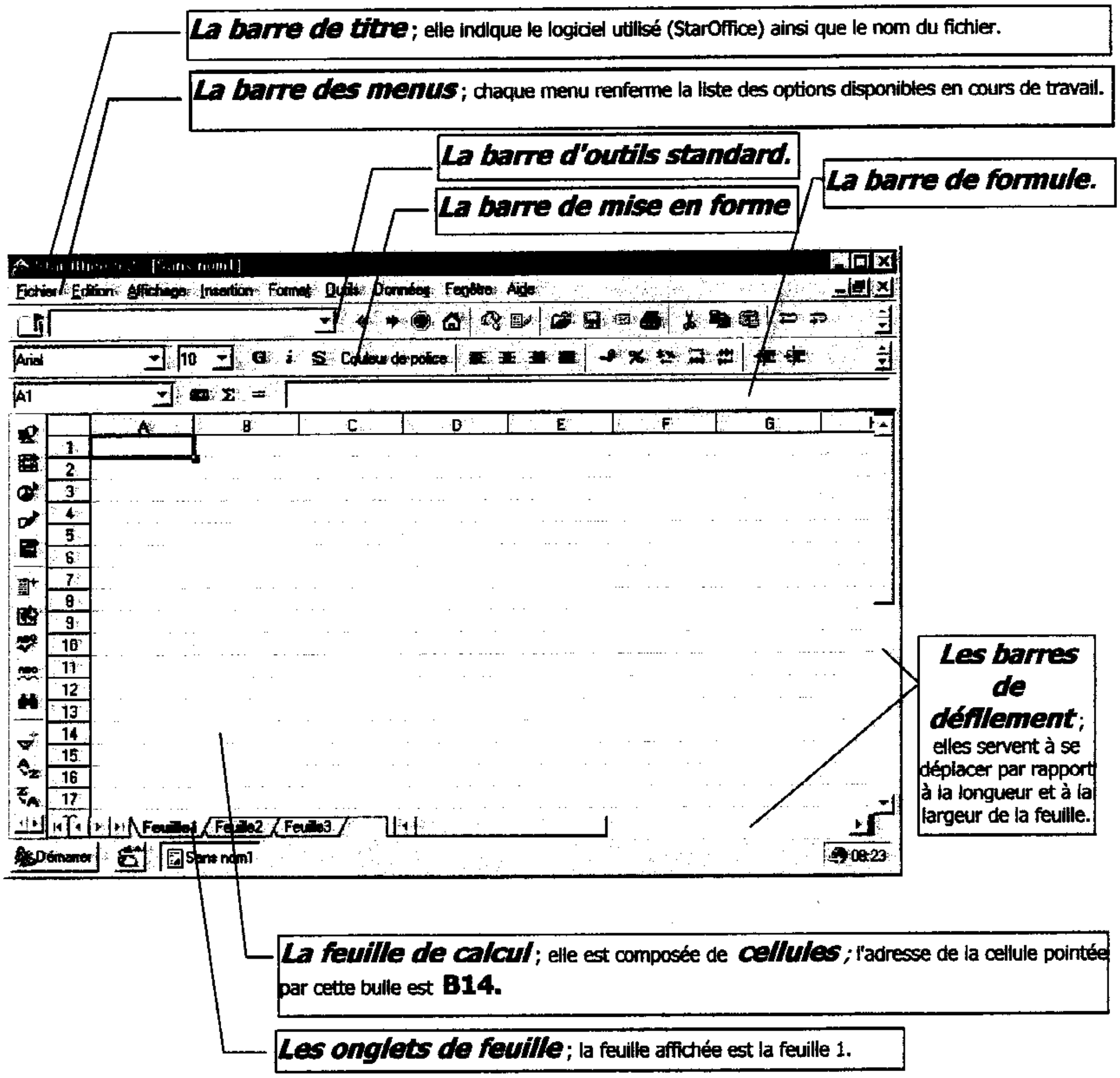
Commentaires

Le travail avec le tableur se « passe mal », au sens où des élèves sont loin d'être au point sur l'accomplissement du type de tâches « exécuter un programme de calcul » avec une technique incluant le tableur. On voit notamment un groupe écrire une formule comportant des « *x* » dans une cellule et « tirer » pour la reproduire. On peut en déduire qu'il aurait été nécessaire de laisser une trace écrite de l'utilisation du tableur effectuée dans la première séance à laquelle les élèves auraient pu se référer. La consultation du corpus B permet de mettre en évidence que la professeure avait donné un document, que certains élèves au moins avaient sur leur table comme le met en évidence la vidéo. Le voici.

LE TABLEUR STAROFFICE

Un tableur sert à faire des calculs, des plus simples aux plus compliqués, avec une mise à jour instantanée lors de modifications de valeurs. Ces calculs peuvent manipuler des nombres seuls ou à travers des formules et ils peuvent aboutir à la construction de graphiques.

PRÉSENTATION DE L'ÉCRAN DE TRAVAIL



LES FORMULES DE CALCUL

Une formule commence toujours par le signe « = » et **permet de calculer le contenu d'une cellule à partir d'une autre.**

Exemple : taper 1 dans la cellule A1, 2 dans la cellule A2 . En saisissant, avec le bouton gauche de la souris, le petit carré en bas à droite de la cellule A2, étendre cette formule vers le bas : ainsi, automatiquement, A3 contient 3, A4 contient 4 etc...
Puis taper la formule =A1 + 10 dans la cellule B1 et de la même façon que précédemment, étendre cette formule vers le bas : ainsi, automatiquement, B2 contient =A2 + 1 , B3 contient =A3 + 1, B4 contient =A4 + 1 etc..., c'est à dire B1 contient 10 + 1 = 11, B2 contient 10 + 2 = 12, B3 contient 10 + 3 = 13, B4 contient 10 + 4 = 14 etc...

On voit bien qu'il n'est pas adapté au travail à effectuer : il ne se présente pas du point de vue des types de tâches que les élèves ont à effectuer et il n'est pas le produit de l'activité des élèves.

Pour poursuivre le travail sur ce point, on examinera une vidéo disponible en ligne à l'adresse http://www.educnet.education.fr/canal-educnet/?direct=126 qui utilise une situation semblable.

Visionnage de la vidéo et commentaires

On a développé quelques-uns des commentaires ci-dessous. L'ensemble des commentaires est à travailler hors classe.

Le professeur part de la situation où un programme de calcul est donné en mot (je multiplie par 2, je retranche 3, je multiplie le résultat obtenu par 3 puis je retranche le nombre de départ au résultat ainsi obtenu)[24], exécuté, et il s'agit de retrouver le nombre dont on est parti, ce que le magicien arrive à faire d'emblée. Le professeur découpe le travail en plusieurs étapes : Exécuter le programme de calcul pour plusieurs valeurs en utilisant le tableur, d'abord en décomposant les étapes du calcul puis en le faisant en une étape ; Déterminer une formule plus réduite qui donne le même résultat, et enfin programmer l'ordinateur pour qu'il donne le nombre pensé.

Si la situation est dans l'ensemble bien calibrée et conforme au programme du collège, l'autonomie des élèves est limitée par le découpage en questions effectué par le professeur, et on ne voit pas bien, sauf à la toute fin, en quoi les différentes étapes sont motivées par la question de départ, du moins dans le montage vidéo effectué ; l'utilisation du tableur est motivée par le fait qu'il permet de faire « plusieurs calculs différents », sans que l'on sache dans quelle mesure cette expérimentation est nécessitée par le travail à accomplir.

Il en aurait été autrement si le questionnement avait procédé par motivations successives, par exemple en suivant une problématisation de ce type : on cherche à élucider le tour du magicien ; on va essayer de le trouver en examinant un certain nombre de résultats obtenus [introduction du tableur comme facilitant l'expérimentation de ce point de vue]. En supposant qu'on n'y arrive pas, l'essai de production d'une formule plus simple est une voie de progrès[25], formule(s) qu'on élabore et dont on teste la validité à l'aide du tableur. On voit alors d'ailleurs que la problématisation donne un critère de choix parmi les formules obtenues. Il reste ensuite à conclure en « inversant le programme de calcul équivalent » comme le proposent les élèves à la fin de la séance.

On ajoutera en outre que le commentaire parle de résolution d'équations, alors que visiblement on en est au début de l'étude du calcul littéral, et qu'il s'agit d'abord d'étudier le développement et la réduction d'expressions littérales, motivée par l'établissement de l'équivalence de programmes de calcul, elle-même motivée par la situation du magicien.

Au-delà des limites de l'organisation de l'étude explicitées ci-dessus, qui limite de fait le *topos* des élèves, on voit le professeur faire expliciter collectivement comment mettre en place la formule avec le tableur, ce qui met *ipso facto* dans le milieu le type de tâches « exécuter un programme de calcul » avec une technique utilisant le tableur. Cela n'empêche pas bien sûr quelques ratés, mais les élèves voient où est situé le problème et le corrigent relativement vite.

24 $(x*2-3)*3-x$

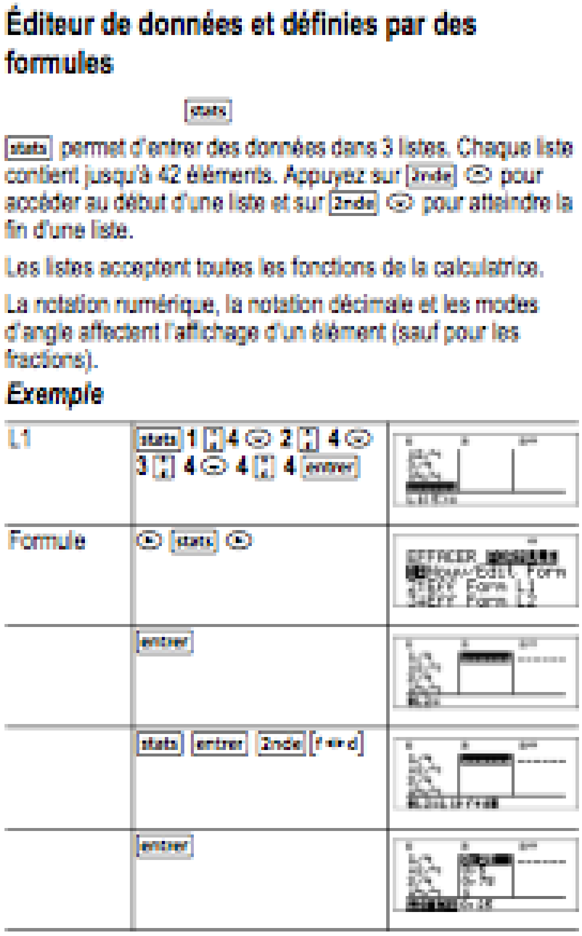
25 On notera qu'en cas de blocage, l'introduction d'un programme de calcul qui se simplifie facilement, parce qu'il est équivalent à $2x$ par exemple, permettrait d'aboutir.

Le professeur fait également des bilans d'étapes réguliers pour recentrer la classe autour de la question en cours d'étude, même si on a déjà noté que le travail effectué est limité par le manque de problématisation.

Un autre point, essentiel, que nous voulons mettre en évidence ici, c'est l'absence en règle générale d'un usage des TICE dans les techniques mathématiques mises en place. Ainsi ne restera-t-il vraisemblablement rien de cette technique de vérification de l'équivalence des programmes de calcul dans les techniques que les élèves auront à mettre en œuvre, et cela pour deux raisons essentielles : on voit cette technique très dépendante du tableur dont, sauf exception, les élèves ne disposent pas dans l'ordinaire de leur travail et des devoirs notés ; ce type de travail laisse très peu (voire pas du tout) de traces écrites fonctionnelles dans les cahiers des élèves.

On pourrait pourtant penser installer une technique qui intègre une partie de contrôle des calculs effectués en transposant le travail effectué sur un tableur à la calculatrice. Cela est possible avec une partie des calculatrices collèges (la TI collège plus et la casio collège 2D+ notamment) en utilisant les listes. Voyons cela [on utilisera ici une TI collège plus].

Supposons que l'on ait à réduire l'expression A = $(3x-4)(-x+2)$.
On fait le travail et on obtient B = $-3x^2+10x-8$. On entre ensuite à la calculatrice TI collège des valeurs dans la liste L1 du menu stats (5 valeurs entrent à l'écran). On entre ensuite dans la liste L2 une formule (stats – Formule puis écriture de la formule en obtenant L1 par le menu stats) qui est l'expression de départ en remplaçant x par L1 : L2=$(3\,L1-4)(-L1+2)$, puis dans L3 la formule obtenue en remplaçant x dans l'expression terminale : $-3\,L1^2+10\,L1-8$. En entrant dans la liste L1 les valeurs 1, 3, 5, 2, on obtient en L2 -1, -5, -33, 0 et la même liste dans L3, ce qui justifie que les deux expressions sont équivalentes.



Pour que cela soit véritablement intégré dans les techniques mathématiques, il sera nécessaire bien entendu que cette étape soit systématiquement réalisée mais aussi que les traces écrites, y compris lors des devoirs notés, mentionnent la vérification en faisant apparaître la liste de valeurs test et les résultats obtenus, comme nous l'avons fait ci-dessus. On notera que la même technique appliquée à chacune des modifications de l'expression algébrique, en modifiant la formule contenue dans L3, permet en cas d'erreur d'identifier l'endroit où elle se situe, et donc de la corriger.
On peut alors imaginer un élève se trompant et se corrigeant, ou encore un élève se trompant, et marquant sur sa copie qu'il s'est trompé mais qu'il n'arrive pas à corriger son erreur.

3. Recherches dans les Archives

3.1.

Que nous disent les *Archives du Séminaire* quant à la ***réalisation du moment d'institutionnalisation et de la synthèse*** ?

• Le compte rendu de la recherche (soit l'exposé) s'efforcera de présenter (en les choisissant adéquatement) des matériaux pour une réponse aux questions de la semaine ci-après éventuellement présents dans les *Archives*.

1. Quand on fait la synthèse après une activité, on réécrit les propriétés vues en activité. Les élèves ont une impression de répétition, ils se plaignent "on l'a déjà écrit ça." Comment puis-je éviter cela ? Dois-je leur dire que l'on apprend à force de répétition ou est-ce que je ne dois pas leur faire écrire la propriété en activité ? (EF, 7)

2.Est-ce que l'on peut institutionnaliser certaines choses uniquement en exercices s'il est écrit dans le programme que celles-ci ne doivent pas faire l'objet d'un cours à part entière ? Et est-ce que tout ce qui figure dans le programme doit être mis dans la partie synthèse ou certains points peuvent n'être vus qu'au cours d'exercices ? (EF, 9)

3. Dans le chapitre « proportionnalité », il y a de nombreux exemples basés sur des tableaux. Est-il judicieux de donner sur polycopié le tableau en partie complété (pour la partie synthèse) ? (CS, 13)

4. Peut-on travailler l'organisation mathématique à l'aide du dispositif « exercices » avant d'institutionnaliser les techniques, en se basant uniquement sur les bilans d'étape des AER (informels) ? (LA, 13)

Le compte rendu de la recherche est exposé.

3.2.

Que nous disent les *Archives du Séminaire* quant à ***l'enseignement de la géométrie dans l'espace*** ?

• Le compte rendu de la recherche (soit l'exposé) s'efforcera de présenter (en les choisissant adéquatement) des matériaux pour une réponse aux questions de la semaine ci-après éventuellement présents dans les *Archives*.

1. Utiliser la perspective cavalière est-il un type de tâches exigible en seconde ? J'en ai parlé en classe, on a fait quelques exercices à ce propos mais je n'ai pas vérifié les acquis lors de l'évaluation. (EO, 11)

2.Je redoutais le chapitre de géométrie dans l'espace mais au final cela a été très positif et a permis d’aborder au passage des points de logique et raisonnement. Notamment la démonstration par l’absurde. Sur ce point j’ai malheureusement perdu la moitié de la classe, dont l’œil vif traduisait sans aucun doute l’incompréhension totale. J’ai notamment eu du mal à illustrer, la figure étant nécessairement absurde (j’ai pris l’exemple : Si une droite est parallèle à une droite d’un plan elle est parallèle au plan). Quel(s) exemple(s), par exemple tirés de situations physiques, me permettraient de donner une illustration plus convaincante ? (JPB, 11)

3. Sur le début de la géométrie dans l’espace, j’ai du mal à mettre en place une praxéologie du fait des nombreuses définitions. Comment mettre en place une praxéologie sur un début de chapitre où les définitions sont nombreuses ? (GBR, 8)

Le compte rendu de la recherche est exposé.

Une question a émergé du débat, qui sera reprise ultérieurement :

Comment articuler le moment exploratoire et le moment technologico-théorique ? Et plus spécialement, comment faire vivre un moment technologique dans lequel prenne place un travail déductif, notamment un raisonnement par l’absurde dans le secteur de la géométrie dans l’espace ?

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2009-2010

Travaux dirigés de didactique des mathématiques
Utiliser les TICE

N. B. La séance de travail dirigé dont rendent compte les notes ci-après n'a concerné qu'une moitié des participants au Séminaire environ. Elle ne sera pas reprise in praesentia *avec les participants composant l'autre moitié : par principe, et dans le cadre de leur formation au travail en équipe, ces derniers devront étudier le contenu du TDDM 4 à partir des notes qui suivent et avec l'aide, laissée à la convenance de chacun, de participants ayant dûment suivi cette séance.*

➔ Séance 4 : mardi 2 mars 2010 (17 h 20 – 18 h 50)

Programme de la séance. ., Fonctions numériques & techniques à composante expérimentale // 2. Expérimenter pour explorer et réaliser un moment technologico-théorique

1. Techniques à composante expérimentale

Un professeur de seconde a identifié le type de tâches suivant qu'il souhaite faire étudier aux élèves de sa classe :
T – déterminer les variations et l'extrémum d'une fonction du second degré.
Il a fabriqué une technique relative à ce type de tâches intégrant l'expérimentation qui s'appuie sur les variations de la fonction $x \mapsto x^2$. Voici ses traces écrites.

> L'argument principal de cette technique consiste à mettre la fonction sous la forme $a(x-b)^2 + c$ où c est l'extrémum de la fonction et b la valeur de x pour laquelle il est atteint, valeurs qui sont déterminées à l'aide de la calculatrice.
>
> On détermine l'extrémum et les variations par une technique expérimentale, ce qui permet de dire : d'une part que $f(x)$ se met sous la forme $a(x-b)^2 + c$, ce que l'on vérifie en tabulant les deux expressions à la calculatrice et que l'on déduit théoriquement en développant la deuxième expression pour obtenir la première ; d'autre part que f est croissante sur $[b ; +\infty[$ si $a > 0$, sur $]-\infty ; b]$ si $a < 0$ et décroissante sur $[b ; +\infty[$ si $a < 0$, sur $]-\infty ; b]$ si $a > 0$ ce qu'il s'agit ensuite de déduire théoriquement.
>
> Par exemple, pour $a > 0$.
> Soit x et y tels que $x \geqslant y \geqslant b$. On a alors $(x-b) \geqslant (y-b) \geqslant 0$.
> La croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $[0; +\infty[$ donne alors que $(x-b)^2 \geqslant (y-b)^2 \geqslant 0$ soit que $a(x-b)^2 \geqslant a(y-b)^2 \geqslant 0$ puis que $a(x-b)^2 + c \geqslant a(y-b)^2 + c \geqslant c$, ce qui prouve la croissance de f sur $[b ; +\infty[$.
> Soit x et y tels que $x \leqslant y \leqslant b$. On a alors $(x-b) \leqslant (y-b) \leqslant 0$.
> La décroissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $]-\infty, 0]$ donne alors que $(x-b)^2 \geqslant (y-b)^2 \geqslant 0$ soit que $a(x-b)^2 \geqslant a(y-b)^2 \geqslant 0$ puis que $a(x-b)^2 + c \geqslant a(y-b)^2 + c \geqslant c$, ce qui prouve la décroissance de f sur $]-\infty, 0]$.
> On a en outre montré que sur les deux intervalles $f(x) \geqslant c = f(b)$, ce qui prouve que f admet un minimum en b qui vaut c.

Il souhaite fabriquer un dispositif permettant aux élèves de garder des traces écrites de leurs expérimentations faites avec la calculatrice ou un grapheur.

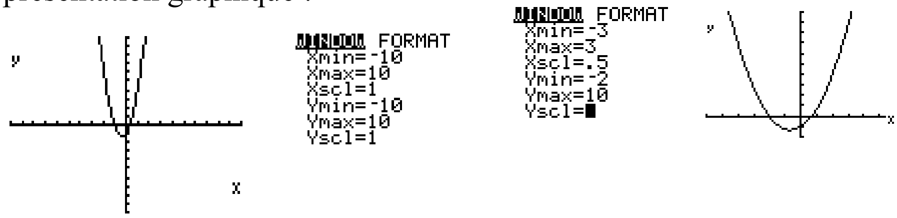
Fabriquer un tel dispositif. Pour cela, on s'appuiera sur la détermination des variations et l'extrémum des fonctions du second degré suivantes pour mettre en évidence les traces écrites à conserver.

$x \mapsto 3x^2 + 2x - 1$; $x \mapsto 2x^2 - x + 1$; $x \mapsto -x^2 + 6x - 2$; $x \mapsto -2x^2 - 4x + 1$; $x \mapsto \dfrac{1}{4}x^2 + x - 3$; $x \mapsto (x-1)^2 - 1$; $x \mapsto -x^2 + 96x$.

On trouvera ci-dessous la détermination expérimentale demandée relative à la première fonction (on a volontairement utilisée une TI-82).

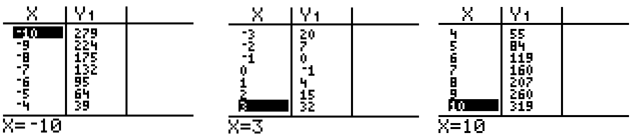
$x \mapsto 3x^2 + 2x - 1$;

Représentation graphique :

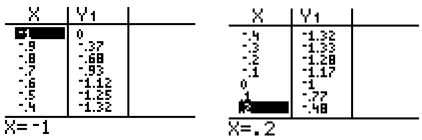


Tables numériques

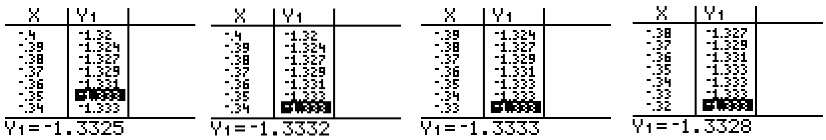
Pas de 1



On voit que ça se joue entre -1 et 1 ; pas de 0,1 à partir de -1 :

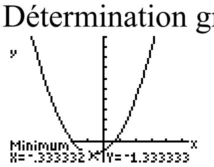


C'est entre -0,4 et -0,2 ; pas de 0,01 :



La fonction est décroissante de]-∞ ; -1/3] et croissante sur [-1/3 ; +∞[; elle admet un minimum en -1/3 qui vaut –1 – 1/3 = –4/3

Détermination graphique du minimum (calc – minimum)



On a donc besoin de pouvoir garder la trace de représentations graphiques avec la mémoire de la fenêtre de représentation, ainsi que des tables numériques. On peut envisager de constituer un document permettant aux élèves de n'avoir qu'à noter des données comme par exemple le document suivant :

Window
Xmin=
Xmax=
Xscl=
Ymin=
Ymax=
Yscl=

Window
Xmin=
Xmax=
Xscl=
Ymin=
Ymax=
Yscl=

Window
Xmin=
Xmax=
Xscl=
Ymin=
Ymax=
Yscl=

Window
Xmin=
Xmax=
Xscl=
Ymin=
Ymax=
Yscl=

X	Y

X	Y

X	Y

X	Y

X	Y

X	Y

2. Expérimenter pour explorer et réaliser un moment technologico-théorique

Ce professeur a conçu une AER pour mettre en place l'OM précédente : il est parti d'un problème (celui du « maître nageur ») dont la modélisation a abouti à la fonction suivante : $A(x) = x(185 - 2x)$. Le travail s'est arrêté sur la formulation des assertions suivantes :

La droite parallèle à l'axe des ordonnées et passant par l'abscisse du point maximum, x_M, est un axe de symétrie de la courbe d'une fonction du second degré.
Une fonction du second degré est croissante sur l'intervalle $]-\infty ; x_M]$ et décroissante sur l'intervalle $[x_M ; +\infty[$.

Produire l'armature d'un scénario permettant la mise à l'épreuve de ces assertions et l'émergence de la technique relative à T décrite dans la première partie du TD. On l'enverra à l'issue de la séance à m.artaud@aix-mrs.iufm.fr.

On pourra s'appuyer sur le logiciel Geogebra (http://www.geogebra.org/cms/index.php?lang=fr) et le corpus de fonctions suivant, que l'on complètera éventuellement suivant les besoins de l'expérimentation :

$x \mapsto 3x^2 + 2x - 1$; $x \mapsto 2x^2 - x + 1$; $x \mapsto 2x^2 - 3x - 2$; $x \mapsto 2x^2 - 8x + 10$; $x \mapsto -x^2 + 6x - 2$;
$x \mapsto -2x^2 - 4x + 1$; $x \mapsto x^2 - 4x + 2$; $x \mapsto \frac{1}{4}x^2 + x - 3$; $x \mapsto (x-1)^2 - 1$; $x \mapsto x^2 + 6x + 5$;
$x \mapsto -x^2 + 96x$; $x \mapsto 2x^2 - 12x + 10$; $x \mapsto (x-2)(4-x)$; $x \mapsto x^2 + 8x + 10$; $x \mapsto 2x^2 - 4x + 9$;
$x \mapsto \frac{-1}{2}x^2 + 2x + 3$; $x \mapsto x^2 - 6x + 9$; $x \mapsto -x^2 + 6x$;$x \mapsto -5x^2 + 10x + 15$;$x \mapsto 2x(x+2)$.

Les travaux effectués seront déposés sur Espar et repris lors d'une séance de séminaire.

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 19 : mardi 16 mars 2010

Programme de la séance. 1. Éléments sur l'orientation // 2. Question de la semaine – Conditions et contraintes : une échelle de niveaux de codétermination didactiques // 3. Forum des questions // 4. Réalisation du moment technologico-théorique : le cas de la démonstration

1. Éléments sur l'orientation (suite)

1.4. La question du redoublement

1.4.1. Pour mieux comprendre le phénomène du redoublement il est fondamental d'en comprendre les origines en regardant l'évolution du système éducatif. La question du redoublement est en effet reliée à la *séquentialisation* de la formation scolaire. Yves Chevallard écrit à ce sujet :

> la séquentialisation de la formation consiste à définir une *suite de positions*, p_1, p_2, etc., que la personne x en formation viendra, en principe, occuper successivement, la formation donnée à x dans la position p_i devant lui permettre de venir occuper valablement la position suivante, p_{i+1}. Dans le cas de l'École, ces positions sont celles d'élève dans la suite des différentes *classes* : ainsi l'élève d'une classe de quatrième se forme-t-il afin de pouvoir occuper ensuite – l'année d'après, en principe – la position d'élève dans une classe de troisième. De même l'élève d'une classe de seconde est-il censé se former pour devenir élève dans l'une des classes « suivantes » – Première ES, S ou L, etc. En fait, les séquences de formation dessinent une *arborescence* telle que, en chaque point p_i, il existe une ou plusieurs « positions suivantes », p_{i+1}, p_{i+1}', p_{i+1}'', etc. Ainsi est-il possible, en s'orientant dans l'arbre des positions scolaires d'élève, de sélectionner telle ou telle séquence de formation scolaire – telle ou telle suite de classes. En dépit de cette diversification, les parcours scolaires actuels sont pour l'essentiel rigidement tracés, en ce sens notamment qu'ils proposent des séquences à la fois *non lacunaires* et *non réversibles*. La non-lacunarité des séquences de formation scolaire signifie que, pour venir occuper la position d'élève dans une classe donnée, il convient d'avoir occupé d'abord la position d'élève dans l'une des classes antécédentes : on ne peut ainsi, sauf exception, devenir élève de Terminale S sans avoir été antérieurement élève de Première S. La pratique consistant à « sauter une classe » est aujourd'hui à peu près complètement bannie : les classes sont à *accès contrôlé* ou, pour le dire à l'aide d'une métaphore informatique, à accès « séquentiel » – et non à accès « direct » ou « aléatoire ». La non-réversibilité signifie simplement que, s'il est encore possible de *stationner* dans une classe donnée – la durée de ce stationnement étant cependant limitée –, il n'est pas possible de *revenir en arrière* dans l'arbre des positions d'élèves.

Ce qu'il faut bien comprendre, c'est qu'il n'en a pas toujours été ainsi. Dans ce même texte, Yves Chevallard poursuit :

> Cette organisation séquentielle, qui nous est aujourd'hui si familière, ne prendra pourtant la forme rigide que nous lui connaissons que très tardivement, comme le montre la description suivante de la situation prévalant encore dans la première moitié du XIXe siècle (Prost 1968, p. 51) :
>
> > La classe ne réunit [...] pas un groupe homogène. Elle ne se définit pas comme une tranche d'âge, car, comme au XVIIIe siècle, les élèves de la même classe peuvent avoir 4 ou 5 ans de différence. Ce n'est pas davantage un groupe d'une taille moyenne : les lycées parisiens ont plus de 60 élèves dans certaines classes, tandis que celles des collèges communaux sont le plus souvent squelettiques : en 1865 on peut, 4 fois sur 10, compter sur une seule main les élèves d'une classe de collège communal, et 7 fois sur 10 sur les deux mains.
> > La classe de 25 à 30 élèves est une exception ; elle ne deviendra un idéal qu'aux environs de 1870. La croissance des effectifs amène alors Victor Duruy [nommé ministre de l'Instruction publique en 1863] à de nombreux dédoublements, tandis qu'en 1873 Mgr Dupanloup demande qu'en règle générale la classe ait entre 25 et 40 élèves. Une nouvelle conception de la classe se fait jour, mais on cherche en vain dans Littré l'emploi du mot au sens de « groupe scolaire constituant l'unité élémentaire d'enseignement ».

De plus, le parcours de la suite des classes n'est pas aussi rigide qu'il l'est aujourd'hui. En 1924, par exemple, l'accès aux classes de 6e et 5e est géré par un arrêté (10 mai 1924) que Yves Chevallard commente ainsi :

> L'article premier mentionne bien le principe de l'accès séquentiel, à partir de la « classe précédente » ; mais la possession du certificat d'études primaires permet *aussi* d'entrer en Sixième ou en Cinquième. En outre, l'élève ne relevant d'aucun de ces cas peut *tout de même* être admis en ces classes, mais alors à titre provisoire, pour un stage probatoire d'un mois ou deux – pratique souple qui a, semble-t-il, à peu près disparu aujourd'hui à ce niveau.

Il était même possible de revenir en arrière… :

> […], jusqu'à la fin du XIXe siècle, on pouvait « stationner » dans une classe plusieurs années, comme on le fait encore, mais de façon assez strictement limitée, dans les préparations au CAPES ou à l'agrégation. Et on pouvait même *revenir en arrière* quand la « classe suivante » n'existait pas ! Ainsi en allait-il avec la « vétérance de rhétorique », pratique que rappelle le texte ci-après (Albertini 1994, p. 38) :
>
> > La vétérance de rhétorique, pratique traditionnelle (elle remontait à l'Ancien Régime), consistait à retourner en classe de rhétorique (notre Première) après le baccalauréat pour en tirer le maximum de profit. Favorisée par la longue faiblesse des facultés des lettres, concentrée dans quelques grands lycées parisiens, la vétérance de rhétorique, primitivement orientée vers le concours général, déboucha de plus en plus sur le concours de l'École [normale supérieure]. Cela dit, jusqu'en 1903, les « vétérans » purent prendre part au concours général, où ils bénéficiaient d'un classement séparé. À partir de 1890, on prit l'habitude de séparer les « vétérans » des « nouveaux », créant par là même les classes de khâgne. Ainsi s'explique l'appellation de « rhétorique supérieure » donnée aux premières khâgnes et celle, en usage depuis 1902, de « première supérieure ». La khâgne, où les bacheliers précoces pouvaient rester très longtemps (avant la réforme de 1904, le nombre de candidature n'étant pas limité, certains passaient le concours six ou sept fois), suscita l'ironie féroce de l'helléniste Victor Bérard [...] devant la commission Ribot de 1899 : « Pourquoi n'avoir pas de rhétoriques de plus en plus supérieures qui prépareront de bons petits internes à l'Académie française ? »
>
> La vétérance de rhétorique illustre la plasticité ancienne de l'usage social des séquences officielles de formation. Pour trouver un équivalent à une telle pratique, il faudrait par exemple imaginer que, après sa licence, un étudiant désireux de se présenter au CAPES de mathématiques, mais se jugeant insuffisamment solide sur certaines parties, déjà étudiées, du programme de ce concours, puisse sans obstacle institutionnel ni psychologique aller pour un temps s'asseoir à nouveau sur les mêmes bancs que les étudiants de DEUG : on aurait alors une « vétérance de

DEUG ». (Une telle pratique supposerait sans doute une culture didactique assez différente de celle qui prévaut aujourd'hui à l'Université : la « vétérance », en effet, n'a de sens que si l'on admet que la formation qui peut s'acquérir dans un dispositif de formation donné ne dépend pas uniquement de ce dispositif, mais dépend en grande partie *de l'usage didactique qu'en fait l'étudiant*.) Mais les pratiques originelles, marquées par un certain degré de « bouclage » du temps de la formation, vont progressivement être « débouclées » et séquentialisées. C'est ainsi que, comme on l'a vu, la classe de rhétorique où se côtoyaient deux populations – les « vétérans » et les « nouveaux » –, va dans un premier temps être simplement dédoublée, dans le cadre d'une gestion pragmatique de la formation à l'intérieur des établissements, les vétérans venant former ce qu'on appelle alors spontanément, mais sans que la chose soit encore officialisée, une rhétorique *supérieure*. Dans un deuxième temps, les nouvelles classes ainsi constituées vont occuper leur lieu naturel dans le cursus des études littéraires : ce sont désormais des classes qui se situent *après* les classes « terminales » conduisant au baccalauréat – la linéarité formelle des études est ainsi retrouvée. Mais ce sont aussi des classes « terminales » par rapport au concours de l'École normale supérieure : aussi y stationne-t-on longtemps, jusqu'à des six et sept ans ! Ces classes de rhétorique supérieure « bouclent sur elles-mêmes » un (trop) grand nombre de fois : une telle situation est évidemment instable. L'évolution stabilisatrice se produit, en 1904, dans le sillage de la grande réforme de 1902 (qui concernait le Secondaire *stricto sensu*).

On voit à quel point le parcours s'est rigidifié jusqu'à aujourd'hui. Dans ces conditions, le redoublement, qui n'était alors qu'une façon, parmi tant d'autres, de parcourir le système éducatif, devient un « problème » de société qu'il faut expliciter, justifier.
Ce problème ne date pas d'hier. En témoigne ce paragraphe issu du rapport Paul-Troncin [26] :
Si l'on ne dispose pas d'informations historiques sur l'intensité du recours au redoublement au long du XX^e^ siècle, le redoublement devient sans doute suffisamment préoccupant cours des années 1950 pour que le retard scolaire fasse l'objet d'une circulaire du ministère de l'éducation nationale (datée du 16 mars 1956) dont l'objectif déclaré était de rechercher « les moyens les plus propres à le réduire, à l'atténuer tout au moins le plus possible ».

1.4.2. Le problème de l'efficacité du redoublement

On suivra ici le rapport déjà cité.
On y apprend ou confirme, divers résultats, sur l'évolution du taux de redoublement au collège, sur le lien entre redoublement et situation sociale des familles, redoublement et situation géographique et coût du redoublement :

Tableau 3 - Evolution des taux de redoublement au collège depuis 1975

	1975-1976	1980-1981	1985-1986	1990-1991	1995-1996	2000-2001	2002-2003
Sixième	9,5	10,7	12,5	8,6	10,1	9,2	8,5
Cinquième	6,5	12,1	16,4	11,0	11,2	5,0	4,4
Quatrième générale	7,0	8,2	9,4	6,8	7,3	8,7	7,8
Troisième générale	7,3	9,6	14,3	9,6	10,2	6,9	6,8

Source: Education et Formation (2003)

26. Le Haut Conseil de l'Évaluation de l'École a demandé à l'IREDU (Institut de Recherche sur l'économie de l'Éducation) un rapport sur « Les apports de la recherche sur l'impact du redoublement comme moyen de traiter les difficultés scolaires au cours de la scolarité obligatoire ». Ce rapport a été publié en décembre 2004.

Pourcentages d'élèves entrés en 6e en 1989 ayant redoublé au moins une fois du cours préparatoire à la terminale [27]

	Au moins un redoublement	Un seul redoublement	Au moins deux redoublements
Ensemble	66,6	40,2	26,4
Garçons	71,-	42,5	29,1
Filles	61,5	37,8	23,6
Milieu social			
Agriculteur	58,8	38,5	20,3
Artisan, commerçant	67,6	42,9	24,7
Cadre	48,8	33,4	15,4
Enseignant	41,1	33,4	7,7
Profession intermédiaire	61,7	39,4	22,3
Employé	71,3	43,2	28,1
Employé de service	81,3	46,5	34,7
Ouvrier qualifié	74,6	42,8	31,8
Ouvrier non qualifié	77,6	42,7	34,9
Inactif	80,6	41,4	39,3

Source : Caille (2004), p. 81.

Proportion d'élèves en retard en 6e par Académie (2001)

	Ensemble	Garçons	Filles	Garçons–Filles
PARIS	22,2	25,7	18,5	7,2
NANCY-METZ	23,8	27,4	19,9	7,4
STRASBOURG	23,4	26,6	20,1	6,5
RENNES	25,0	29,4	20,1	9,3
GRENOBLE	24,6	28,3	20,5	7,8
ORLEANS-TOURS	24,9	28,7	20,9	7,8
NANTES	25,6	30,0	20,9	9,0
LYON 0	24,9	28,6	21,	7,7
TOULOUSE	24,8	28,2	21,2	7,0
VERSAILLES	25,7	29,6	21,6	8,0
BESANCON	26,1	30,2	21,8	8,4
CLERMONT-FERRAND	26,5	30,9	21,8	9,0
BORDEAUX	25,9	29,5	21,9	7,6
NICE	25,8	29,0	22,2	6,8
POITIERS	26,7	30,7	22,3	8,5
LIMOGES	27,2	31,8	22,4	9,4
CORSE	27,7	32,4	22,5	9,9
LILLE	26,5	30,2	22,6	7,6
AMIENS	26,9	30,8	22,6	8,2
ROUEN	27,8	31,9	23,3	8,6
REIMS	28,2	32,0	24,1	8,0
CRETEIL	28,4	32,3	24,1	8,2
DIJON	28,2	31,9	24,3	7,6
MONTPELLIER	28,7	32,6	24,4	8,2
CAEN	29,4	34,0	24,5	9,6
AIX-MARSEILLE	29,3	33,2	24,9	8,3
METROPOLE	26,2	30,1	22,0	8,0

27 Ce sont donc les élèves qui, pour ceux qui ont terminé le collège, ont passé le brevet en 1993 ou après (s'ils ont redoublé), et pour ceux qui ont terminé le lycée, ont passé leur baccalauréat en 1996 ou après.

Source: DEP

Éléments de calcul du coût du redoublement (2002)

	Primaire	Collège
Dépense par élève (€)	4490	7110
Effectifs	3755532	3146518
Dépense totale (millions €)	16862,3	22371,7
Proportion de redoublants	4%	7%
Coût du redoublement (millions €)	674,5	1566,0

Source : DEP
Ce qui donne un total d'environ 2,24 milliards d'euros par an.

Mais le cœur du rapport est fait de deux chapitres, l'un consacré à *l'efficacité pédagogique* du redoublement et l'autre à *l'attitude des enseignants et des familles* vis-à-vis du redoublement. Il ressort de ces deux chapitres deux aspects principaux.
1.Lles diverses études montrent que, si l'objectif du redoublement est de rattraper son retard sur les autres, cet objectif n'est pratiquement jamais atteint (surtout dans le cas des redoublements du primaire où se concentrent la quasi totalité des recherches menées).
En ce qui concerne le collège, la rapport cite les travaux de Aletta Grisay (1993) qui montrent « que le redoublement de la classe de sixième ne permet pas aux élèves redoublants de combler leurs lacunes et les lèse par rapport à leurs condisciples promus ». Le rapport ajoute toutefois que « les conclusions attachées au second degré doivent être nuancées car d'autres recherches dévoilent des bénéfices liés au redoublement lorsqu'il affecte un autre niveau d'enseignement que la 6^{e}, la limite de ces dernières études étant de ne pas rapporter ces progressions " brutes " des redoublants à celles de leurs condisciples promus ».
Le lien entre redoublement et trajectoire des élèves que décrit le tableau ci-dessous laisse à penser que plus le redoublement est précoce plus il est préjudiciable à la suite des études.
Ce constat est commenté ainsi : « tout se passe implicitement comme si l'élève avait droit à un “crédit” limité d'années supplémentaires (donc de redoublements possibles), avec comme conséquence que plus les redoublements sont précoces plus ils obèrent les possibilités ultérieures ».

Tableau 11 : Redoublement, niveau de qualification atteint et diplôme le plus élevé obtenu

Niveau redoublé	Niveau de qualification atteint[a]			Diplôme le plus élevé obtenu				
	VI ou VI bis[a]	V	IV	Aucun	Diplôme national de brevet	CAP ou BEP	Bac pro., BT, BP, BMA[b]	Bac général ou technologique
CP	30,3	44,3	25,4	42,7	5,8	32,9	9,9	8,7
CE1	26,1	45,8	28,1	38,1	5,5	35,4	10,0	11,0
CE2	24,7	45,4	29,9	35,0	5,6	37,3	10,4	11,7
CM1	21,8	45,2	33,0	32,7	6,5	34,5	13,7	12,6
CM2	18,8	44,5	36,7	27,3	7,9	35,5	14,7	14,6
6^e	19,9	43,8	36,3	29,4	5,8	37,1	15,2	12,5
5^e	16,4	39,2	44,4	23,8	6,8	34,1	16,7	18,6
4^e générale	9,2	26,7	64,1	13,7	8,2	24,6	17,2	36,3
3^e générale	5,3	20,7	74,0	9,8	12,5	17,9	13,0	46,8
Ensemble [c]	9,1	21,6	69,3	13,7	5,6	18,0	10,4	52,3

(a) La classification des niveaux de qualification s'appuie sur les programmes d'enseignement suivis pour chiffrer le niveau des études secondaires. Les niveaux VI ou VI bis concernent les élèves qui sortent d'une classe de premier cycle ou avant la dernière année d'un CAP ou BEP. Le niveau V concerne les élèves qui ont terminé la préparation d'un CAP ou BEP, ou sortant de seconde ou de première. Le niveau IV concerne les élèves qui sortent d'une classe de terminale ou d'une classe équivalente.

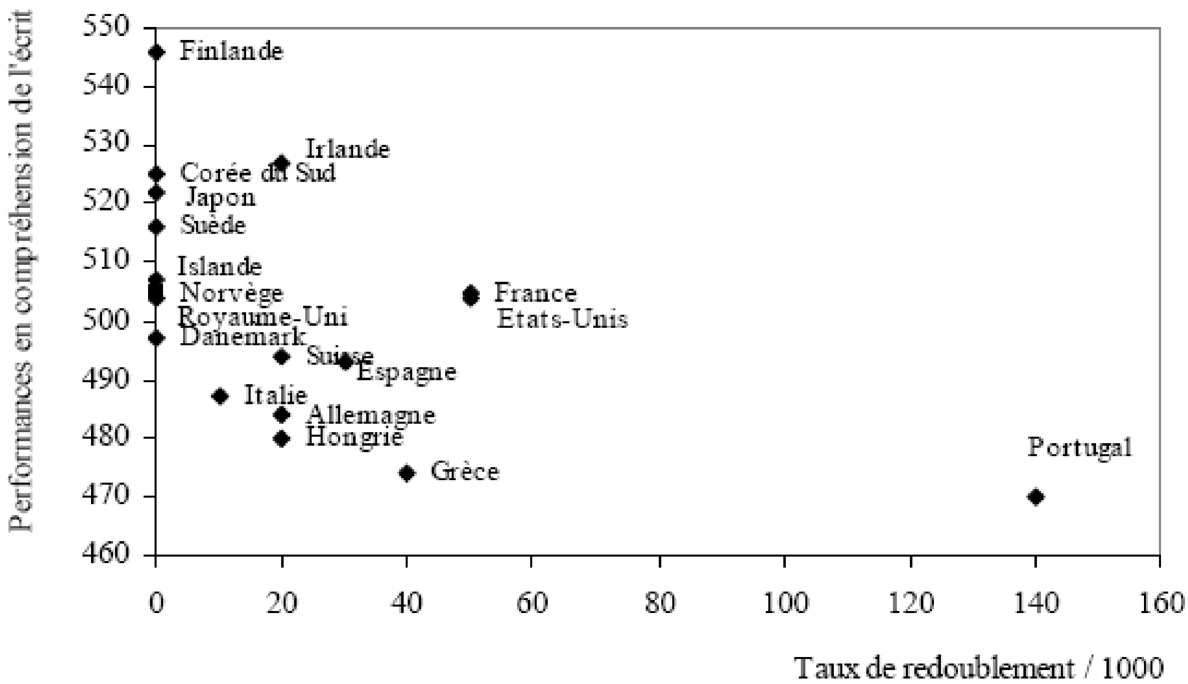
(b) Bac pro. : baccalauréat professionnel ; BT : brevet de technicien ; BP : brevet professionnel ; BMA : brevet des métiers d'art

(c) Y compris les élèves n'ayant jamais redoublé.

Lecture : 30,3% des élèves entrés en 6^e en 1989 après avoir redoublé le CP ont terminé leurs études sans qualification.

Source : Éducation & formations n° 66, p. 29.

Sans doute avec quelque prudence, l'efficacité du redoublement peut être jugé aussi à l'aide de comparaisons internationales. Par exemple, le graphique ci-dessous donne les performances en compréhension de l'écrit à quinze ans (PISA) en regard avec le taux de redoublement par pays :



Le rapport ajoute ce commentaire : « (...) il apparaît nettement que les pays les plus adeptes du redoublement n'ont pas de meilleurs résultats que ceux qui le pratiquent modérément ou qui le réfutent. Le redoublement n'apporte pas de valeur ajoutée quant au niveau moyen de la population d'élèves. »

2. Les enseignants comme les familles, bien que de façon différente, sont attachés à ce dispositif.

La dernière partie du rapport fait un bilan :

Lorsque l'on se pose la question du redoublement en France, les réponses sont finalement assez claires. Le redoublement ne répond pas aux objectifs qu'il est censé atteindre, ses décisions sont injustes et il est coûteux. Cependant, la plupart des acteurs, enseignants et parents restent persuadés de son utilité. Alors comment aseptiser, en profondeur et dans les meilleurs délais, ce que Ferrier (Ferrier, Jean, *Améliorer l'efficacité de l'école primaire*. Paris : Hachette Éducation, 1999, 255 p., Rapport à Ségolène Royal, ministre déléguée, chargée de l'Enseignement scolaire) considère comme "*une des plaies de notre système éducatif français"* ? Il ne s'agit sans doute pas de se contenter de promulguer des règlements interdisant ou tout du moins restreignant sa pratique. Nous avons vu que même si elle s'est amenuisée, elle reste vivace, notamment dans une classe comme le cours préparatoire où elle ne devrait pratiquement plus avoir lieu d'être. Les changements d'organisation, voire l'accroissement des moyens, ne sont rien face au comportement de l'acteur essentiel à l'école qu'est l'enseignant.

Mais la conclusion demeure prudente :

Le système éducatif doit profiter d'une réflexion sur le redoublement pour promouvoir des changements importants de ses modalités de fonctionnement. Ceux que nous avons proposés sont en cohérence avec les objectifs et certaines des propositions du rapport Thélot (Thélot, Claude, *Pour la réussite de tous les élèves*, Rapport de la Commission du débat national sur l'avenir de l'école, La Documentation Française, 2004) (pratiques pédagogiques et temps d'apprentissage adaptés aux besoins des élèves, développement de la collégialité des pratiques éducatives, aides aux élèves en dehors des cours). Même si en matière d'évolution des politiques éducatives, il faut malheureusement rester modeste quant à la portée finale des transformations.

1.4.3. Il y a un fort débat pour ou contre le redoublement dans notre pays aujourd'hui, débat qu'il ne faudrait en aucun cas ramener à un débat idéologique de politique gauche/droite ni à un débat sur l'école se résumant à pédagogisme / antipédagogisme (ainsi, par exemple, on entend dire que les « pédagogistes » des IUFM seraient opposés au redoublement…).
C'est un problème de société que nous devons apprendre à gérer, sans parti pris, et souvent au cas pas cas. C'est par exemple l'avis de ces quelques professeurs interrogés par le *Monde de l'Éducation* en 2003 dont voici des extraits :

> - Éliane Thépot : *« Ce n'est pas une panacée, c'est au cas par cas que l'on peut le préconiser. Il y a des redoublements qui peuvent être stériles, d'autres bénéfiques pour certains élèves, mais à condition qu'il y ait aussi un consensus favorable autour d'eux et notamment que leurs parents ne présentent pas cette perspective comme une brimade et une catastrophe.* »
>
> - Alain Hubaut : « *Mes trente années d'expérience en tant que professeur au collège et au lycée m'ont permis de voir des redoublements tout à fait bénéfiques et aussi un bon nombre de "redoublements gâchis" car très mal vécus par l'élève et surtout son entourage. Tout dépend de l'état d'esprit dans lequel un redoublement est abordé.* »

Un apport personnel dans ce débat : au lycée Michelet, en juin 2004, 44 élèves de Première (6 en L, 7 en ES et 31 en S) ont « forcé » le passage en Terminale. Sur ces 44 élèves, 33 ont obtenu le baccalauréat dès le premier groupe d'épreuves (plus précisément, 4 en L, 2 en ES et 27 en S) dont 3 avec la mention AB. Alors, injuste le redoublement ? La menace du redoublement a pu jouer comme un puissant facteur de motivation pour nombre de ces élèves, tout comme un indicateur pour leur famille et il faut, en cette matière comme en beaucoup d'autres dans le domaine de l'éducation, avoir à l'esprit que les faits sont le produits de nombreux facteurs dont tous ne sont pas identifiés et dont l'École n'a pas forcément la maîtrise.

1.5. Les enjeux de l'orientation

Le mot même pose difficulté, car il désigne (au moins) deux types d'activités : d'une part le processus qui répartit les élèves dans différentes voies de formation, filières et options et, d'autre part, l'aide aux individus dans le choix de leur avenir scolaire et professionnel, ces deux objectifs étant parfois contradictoires. Nous travaillerons ce point dans une séance ultérieure.

2. Questions de la semaine : Conditions et contraintes : une échelle de niveaux de codétermination didactiques

Le travail précédent mené à propos de l'orientation met en évidence qu'il y a des conditions et des contraintes qui pèsent sur les systèmes didactiques et qui ne relèvent pas des niveaux spécifiques de la discipline enseignée que nous avons déjà utilisés. Les questions de la semaine se font l'écho de ce phénomène comme en témoigne le choix, volontairement restreint, de questions suivantes prises parmi les questions des semaines 14 à 16.

1. Un élève est ingérable au point de devoir être exclu souvent afin que la classe puisse travailler et se concentrer. J'ai donc eu un entretien avec sa mère qui me dit qu'elle ne sait plus quoi faire (en gros, elle a baissé les bras). Qu'est-ce que je peux faire pour le faire travailler et donc arriver à le garder en cours ?

2. Quelles attitudes avoir face à des parents qui viennent, lors de la réunion parents-professeurs, défendre leurs enfants, d'une façon ou d'une autre ? Que faut-il faire lorsqu'un parent insulte un professeur ? Faut-il exiger la présence de certains parents d'élèves difficiles ?

3. Je suis désemparé face à trois élèves doublants qui refusent totalement de se mettre au travail (bras croisés, manteau fermé, sac non ouvert) et dont les parents ne répondent pas aux demandes de rendez-vous. Leurs résultats ne sont pas trop mals - peut-être parce que doublants - mais leur attitude contamine la classe. Je me trouve devant un mauvais choix : l'épreuve de force qui ne peut se terminer que par une exclusion, ou un laisser faire dommageable au groupe.

4. Un parent d'élève a voulu me rencontrer parce que j'ai fait cours seul à sa fille. La position de l'administration (proviseur, CPE) est claire, j'ai parfaitement eu raison de faire cours. Comment gérer les rencontres avec les parents dans ces conditions ?

5. Que faire pour un élève qui quitte le collège en milieu d'année pour un autre collège ? Celui-ci se laisse aller et n'écoute plus rien. Comment le motiver ?

6. J'ai pas mal d'élèves qui vont se réorienter à la fin de l'année. Ils me disent que ça ne sert à rien qu'ils travaillent maintenant car ils ne veulent pas continuer en filière générale. J'ai beau leur dire qu'au niveau des orientations, les 3^{e} passeront avant eux et qu'ensuite ce sont leurs notes qui détermineront leur passage. Et puis que ce qu'ils apprennent cette année leur servira pour l'année prochaine et que ce sera plus facile, mais rien n'y fait. Le problème est que ces élèves freinent aussi la progression de la classe. Que faire ?

7. J'ai un élève dyspraxique. Nous avons commencé le chapitre sur les vecteurs. Ça se révèle plus qu'infaisable pour lui de repérer quoi que ce soit dans un plan. Sachant qu'il va aller en première L, est-ce que je ne peux pas passer sur ce chapitre pour lui et lui faire réviser ou approfondir des notions qui lui seront utiles en première L ? (Sachant que je lui fais déjà des contrôles particuliers, etc.)

L'échelle des niveaux de codétermination didactique permet de penser cela en structurant les conditions et les contraintes auxquelles peut être soumis un système didactique de la façon suivante :

Sujet ⇆ Thème ⇆ Secteur ⇆ Domaine ⇆ Discipline ⇆ Pédagogie ⇆ École ⇆ Société ⇆ Civilisation

Dans les conditions relevant de la société, on a notamment celles portées dans les questions précédentes par « les parents » ou encore par la prise en charge des élèves à « besoins particuliers » : en effet, il y a 20 ans, l'École n'avait pas à prendre en charge spécifiquement un élève atteint de dyspraxie ; c'est l'évolution de la société par rapport au handicap qui conduit à ce que l'École ait à prendre en charge ces questions, ce qui suscitent pour le professeur des questions au niveau des secteurs. C'est les niveaux de l'École et de la Société que l'on voit principalement à l'œuvre dans la 6^{e} question : si l'on avait une école « sans orientation », ou une école dont la structure ne soit pas séquentielle, le problème se poserait différemment ; de même, si le rapport aux mathématiques qui prévalait dans la société était que les mathématiques sont très utiles à la vie du citoyen.

Il est important d'apprendre à penser que les questions qui se posent au professeur de mathématiques (niveau de la discipline) ou plus généralement au professeur (niveau pédagogique) relèvent de plusieurs facteurs de niveaux supérieurs et que leur apporter une réponse n'est pas simple et nécessite de sortir du niveau disciplinaire pour travailler à créer des conditions faisant contrepoids face aux conditions de niveaux supérieurs. Nous y reviendrons.

3. Forum des questions

Diviser par une fraction

En classe de 4e, comment motiver la division des fractions, puis comment justifier que diviser par une fraction c'est multiplier par son inverse ? Par exemple, un élève acceptera rapidement que diviser par 3 c'est multiplier par $\frac{1}{3}$, mais pas que diviser par $\frac{2}{3}$ c'est multiplier par $\frac{3}{2}$. (SB, 4e, 18)

En dehors de la demande d'une raison d'être de la division par une fraction, la question décrit une situation où il manque, effectivement, des éléments technologiques. Le document « Ressources » des programmes du collège sur le calcul numérique donne un certain nombre d'indications à cet égard ; voyons cela.

3.2.3 La division

Il a été mis en évidence que $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$, avec a et b entiers en classe de 6e et a et b décimaux en classe de 5e, ce qui s'énonce de la façon suivante : $\frac{a}{b}$, quotient de a par b, est égal au produit de a par $\frac{1}{b}$.

En classe de 4e, l'inverse d'un nombre est défini comme étant le quotient de 1 par ce nombre.

Ainsi par définition, $\frac{1}{\frac{a}{b}}$ (avec a et b entiers ou décimaux non nuls) est la solution de $\frac{a}{b} \times x = 1$.

Or $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$, ce qui permet de déduire que $\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$.

Cherchons s'il existe un nombre qui soit le quotient de $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$, c'est-à-dire qui soit solution de $\frac{c}{d} \times x = \frac{a}{b}$.

Supposons que ce nombre existe. Il en résulte en multipliant les deux membres de l'égalité par d puis par b que : $c \times x = \frac{a}{b} \times d$, puis que : $b \times c \times x = a \times d$

Les nombres b et c étant non nuls, il en est de même de $b \times c$.

x apparaît comme étant le quotient de $a \times d$ par $b \times c$.

Ainsi, si un tel nombre existe, il ne peut qu'être égal à $\frac{a \times d}{b \times c}$.

Il reste à montrer que ce quotient convient :

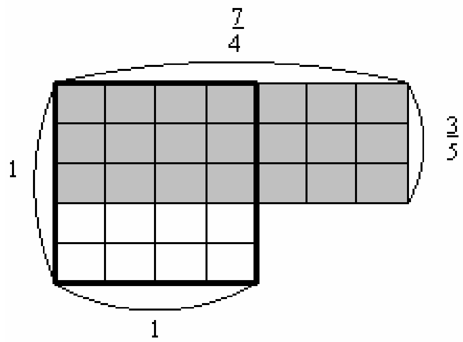
$$\frac{c}{d} \times \frac{a \times d}{b \times c} = \frac{c \times a \times d}{d \times b \times c} = \frac{a}{b}$$

Le quotient de $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$ est égal à $\frac{a \times d}{b \times c} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{\frac{c}{d}}$.

Il en résulte que diviser par un nombre, c'est multiplier son inverse.

On voit que les choses reposent d'abord d'une part sur la définition du nombre $\frac{a}{b}$: c'est le nombre qui multiplié par b donne a ; d'autre part sur le fait que $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$. Ensuite, on a défini et donné du sens en 5e à la multiplication de deux fractions. C'est à partir de ces considérations que le professeur peut élaborer des justifications pour la classe et définir la division.

Examinons par exemple la situation suivante, issue du même document ressources, et associée à la multiplication : on a un carré dont on connaît l'aire et le côté et on cherche l'aire d'un rectangle dont les mesures des côtés sont $\frac{7}{4}$ et $\frac{3}{5}$ de la mesure du côté du carré. (voir figure ci-dessous, empruntée au document ressources).



L'aire du rectangle est alors égale à $\frac{21}{20}$ de l'aire du carré ; les auteurs du document ressources proposent cette situation pour mettre en évidence l'égalité $\frac{7}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{7 \times 3}{4 \times 5}$

Cherchons maintenant si l'on peut déterminer un rectangle dont l'aire soit $\frac{21}{20}$ de l'aire du carré et dont la mesure d'un côté soit $\frac{7}{4}$ de celui du carré. On a affaire là à un problème de « division » qui se formule de la façon suivante : on cherche un nombre, x, tel que multiplié par $\frac{7}{4}$ il donne $\frac{21}{20}$. On trouve en écrivant que $\frac{21}{20} = \frac{7 \times 3}{4 \times 5}$ que le nombre qui convient est $\frac{3}{5}$. Mais si l'on veut déterminer, toujours si c'est possible, un rectangle d'aire $\frac{9}{7}$ de l'aire du carré et dont la mesure d'un côté soit $\frac{5}{4}$ du côté du carré. La technique précédente ne marche pas. On cherche x tel que $\frac{9}{7} = \frac{5}{4} \times x$. Pour obtenir x, il faut « chasser » le $\frac{5}{4}$ ou les dénominateurs.

Comme $\frac{5}{4}$ est le nombre qui multiplié par 4 donne 5, en multipliant les deux membres de l'égalité par 4[28], on obtient que $\frac{9}{7} \times 4 = 5 \times x$; de même, comme $\frac{9}{7}$ est le nombre qui multiplié par 7 donne 9, en multipliant les deux membres de l'égalité par 7, on obtient que $9 \times 4 = 7 \times 5 \times x$. x est donc le nombre qui multiplié par 7×5=35 donne 9×4=36, soit encore $x = \frac{9 \times 4}{7 \times 5} = \frac{36}{35}$.

28On suppose que l'on sait qu'une égalité est conservée en multipliant les deux membres par le même nombre.

Supposons que l'on sache trouver un nombre y qui, multiplié par 5/4, donne 1 ; alors en multipliant les deux membres de l'égalité par y on obtient que $x = y \times \frac{9}{7}$.

C'est ainsi la production de la division dans une AER (dont on a dessiné très grossièrement un argument ci-dessus) qui lui donne à la fois du sens et qui permette de la caractériser comme la multiplication par « l'inverse » qui donne des voies de progrès dans le travail à accomplir.

On ajoutera au développement précédent que l'on trouve dans les archives du Séminaire un argument d'AER à propos de la notion d'inverse. Voici par exemple ce qui figure dans les notes du Séminaire 2004-2005 :

① On prend pour point de départ la formulation suivante :

Guide de direction d'étude

1) La question à étudier :

En effectuant une division, on a, par erreur, échangé le dividende a et le diviseur b et on a trouvé comme résultat 0,625 (qui est donc le quotient de b par a), avant d'effacer les valeurs a et b… Y a-t-il un moyen de retrouver le bon résultat, q, quotient de a par b ?

❶ Le premier souci est celui de la ***dévolution*** du problème. Plusieurs techniques peuvent être mises en œuvre – échanges et débat avec les élèves, etc. Une telle étape doit obligatoirement s'appuyer sur la considération d'exemples numériques ; d'où les questions « cruciales » suivantes :

Guide de direction d'étude

1) La question à étudier :

En effectuant une division, on a, par erreur, échangé le dividende a et le diviseur b et on a trouvé comme résultat 0,625 (qui est donc le quotient de b par a), avant d'effacer les valeurs a et b… Y a-t-il un moyen de retrouver le bon résultat, q, quotient de a par b ?

2.1. Comment trouver des entiers a et b tels que $\frac{b}{a} = 0{,}625$?

[On a $0{,}625 = \frac{625}{1000} = \ldots = \frac{5}{8}$.]

2.2. Si on choisit un entier a, existe-t-il toujours un nombre b, entier ou décimal, tel que $\frac{b}{a} = 0{,}625$?

2.3. Peut-on déterminer tous les couples d'entiers (a, b) tels que $\frac{b}{a} = 0{,}625$?

2.4. Peut-on savoir quelles ont été les vraies valeurs $\overline{a}$ et $\overline{b}$ utilisées pour calculer $0{,}625 = \frac{b}{a}$?

❷ En supposant qu'émerge le fait que $q = \frac{a}{b}$ est indépendant du choix du couple (a, b) tel que $\frac{b}{a} = 0{,}625$, on ajoute alors les questions 3 et 4 suivantes :

Guide de direction d'étude *(suite)*

3. Que vaut $q = \frac{a}{b}$ pour les divers couples (a, b) trouvés ?

[On a : $q = \frac{8}{5} = 1{,}6$.]

4.1. Si, sur la base des résultats observés, on admet que, quel que soit le couple (a, b) de nombres entiers ou décimaux tel que $\frac{b}{a} = 0{,}625$, le quotient a toujours la même valeur, quelle réponse peut-on apporter à la question initiale ?

4.2. Pour calculer q il suffit de disposer d'un couple (a, b) de nombres entiers ou décimaux tel que $\frac{b}{a} = 0{,}625$, et de calculer alors $\frac{a}{b}$. Y a-t-il un choix du couple (a, b) plus simple que les autres ?

4.3. Formuler la technique de calcul de $q = \frac{a}{b}$ à partir de la connaissance de $r = \frac{b}{a}$. La mettre en œuvre lorsque $r = 15{,}625$, etc.

② Le scénario ***potentiel*** consigné dans le *Guide* ci-dessus (dont il resterait de toute façon à faire une ***analyse*** **a priori** approfondie) ne devra être actualisé en séance qu'en fonction du cheminement réel de l'étude que pilote l'enseignant : contrairement à l'énoncé rédigé à l'avance et communiqué aux élèves, ici la chronique de l'étude ***n'est pas écrite à l'avance***, et certaines questions cruciales pourront par exemple être dépassées avant même d'avoir été posées… Le travail en séance appellera ainsi des ***bilans d'étape fréquents***, dont figurera au tableau, au moins, une version abrégée servant de repère à la rédaction consignée par chacun des élèves dans son cahier d'AER.

③ Bien entendu, il restera à ***déduire*** de la ***théorie arithmétique disponible*** ce que l'on aura cru pouvoir ***induire*** de résultats numériques nombreux ou ***conjecturer*** à partir de quelques résultats numériques, et qui constitue l'élément clé de la ***technologie*** de la technique – « pour obtenir q, diviser 1 par r » – à laquelle on sera parvenu : quel que soit le couple de nombres (a, b) tel que $\frac{b}{a} = 0{,}625$, le quotient $q = \frac{a}{b}$ a la même valeur. Ce point devra alors faire l'objet d'une seconde AER.

La simplification des fractions

Comment donner une raison d'être aux critères de divisibilité en 6e ? Faut-il en parler dans le chapitre sur la division euclidienne ou les fractions (simplification) ? (FA, 6e)

La simplification de fractions apparaît vraiment dans les programmes en classe de 3e. Il y a seulement en 5e l'égalité « $\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$ ». Doit-on attendre la 3e pour apprendre aux élèves la simplification de fractions ? (J, 4e,)

Connaître le PGCD et le PPCM implique-t-il des techniques de résolution des deux types de tâches : simplifier une fraction ; réduire deux fractions à un même dénominateur ? Peut-on en parler en cinquième ? (PAR, 5e,)

On peut faire simplifier des fractions avant la classe de 3e sans pour autant que la simplification des fractions soit un thème d'étude, ce qu'il est effectivement en 3e. Les deux ingrédients technologiques cités dans les questions (critères de divisibilité et égalité $\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$) donnent en effet des éléments pour produire une technique du type suivant : supposons qu'un calcul aboutisse à la

fraction $\frac{25}{45}$: 25 et 45 sont divisibles par 5 ; 25 = 5 × 5 et 45 = 9 × 5, dont $\frac{25}{45} = \frac{5\times 5}{9\times 5} = \frac{5}{9}$.
On ne cherchera pas une simplification exhaustive : par exemple on ne cherchera pas à simplifier une fraction comme $\frac{91}{65}$.

La classe de cinquième est l'occasion pour commencer à initier les élèves à la démonstration mathématique. Doit-on s'en tenir à une rédaction en toutes lettres ou peut-on introduire progressivement l'usage de quelques symboles ? (//, ⊥, etc.) (JB, 5^{e}, 18)

Le programme du collège est assez clair à cet égard. Voici ce qui est précisé dans le paragraphe 4.6. Mathématiques et langages du Préambule pour le collège :

Les travaux mathématiques sont l'occasion de familiariser les élèves avec l'emploi d'un nombre limité de notations courantes qui n'ont pas à faire l'objet d'exercices systématiques (le langage doit rester au service de la pensée et de son expression) :
• dans le domaine numérique : les symboles d'égalité et d'inégalité, les symboles d'opérations (dont les notations puissance et racine carrée au cycle central) et le symbole de pourcentage ;
• dans le domaine géométrique : le symbole d'appartenance, la longueur AB d'un segment d'extrémités A et B, l'angle $\widehat{AOB}$, le segment [AB], la droite (AB), et la demi-droite [AB), puis les notations trigonométriques.

Aucune mention, donc, des symboles cités dans la question et le programme de cinquième ne comporte pas d'indication supplémentaire : on se passera donc des symboles en question. On notera que, bien que l'utilisation de symboles pour désigner le parallélisme soit attestée de longue date, leur usage a été longtemps peu répandu comme le note Florian Cajori dans son Histoire des notations mathématiques :

368. *Signs for parallel lines.*—Signs for parallel lines were used by Heron and Pappus (§ 701); Hérigone used horizontal lines = (§ 189) as did also Dulaurens[12] and Reyher,[13] but when Recorde's sign of equality won its way upon the Continent, vertical lines came to be used for parallelism. We find || for "parallel" in Kersey,[14] Caswell, Jones,[15] Wilson,[16] Emerson,[17] Kambly,[18] and the writers of the last

[1] *Opera Jakob Bernoullis*, Vol. I, p. 430, 431; see G. Eneström, *Bibliotheca mathematica* (3d ser.), Vol. IX (1908–9), p. 207.

[2] See P. Herigone, *Cursus mathematici* (Paris, 1644), Vol. VI, p. 49.

[3] John Kersey, *Algebra* (London, 1673), Book IV, p. 177.

[4] John Caswell in Wallis' *Treatise of Algebra*, "Additions and Emendations," p. 166. For "circumference" Caswell used the small letter *c*.

[5] J. Ward, *The Young Mathematician's Guide* (9th ed.; London, 1752), p. 301, 369.

[6] P. Steenstra, *Grondbeginsels der Meetkunst* (Leyden, 1779), p. 281.

[7] J. D. Blassière, *Principes de géométrie élémentaire* (The Hague, 1723), p. 16.

[8] W. Bolyai, *Tentamen* (2d ed.), Vol. II (1904), p. 361 (1st ed., 1832).

[9] *Samuel Reyhers, Euclides* (Kiel, 1698), list of symbols.

[10] John Caswell in Wallis' *Treatise of Algebra* (1685), "Additions and Emendations," p. 166.

[11] Adriano Metio, *Praxis nova geometrica* (1623), p. 44.

[12] Fr. Dulaurens, *Specimina mathematica* (Paris, 1667), "Symbols."

[13] S. Reyher, *op. cit.* (1698), list of symbols.

[14] John Kersey, *Algebra* (London, 1673), Book IV, p. 177.

[15] W. Jones, *Synopsis palmariorum matheseos* (London, 1706).

[16] John Wilson, *Trigonometry* (Edinburgh, 1714), characters explained.

[17] [W. Emerson], *Elements of Geometry* (London, 1763), p. 4.

[18] L. Kambly, *Die Elementar-Mathematik*, 2. Theil, *Planimetrie*, 43. Aufl. (Breslau, 1876), p. 8.

412 A HISTORY OF MATHEMATICAL NOTATIONS

fifty years who have been already quoted in connection with other pictographs. Before about 1875 it does not occur as often as do △, □, ▭. Hall and Stevens[1] use "par[1] or ||" for parallel. Kambly[2] mentions also the symbols ⫲ and ⫳ for parallel.

A few other symbols are found to designate parallel. Thus John Bolyai in his *Science Absolute of Space* used |||. Karsten[3] used #; he says: "Man pflege wohl das Zeichen # statt des Worts: *Parallel* der Kürze wegen zu gebrauchen." This use of that symbol occurs also in N. Fuss.[4] Thomas Baker[5] employed the sign ⋍.

With Kambly # signifies rectangle. Häseler[6] employs ⋕ as "the sign of parallelism of two lines or surfaces."

369. *Sign for equal and parallel.*—⋕is employed to indicate that two lines are equal and parallel in Klügel's *Wörterbuch;*[7] it is used by H. G. Grassmann,[8] Lorey,[9] Fiedler,[10] Henrici and Treutlein.[11]

370. *Signs for arcs of circles.*—As early a writer as Plato of Tivoli (§ 359) used $\widehat{ab}$ to mark the arc *ab* of a circle. Ever since that time it has occurred in geometric books, without being generally adopted. It is found in Hérigone,[12] in Reyher,[13] in Kambly,[14] in Lieber and Lühmann.[15] W. R. Hamilton[16] designated by $\frown LF$ the arc "from *F* to *L*." These

[1] H. S. Hall and F. H. Stevens, *Euclid's Elements*, Parts I and II (London, 1889), p. 10.

[2] L. Kambly, *op. cit.*, 2. Theil, *Planimetrie*, 43. Aufl. (Breslau, 1876), p. 8.

[3] W. J. G. Karsten, *Lehrbegrif der gesamten Mathematik*, 1. Theil (Greifswald, 1767), p. 254.

[4] Nicolas Fuss, *Leçons de géométrie* (St. Petersbourg, 1798), p. 13.

[5] Thomas Baker, *Geometrical Key* (London, 1684), list of symbols.

[6] J. F. Häseler, *Anfangsgründe der Arith., Alg., Geom. und Trig.* (Lemgo), *Elementar-Geometrie* (1777), p. 72.

On trouvera sur ce site http://jeff560.tripod.com/mathsym.html une synthèse des principales origines des symboles mathématiques prenant appui sur l'ouvrage de F. Cajori.

La réforme des Lycées

Pourrait-on avoir des informations sérieuses sur la réforme du lycée ? (JLH, 2[de], 16)

Serait-il possible d'avoir une information « complète » sur la réforme du lycée, les réformes de l'enseignement, bref toutes les mutations de notre profession ? Y-a-t-il des « rumeurs, (bruits) de couloir » concernant d'autres réformes ? (M, 17, 4[e])

Le temps manque pour aborder tous les sujets, principalement en ces moments où le temps didactique doit avancer pour permettre notamment un travail approprié du mémoire de TER et des travaux pour la validation du C2i2e. Nous pourrons aborder ces sujets dans la dernière partie de l'année. En attendant, des informations fiables et assez complètes sur la réforme du Lycée peuvent être trouvées sur le site du ministère de l'éducation nationale à l'adresse suivante :

http://www.education.gouv.fr/cid50348/espace-pro-pour-nouveau-lycee.html...

Attestation de maîtrise des compétences et livret de compétences

Qu'est-ce que l'attestation de maîtrise des connaissances et compétences du socle commun au palier 3 ? Quelles sont les modalités de validation des items ? (AM, 5e & 4e, 16)

Lors du conseil d'enseignement, on a parlé du livret des compétences (collège). Ce dispositif doit être évalué mais comment ? au cours de l'année selon le professeur ? par une évaluation spécifique ? (AB, 4e,14)

Quel dispositif est utilisable et valable pour valider des compétences du socle commun au collège (4e) ? (AB, 4e,15)

Comme en beaucoup de matières, le site Eduscol s'avère une ressource efficace : à l'adresse http://eduscol.education.fr/cid47869/socle-commun-evaluation.html, on trouve des éléments sur l'évaluation du socle commun et, dans un encadré sur l'évaluation, un lien pointe sur un document qui constitue l'attestation cherchée.
(http://media.eduscol.education.fr/file/socle_commun/73/8/attestation-palier-3_117738.pdf)

Pour la validation proprement dite, elle est renseignée « de façon continue » par les professeurs dans le livret personnel de compétences avec des modalités que le site Eduscol décrit ainsi :
(http://eduscol.education.fr/pid23228-cid49889/livret-personnel-de-competences.html)

Au collège

Dès l'année scolaire 2009-2010, le livret est renseigné au plus tard en fin de troisième, pour tous les élèves.
À partir de 2011, le diplôme national du brevet atteste la maîtrise du socle, en s'appuyant sur le livret.

Le livret inclut aussi les attestations délivrées au cours de la scolarité obligatoire :

- attestations de sécurité routière premier et second niveaux ;
- certificat « Prévention et secours civiques de niveau 1 » ;
- brevet informatique et internet (B2i) « École » et « Collège ».

En fin de 3e ou de scolarité obligatoire, ce document est remis à la famille.

Évaluer et valider les acquis des élèves

L'évaluation permet d'apprécier les progrès de chaque élève dans l'acquisition du socle commun de connaissances et de compétences et de valider successivement chacun de ses paliers.

Elle permet de prendre en compte les besoins des élèves. Un accompagnement adapté peut leur être proposé, dans le cadre des dispositifs existants.

Modalités d'évaluation

L'évaluation des élèves est progressive, de l'école au collège. Elle est centrée sur les connaissances et compétences acquises en référence au socle commun et aux programmes, à chaque palier.

(...)

Au collège

Des grilles de référence présentent les éléments du socle exigibles en fin de collège, domaine par domaine. Elles donnent aussi des indications d'évaluation pour chacune des sept compétences.

L'évaluation des acquis des élèves se réalise progressivement, de la sixième à la troisième, dans chaque discipline. Elle implique l'ensemble de l'équipe pédagogique (enseignants, professeur documentaliste, conseiller principal d'éducation).

Les connaissances et compétences du socle commun non validées à l'issue du collège sont à nouveau évaluées dans la voie de formation choisie, jusqu'à la fin de la scolarité obligatoire.

Modalités de validation

La validation privilégie une démarche collégiale.

(...)

Au collège

La validation de chacune des compétences du socle concerne l'ensemble de l'équipe pédagogique. Le professeur principal renseigne le livret lors d'un conseil de classe ou à tout autre moment approprié en cours d'année. En fin de troisième, le chef d'établissement atteste ou non l'acquisition du socle commun.

Examens

La maîtrise du palier 3 du socle commun est obligatoire pour obtenir le diplôme national du brevet (DNB). Si elle n'est pas validée par le chef d'établissement en fin de 3^e^, le jury académique du DNB peut l'attester en s'appuyant sur les notes obtenues aux épreuves de l'examen, le livret personnel de compétences, les bulletins scolaires ...

Les élèves qui ne maîtrisent pas le socle commun à la fin de la scolarité obligatoire peuvent bénéficier d'un bilan personnalisé. C'est le cas notamment pour les élèves qui suivent des enseignements adaptés. Une attestation précisant les compétences qu'ils maîtrisent leur est ensuite délivrée. Elle peut être prise en compte dans l'obtention du certificat de formation générale.

On notera qu'un encadré à droite contient des « outils » pour le collège auxquels on pourra utilement se reporter. On ajoutera qu'un professeur de mathématiques instruit sur la notion d'organisation mathématique doit avoir des facilités à repérer, dans les évaluations qu'il a proposées aux élèves, les compétences du socle commun qui désignent, sous des formulations quelquefois un peu approximatives, des organisations mathématiques enjeu de l'étude dans la classe ou qui l'ont été dans la ou les classes antérieures. Nous y reviendrons.

Les vecteurs et les équations de droites en seconde

1. De la part de l'équipe de maths du lycée St Charles : le programme n'est pas clair quant à l'exigibilité des propriétés de distributivité pour les vecteurs ainsi que la caractérisation de la colinéarité par $xy' - yx' = 0$. Quelle est votre interprétation ? (JPB, 2^de^, 18)

2. Dans le programme de seconde, il est noté :

Contenu	Capacités attendues
• Produit d'un vecteur par un nombre réel	• Utiliser la notation $\lambda \vec{u}$ • Établir la colinéarité de deux vecteurs
• Relation de Chasles	• Construire la somme de deux vecteurs • Caractériser alignement et parallélisme par la colinéarité de vecteurs.

a) Faut-il voir les propriétés de la distributivité d'un réel par rapport à une somme de vecteurs, etc.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, λ et λ' deux nombres réels :

(1) $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$

(2) $\lambda(\lambda'\vec{u}) = \lambda'(\lambda\vec{u}) = \lambda'\lambda\vec{u}$

(3) $(\lambda+\lambda')\vec{u} = \lambda\vec{u} + \lambda'\vec{u}$

b) Faut-il donner la caractérisation de la colinéarité par le déterminant i.e. $\vec{u}$ (x, y) et $\vec{v}$ (x', y') sont colinéaires ssi $xy' - x'y = 0$? (JLH, 2de, 18)

3. Dans ma progression, le chapitre sur les vecteurs avec la notion de *colinéarité* arrive avant le chapitre sur les équations de droites avec la notion de *droites parallèles*. Comment peut-on éviter que les élèves se ramènent à la colinéarité de vecteurs et cherchent plutôt à déterminer l'équation d'une droite passant par deux points donnés afin de faire émerger la propriété sur les droites parallèles (même coefficient directeur) et/ou la méthode pour montrer que trois points sont alignés (A, B, C alignés ssi (AB) et (AC) ont le même coefficient directeur) ? (JC, 2de, 18)

4. *a*) Sur le chapitre sur les équations de droites en 2de, faut-il parler d'équations cartésiennes ? J'ai juste évoqué ce que c'était, mais ensuite je n'ai traité que les équations réduites.
b) Au niveau des vecteurs, je n'ai pas évoqué le vecteur directeur d'une droite. Fallait-il le faire ? Car cela simplifie les démonstrations sur le chapitre des droites. De même pour la condition de colinéarité de deux vecteurs que je n'ai pas faite émerger ($\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - x'y = 0$) ? (FD, 2de, 17)

5. Dans le programme de 2de, sur les droites, il y a en commentaire : ce sera l'occasion de revoir les systèmes linéaires. Étant donné qu'on ne voit que les équations réduites, à quel moment doit-on les revoir ? Est-ce dans le type de tâches : déterminer l'équation d'une droite à partir de deux points ? Par exemple, soit A(2;-3) et B(1;4)deux points ; comme $x_A \neq x_B$, (AB) : $y = ax + b$; A $\in$ (AB) donc $-3 = 2a + b$; B $\in$ (AB) donc $4 = a + b$; on résout le système pour trouver a et b. Seulement ici c'est un système particulier car l'inconnue b est facilement « isolable ». De plus, il y a une autre technique, qui me semble plus facile, pour résoudre ce type de tâches (calculer le coefficient directeur avec la formule, puis se servir d'un des points A ou B pour calculer b). (FD, 2de, 18)

6. Il n'est pas marqué dans le programme d'institutionnaliser la résolution de systèmes linéaires mais d'en faire dans le cadre de la recherche de coordonnées de points d'intersection de droites. Faut-il tout de même leur montrer les deux techniques de résolution (combinaison et substitution) sur des exemples ou est-il mieux d'en utiliser qu'une pour éviter des confusions ? (MH, 2de, 18)

1. Les problèmes soulevés par les premières questions sur les vecteurs s'étudient en considérant d'abord les types de tâches au programme de la classe et les techniques possibles pour les accomplir : si des *praxis* incontournables sont produites et justifiées par les éléments technologiques évoqués, alors, ils sont nécessairement dans le programme. On reproduit ci-dessous l'introduction du secteur de la géométrie plane dans le programme de seconde.

L'objectif de l'enseignement de la géométrie plane est de rendre les élèves capables d'étudier un problème dont la résolution repose sur des calculs de distance, la démonstration d'un alignement de points ou du parallélisme de deux droites, la recherche des coordonnées du point d'intersection de deux droites, en mobilisant des techniques de la géométrie plane repérées.
Les configurations étudiées au collège, à base de triangles, quadrilatères, cercles, sont la source de problèmes pour lesquels la géométrie repérée et les vecteurs fournissent des outils nouveaux et performants.
En fin de compte, l'objectif est de rendre les élèves capables d'étudier un problème d'alignement de points, de parallélisme ou d'intersection de droites, de reconnaissance des propriétés d'un triangle, d'un polygone – toute autonomie pouvant être laissée sur l'introduction ou non d'un repère, l'utilisation ou non de vecteurs.
Dans le cadre de la résolution de problèmes, l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique par les élèves leur donne une plus grande autonomie et encourage leur prise d'initiative.
La définition proposée des vecteurs permet d'introduire rapidement l'addition de deux vecteurs et la multiplication d'un vecteur par un nombre réel. Cette introduction est faite en liaison avec la géométrie plane repérée. ***La translation, en tant que transformation du plan, n'est pas étudiée en classe de seconde.***

Ce sont les problèmes d'alignements, de parallélisme et d'étude de configurations qui sont au cœur du travail à effectuer, les problèmes d'alignement et de parallélisme étant clairement signalés dans le thème des vecteurs :

Vecteurs Définition de la translation qui transforme un point A du plan en un point B. Vecteur $\overrightarrow{AB}$ associé. Égalité de deux vecteurs : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.	•Savoir que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ équivaut à $ABCD$ est un parallélogramme, éventuellement aplati. • Connaître les coordonnées $(x_B-x_A;\ y_B-y_A)$ du vecteur $\overrightarrow{AB}$.	À tout point C du plan, on associe par la translation qui transforme A en B, l'unique point D tel que [AD] et [BC] ont même milieu.
Coordonnées d'un vecteur dans un repère. Somme de deux vecteurs.	• Calculer les coordonnées de la somme de deux vecteurs dans un repère.	La somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur associé à la translation résultant de l'enchaînement des translations de vecteur $\vec{u}$ et de vecteur $\vec{v}$.
Produit d'un vecteur par un nombre réel. Relation de Chasles	• Utiliser la notation $\lambda\vec{u}$ •établir la colinéarité de deux vecteurs. • Construire géométriquement la somme de deux vecteurs. •Caractériser alignement et parallélisme par la colinéarité de vecteurs.	Pour le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (a, b) dans un repère, le vecteur $\lambda\vec{u}$ est le vecteur de coordonnées (λa, λb) dans le même repère. Le vecteur $\lambda\vec{u}$ ainsi défini est indépendant du repère.

Examinons d'abord le problème suivant, pris dans un ouvrage pour la classe de seconde suivant l'ancien programme[29] : il s'agit de déterminer les coordonnées du point D défini par l'égalité vectorielle 4 $\overrightarrow{DO}$ + 3 $\overrightarrow{DB}$ = $\vec{0}$ connaissant les coordonnées des points A (3 ; 0) et B (0 ;4) dans un repère (O, I, J). La technique proposée par l'ouvrage (l'exercice est corrigé) est la suivante : exprimer le vecteur $\overrightarrow{OD}$ en fonction de vecteurs dont on connaît ou peut connaître les coordonnées. Ici on obtient : 4 $\overrightarrow{DO}$ + 3 $\overrightarrow{DB}$ = -4 $\overrightarrow{OD}$ + 3 ($\overrightarrow{DO}$ + $\overrightarrow{OB}$) = -4 $\overrightarrow{OD}$ - 3 $\overrightarrow{OD}$ + 3 $\overrightarrow{OB}$ = -7 $\overrightarrow{OD}$ + 3 $\overrightarrow{OB}$. L'égalité 4 $\overrightarrow{DO}$ + 3 $\overrightarrow{DB}$ = $\vec{0}$ est donc équivalente à 7 $\overrightarrow{OD}$ = 3 $\overrightarrow{OB}$, soit encore $\overrightarrow{OD}$ = $\frac{3}{7}$ $\overrightarrow{OB}$, ce qui donne les coordonnées de D (0 ; $\frac{12}{7}$). Les propriétés énoncées dans les questions sont ici utiles. Mais on peut procéder autrement. On note (x ; y) les coordonnées du point D ; $\overrightarrow{DO}$ a pour coordonnées ($-x$; $-y$) et $\overrightarrow{DB}$ pour coordonnées ($-x$; $4-y$). Le vecteur 4 $\overrightarrow{DO}$ + 3 $\overrightarrow{DB}$ a alors pour coordonnées ($-7x$; $12-4y$). Comme il est égal au vecteur nul, on obtient que x = 0 et que $12-4y=0$ soit encore $y=\frac{12}{7}$. Là, la technique est justifiée par la définition du produit d'un vecteur par un réel (le vecteur $k\vec{u}$, c'est de vecteur de coordonnées (kx ; ky)) et la propriété donnant les coordonnées de la somme de deux vecteurs.

Examinons maintenant le problème suivant, pris dans le même ouvrage mais non corrigé (exercice 38 page 257). On a un triangle ABC et on considère le point M défini par $\overrightarrow{AM}$ = 3 $\overrightarrow{AB}$ - 2 $\overrightarrow{AC}$. Il

29 Bouvier et al. *Math 2[de]*. Paris : Belin, 2000. page 248.

s'agit de montrer que $\overrightarrow{BM}$ peut s'exprimer uniquement à l'aide de $\overrightarrow{BC}$ et d'en conclure que les points M, B et C sont alignés.

Une première technique conduit à écrire : $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA} + (3\ \overrightarrow{AB} - 2\ \overrightarrow{AC}) = -\overrightarrow{AB} + 3\ \overrightarrow{AB} - 2\ \overrightarrow{AC} = 2\ \overrightarrow{AB} - 2\ \overrightarrow{AC} = 2(\ \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}) = 2\ \overrightarrow{CB} = -2\ \overrightarrow{BC}$. Toutes les propriétés évoquées sont utilisées pour mener à bien ce calcul.
Une deuxième technique consiste à exprimer les coordonnées des points dans un repère adapté à la configuration : le repère (A, B, C) ici. On obtient que A (0 ; 0), B(1 ; 0), C(0 ; 1) et M (3 ; -2). On exprime alors les coordonnées de $\overrightarrow{BM}$: on obtient (2 ; -2), puis les coordonnées de $\overrightarrow{BC}$ (-1 ; 1) et on obtient ainsi que $\overrightarrow{BM} = -2\ \overrightarrow{BC}$, ce qui prouve que les vecteurs sont colinéaires et donc que les points B, M et C sont alignés.

On voit donc que la systématisation de l'utilisation des coordonnées permet dans ces deux cas d'éviter le recours aux propriétés. Il faudrait bien entendu mettre cette assertion à l'épreuve d'un corpus de problèmes d'alignement et de colinéarité.

On ajoutera que, dans les deux cas, l'utilisation des propriétés va de pair avec l'utilisation de la relation de Chasles, tandis que leur évitement conduit à l'évitement de cette propriété. Cette remarque met en évidence un deuxième point à considérer : il s'agit d'examiner si les propriétés ne sont pas nécessitées par la fonctionnalisation d'un élément technologique qui, lui, figure au programme.

Exercice pour la semaine prochaine : Peut-on fonctionnaliser la relation de Chasles comme ***élément technologique*** sans avoir recours aux propriétés notées (1), (2), (3) par la question 2 ? Si oui, donner un spécimen de type de tâches et la technique correspondante dont la justification repose sur la relation de Chasles ; si non, donner un spécimen de type de tâches et expliciter la ou les propriétés indispensables à la fonctionnalisation de la relation de Chasles dans ce cas.

La question relative à la caractérisation analytique de la colinéarité est semblable, même si elle se présente un peu différemment. Il s'agit là d'examiner si l'introduction de la technique produite par ce résultat technologique est nécessaire. On examinera ici donc le type de tâches : montrer que deux vecteurs sont colinéaires, qui apparaît comme un ingrédient essentiel des techniques relatives à « montrer que trois points sont alignés » et « montrer que deux droites sont parallèles ».

On examinera d'abord ci-dessous des exercices, pris dans un ouvrage pour la classe de seconde[30] conforme au nouveau programme et qui donne la caractérisation analytique de la colinéarité, en mettant en œuvre les deux techniques.

Travail collectif dirigé

À suivre...

30 Réné Gauthier & Michel Poncy (Dir.). *Maths 2^de^*. Collection Indice. Paris : Bordas, 2009.

Dans le chapitre « Proportionnalité » en classe de 5e, les situations de proportionnalité se présentent le plus souvent sous forme de l'utilisation de tableau. Certains exercices proposent d'utiliser des graphiques. Peut-on utiliser un tableur pour faire remarquer l'alignement des points ? (Sans donner la propriété.) (ÈR, 5e, 18)

La considération des programmes de 5e et de 4e clarifie aisément cette question.

Voici d'abord ce que contient le programme de 5e :

Connaissances	Capacités	Commentaires
1.1. Proportionnalité Propriété de linéarité. Tableau de proportionnalité. Passage à l'unité ou « règle de trois ». Pourcentage. Échelle. [Thèmes de convergence]	- Compléter un tableau de nombres représentant une relation de proportionnalité, en particulier déterminer une quatrième proportionnelle. - Reconnaître si un tableau complet de nombres est ou non un tableau de proportionnalité. - Mettre en œuvre la proportionnalité dans les cas suivants : - comparer des proportions, - utiliser un pourcentage, - ** calculer un pourcentage,* - ** utiliser l'échelle d'une carte ou d'un dessin,* - *calculer l'échelle d'une carte ou d'un dessin,*	Le travail sur des tableaux de nombres sans lien avec un contexte doit occuper une place limitée. Les activités numériques et graphiques font le plus souvent appel à des situations mettant en relation deux grandeurs. Il est possible d'envisager, dans une formule, des variations d'une grandeur en fonction d'une autre grandeur mais toute définition de la notion de fonction est exclue. Les procédures utilisées pour traiter une situation de proportionnalité sont de même nature qu'en classe de sixième. L'usage du « produit en croix » est exclu en classe de cinquième. Pour les coefficients de proportionnalité ou les rapports de linéarité exprimés sous forme de quotient, on choisira des nombres qui évitent des difficultés techniques inutiles. En particulier les quotients de nombres décimaux ne sont pas exigibles. Un travail doit être conduit sur la comparaison relative d'effectifs dans des populations différentes ou de proportions dans un mélange. Il s'articule avec l'utilisation de l'écriture fractionnaire pour exprimer une proportion.

Voilà maintenant le programme de 4e :

Connaissances	Capacités	Commentaires
1.1 Utilisation de la proportionnalité Quatrième proportionnelle. Calculs faisant intervenir des pourcentages. [Thèmes de convergence]	- Déterminer une quatrième proportionnelle. *- Déterminer le pourcentage relatif à un caractère d'un groupe constitué de la réunion de deux groupes dont les effectifs et les pourcentages relatifs à ce caractère sont connus.*	Aux diverses procédures déjà étudiées s'ajoute le « produit en croix » qui doit être justifié. *Des situations issues de la vie courante ou des autres disciplines permettent de mettre en œuvre un coefficient de proportionnalité exprimé sous forme de pourcentage.* Dans le cadre du socle commun, utiliser l'échelle d'une carte pour calculer une distance, calculer un pourcentage deviennent exigibles.
1.2. Proportionnalité ** Représentations graphiques.* [Thèmes de convergence]	*-* Utiliser dans le plan muni d'un repère, la caractérisation de la proportionnalité par l'alignement de points avec l'origine.*	*Cette propriété caractéristique de la proportionnalité prépare l'association, en classe de troisième, de la proportionnalité à la fonction linéaire.*

Cela figure donc au programme de 4e et ce n'est pas un exigible du socle dans cette classe : il n'y a donc aucune raison de mettre en place sa rencontre en 5e...

Le paragraphe qui suit n’a pas été examiné en séance. Il est à étudier pour la prochaine séance.

3. Réalisation du moment technologico-théorique : le cas de la démonstration

Nous poursuivons ici le travail à propos de la réalisation du moment technologico-théorique en examinant plus particulièrement la question de démonstration, soit de la déduction d’un résultat de la théorie mathématique déjà élaborée. On supposera donc qu’une AER a été réalisée, qui a permis de faire émerger au moins une organisation mathématique ponctuelle : $(T / \tau / \theta /)$ pour laquelle le résultat θ a été avéré expérimentalement. Il s’agit maintenant de déduire le résultat de la théorie mathématique dont on dispose.

3.1. Un premier exemple : le théorème des milieux en classe de 4e

On reprendra ici la situation mise en place par un élève professeur dans une classe de 4e et que nous avions rencontrée par l’intermédiaire du forum des questions. Le problème suivant avait été donné aux élèves : On considère trois points non alignés, I, J et K. Est-il possible de construire un triangle dont ces points soient les milieux des côtés ?

L’étude de ce problème avait permis de faire émerger la technique suivante : on trace la parallèle à (IJ) passant par K ; le cercle de centre K et de rayon IJ coupe cette droite en deux sommets du triangle, B et C. l’intersection des droites BI et CJ donne ensuite le point A, technique produite par le théorème des milieux, dont on donne ci-après une formulation volontairement discursive et dont on suppose qu’il a été avéré expérimentalement : dans un triangle ABC, la droite joignant le milieu de deux côtés est parallèle au 3e coté et le segment d’extrémité ces deux milieux a pour longueur la moitié de la longueur du 3e côté.

Supposons maintenant qu’il s’agisse de le déduire de la théorie géométrique disponible. On a à déduire à propos de la configuration suivante deux assertions : $IJ = \frac{1}{2} BC$ et (IJ) est parallèle à (BC). (QC0 : que doit-on déduire ?) On est donc face à deux types de tâches : Déterminer que deux longueurs sont égales et démontrer que deux droites sont parallèles. (QC 1 : comment montrer que deux longueurs sont égales ? Comment montrer que deux droites sont parallèles ?)

Ces types de tâches ont été travaillés et les élèves disposent pour cela d’une technique « routinière » qui repose sur le parallélogramme. (QC2 : quel quadrilatère considérer pour que, si on montre que c’est un parallélogramme, on ait la conclusion ?) il est probable que, compte tenu de la figure, les premières propositions soient de s’intéresser au quadrilatère IJKB ou au quadrilatère IJCK. (QC3 : Comment montrer qu’un quadrilatère est un parallélogramme ?)

En ce point, les choses se compliquent, parce qu’aucune des voies directes pour montrer que IJCK ou IJKB est un parallélogramme n’aboutit, et il faut faire appel à un quadrilatère AICL où L est le symétrique de I par rapport à J. C’est là que la ***constitution du milieu*** va s’avérer un point essentiel. En effet, on peut faire appel à la mémoire de la classe parce qu’un problème du même type a été étudié : on a déjà rencontré au moins un cas où on a eu à montrer qu’un quadrilatère était un parallélogramme en faisant intervenir (et apparaître) un autre quadrilatère, et on l’a enregistré dans la synthèse. Comment faire apparaître un parallélogramme ? soit par ses côtés, en construisant des parallèles à des segments existants, soit par ses diagonales, en construisant des symétriques de points, soit encore par symétrie axiale, etc. La voie des diagonales est ici une voie qui permet d’aboutir.

Le professeur peut également avoir posé comme exercice dans le test d’entrée l’exercice suivant :

On considère un triangle ABC, I le milieu de [AB] et J le milieu de [AC]. Faire une figure et construire le point L, symétrique de J par rapport à I. Montrer que le quadrilatère ALCI est un parallélogramme. En déduire que le quadrilatère BILC est un parallélogramme.

Si ça n'est pas le cas, il faudra ***enrichir le milieu*** au moment où le problème est rencontré, le professeur apportant dans le milieu les éléments nécessaires par des questions qui, si elles limitent le topos des élèves, permettront de faire aboutir le travail déductif, la première de ces questions pouvant être par exemple : Est-ce qu'on pourrait ajouter un point qui, avec trois points de la figure, donnent un parallélogramme ?

À suivre...

Prochaine séance le mardi 23 mars 2009

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2009-2010

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 20 : mardi 23 mars 2010

Programme de la séance. 1. Observation, analyse & évaluation : l'algèbre en 4^e // 2. Réalisation du moment technologico-théorique : le cas de la démonstration // 3. Forum des questions // 4. Notice Questions & Réponses

1. Évaluation et développement : calcul littéral en 4^e

Nous reprendrons ici l'évaluation et le développement de la séance sur le calcul littéral en 4^e. Nous en rappellerons d'abord quelques éléments avant de reprendre le travail sur la deuxième partie de la séance.

1.1. *Structure et contenu de la séance*

La séance observée se situe dans l'étude du domaine « Nombres et calcul », et plus précisément du secteur du « calcul littéral » en classe de 4^e. Elle participe de l'étude du thème « Développement » de ce secteur, dont on trouvera ci-dessous un extrait du programme de la classe.

2. Nombres et calculs
La résolution de problèmes (issus de la géométrie, de la gestion de données, des autres disciplines, de la vie courante) constitue l'objectif fondamental de cette partie du programme. Elle nourrit les activités, tant dans le domaine numérique que dans le domaine littéral. Les exercices de technique pure ne sont pas à privilégier.
(…)
Le calcul littéral qui a fait l'objet d'une première approche en classe de cinquième, par le biais de la transformation d'écritures, se développe en classe de quatrième, en veillant à ce que les élèves donnent du sens aux activités entreprises dans ce cadre, en particulier par l'utilisation de formules issues des sciences et de la technologie.

Contenus	Compétences	Exemples d'activité, commentaires
2.2. Calcul littéral Développement	– Calculer la valeur d'une expression littérale en donnant aux variables des valeurs numériques.	L'apprentissage du calcul littéral doit être conduit très progressivement à partir de situations qui permettent aux élèves de donner du sens à ce type de calcul. L'intégration des lettres et des nombres relatifs dans les expressions algébriques représente une difficulté importante qui doit être prise en compte. À cette occasion, le test d'une égalité par substitution de valeurs numériques aux lettres prend tout son intérêt. Le travail proposé s'articule autour de trois axes

	– Réduire une expression littérale à une variable, du type : $3x$ - $(4x$ - $2)$, $2x^2$ - $3x + x^2$. (…)	– utilisation d'expressions littérales donnant lieu à des calculs numériques ; – utilisation du calcul littéral pour la mise en équation et la résolution de problèmes divers ; – utilisation du calcul littéral pour prouver un résultat général (en particulier en arithmétique). La transformation d'une expression littérale s'appuie nécessairement sur la reconnaissance de sa structure (somme, produit) et l'identification des termes ou des facteurs qui y figurent. L'attention de l'élève sera attirée sur les formes réduites visées du type $ax+b$ ou $ax^2 +bx+c$. Les situations proposées doivent exclure tout type de virtuosité et répondre à chaque fois à un objectif précis (résolution d'une équation, gestion d'un calcul numérique, établissement d'un résultat général). En particulier, les expressions à plusieurs variables introduites a priori sont évitées. (…)

La séance se compose de 4 épisodes de longueurs inégales.

Après une entrée en classe structurée, la classe commence par faire un bilan du travail de la séance ayant eu lieu le matin, travail qui portait sur l'évaluation, en utilisant un tableur, d'un programme de calcul. On en vient ensuite à une activité dont le travail comprend deux épisodes : le premier où les élèves ont à calculer la valeur d'un programme de calcul, une mise en commun des résultats amenant à conjecturer qu'il donne le double du nombre de départ ; puis le second où les élèves travaillent par équipes à conjecturer une autre expression de programmes de calcul, avec une utilisation du tableur, ce travail étant mis en commun à la fin de la séance.
La séance se termine, après la sonnerie, par la donnée du travail à faire hors classe.

2. Analyse
Les deux premiers épisodes participent alors de la première rencontre avec le type de tâches « réduire une expression littérale à une variable », par l'intermédiaire de la rencontre avec le type de tâches T : « Déterminer un programme de calcul “plus simple” équivalent à un programme de calcul donné ».

La première rencontre a véritablement lieu quand le professeur annonce :
P : « On arrive à un programme de calcul équivalent au programme de calcul compliqué... » Un élève : « On peut compresser ! » P : « Voilà. Compresser, réduire...

C'est le type de tâches T' : « exécuter un programme de calcul » qui est central dans ces épisodes. T' est considéré ici comme routinier, cela étant d'abord légitimé par le fait qu'il figure au programme de la classe de 5[e], comme en témoigne l'extrait suivant :

Contenu
Enchaînement d'opérations

Capacités
Effectuer une succession d'opérations donnée sous diverses formes (par calcul mental, posé ou instrumenté), uniquement sur des exemples numériques.
Effectuer une succession d'opérations donnée sous diverses formes (par calcul mental, posé ou instrumenté), uniquement sur des exemples numériques.
Commentaires
(...)
L'ambiguïté introduite par la lecture courante, comme par exemple « 3 multiplié par 18 plus 5 » pour 3 ネ (18 + 5), pour l'auditeur qui n'a pas l'écriture sous les yeux, conduit à privilégier l'utilisation du vocabulaire et de la syntaxe appropriés, par exemple : « le produit de 3 par la somme de 18 et de 5 ». C'est l'occasion de faire fonctionner le vocabulaire associé : terme d'une somme, facteur d'un produit

Cela est confirmé par le rappel du travail réalisé lors de la séance précédente, effectué au début de la séance, qui permet de constituer une partie du milieu nécessaire à la réalisation de l'émergence de l'OMP relative à T. On a donc là un moment de travail de l'OMP relative à T', qui permet de préparer et d'aboutir à la réalisation du moment de première rencontre avec T (et, plus tard, du moment exploratoire).
La professeure fait vivre aux élèves la situation suivante : « un programme de calcul ayant été exécuté à partir d'un nombre donné, déterminer ce nombre à partir de la donnée du résultat », le rôle des élèves étant le choix du nombre, l'exécution du programme de calcul avec le secours de la calculatrice et la communication du résultat, tandis que le professeur doit deviner le nombre dont chacun est parti.
La professeure mène le travail oralement : le programme de calcul est annoncé oralement, les élèves devant l'exécuter au fur et à mesure ; la mise en commun est également pour l'essentiel orale ; le professeur note à la fin le début du programme de calcul et son expression réduite pour faire apparaître T.

Évaluation
On peut noter d'abord une problématisation correcte des OM étudiées, avec la mise en scène de l'une des raisons d'être de l'algèbre élémentaire qui laisse a priori du *topos* aux élèves.
Cependant ce *topos* est de fait limité par l'absence d'écrits explicitée plus haut, tant dans la donnée du programme de calcul que dans son exécution puis sa mise en commun, notamment parce que les élèves n'ont alors pas assez de *milieu* pour contrôler le calcul qu'ils effectuent, ce qui est vraisemblablement la principale source des erreurs de calculs rencontrées, ou encore qu'ils ne peuvent pas véritablement travailler sur les résultats de l'exécution du programme de calcul pour au moins contrôler le travail effectué par P.
Il en va de même dans le moment de première rencontre avec T, où l'écriture complète de l'équivalence des deux programmes de calculs aurait donné davantage de milieu à la collectivité pour faire émerger T. À cet égard, le bruit relevé dans le compte rendu et que l'on observe dans l'enregistrement vidéo est d'abord un symptôme du manque de milieu, et donc de topos, des élèves.

Venons-en à la deuxième partie de la séance. Le travail de la classe est réparti en plusieurs groupes, avec un ordinateur par groupe, et chaque groupe a une tâche assignée différente (trois programmes de calcul au total). À partir d'un problème de calcul d'une grandeur géométrique, chaque groupe doit écrire un programme de calcul puis en conjecturer une simplification d'écriture, autrement dit un programme équivalent mais *a priori* plus rapide à exécuter.

Visionnage d'extraits vidéo

Commentaires

On trouvera ci-dessous une synthèse des principaux éléments abordés en séance.

1. Le principal moment de l'étude de cette organisation mathématique ponctuelle est le moment exploratoire. Le travail de la classe est réparti en plusieurs groupes, avec un ordinateur par groupe, ce qui va permettre les échanges entre les élèves et un travail en autonomie (le temps accordé à ce travail en autonomie étant assez long). Chaque groupe a une tâche assignée différente (trois programmes de calcul au total). À partir d'un problème de calcul de grandeur géométrique, chaque groupe doit écrire un programme de calcul puis en conjecturer une simplification d'écriture, autrement dit un programme équivalent mais a priori plus rapide : P veut faire émerger les règles de calcul littéral, la simplification d'une expression mathématique. Après une première période de recherche en autonomie (environ 8 min), P s'appuie sur la conjecture d'un groupe à propos du premier problème pour expliciter à nouveau le travail à effectuer. P surveille globalement la classe et son travail tout en circulant de groupe en groupe afin de guider les élèves dans leur recherche s'ils rencontrent un problème. En général, ils arrivent à un résultat pertinent en calculant quelques valeurs, le plus souvent en utilisant une calculatrice, même si on peut observer quelques difficultés : pour le deuxième problème, un groupe aboutit à $3x + 2x = 5x$, et ne gère pas le 7 ; pour le troisième problème, un groupe obtient $10 \times x \times x$ et il faut un peu d'interaction avec P pour aboutir à $10x^2$.
Une fois la conjecture faite, les élèves expérimentent leur hypothèse avec le tableur du logiciel Star Office. Certains groupes ne maîtrisent pas bien le logiciel : on voit des élèves ne pas arriver à recopier vers le bas, d'autres écrire la formule à recopier avec x. P organise une mise en commun et écrit au tableau les résultats obtenus, et demande aux élèves qui n'ont pas encore effectué la vérification de le faire. Elle donne une aide au tableau en expliquant qu'il s'agit de mettre x dans la première colonne, puis $3 \times 2x$ dans le seconde etc.

2. Le dispositif didactique prévu par P pour la réalisation du moment exploratoire permet que les élèves aient un *topos* effectif pour l'un des programmes de calculs : ils ont à effectuer une conjecture et à la vérifier. Ce *topos* est cependant réduit par le fait du découpage a priori en questions de l'activité. P aurait pu faire découper les questions aux élèves par un jeu de questions cruciales, ce qui aurait également permis d'améliorer la dévolution de l'activité et surtout d'impulser davantage de rythme à l'avancée du temps de l'étude.

3. L'occupation de ce *topos* est permis par la mise à disposition d'un milieu *a priori* adéquat (OMP « exécuter un programme de calcul » ; disponibilité d'outils de calcul – tableur, calculatrice). On remarquera que du point de vue de la disponibilité des outils de calculs, P gère assez bien le fait qu'il n'y a pas beaucoup d'ordinateurs en mettant les élèves en groupes avec un ordinateur par groupe. Cependant, ce milieu n'est pas assez développé du point de vue de l'utilisation du tableur : on voit en effet certains groupes avoir des difficultés qui auraient pu être atténuées par un bilan écrit du travail effectué lors de la séance précédente, ou au moins la réalisation des gestes sur un ordinateur relié à un vidéoprojecteur, alors que P fait réaliser ce bilan oralement ou encore à la fin de l'activité par une demande de description de la technique qui permettrait de vérifier l'équivalence des deux programmes de calculs.

4. Le *topos* prévu est réduit lors de la mise en commun, la professeure ne se donnant pas les moyens de montrer la vérification de la conjecture puisqu'elle ne relève pas les résultats numériques obtenus par les groupes, qu'elle ne renvoie pas systématiquement à la classe la question de la validité des conjectures émises par les groupes, mais qu'elle travaille avec le groupe qui émet la conjecture et qu'elle empiète également sur le topos des élèves en le faisant elle-même sur la dernière égalité. Dans cette perspective, on notera que le travail algébrique fait par P en interaction avec un groupe à la fin de la séance à propos du 3^{e} programme de calcul, sans doute sous la pression du temps, nuit également au *topos* des élèves parce que cela leur ôte une partie du milieu nécessaire à l'élaboration

des éléments technologiques.

5. Si le fait de donner un spécimen différent à des groupes permet d'enrichir la base expérimentale dont on disposera, la nature des programmes de calcul donnés est ici un peu déséquilibrée ce qui conduit certains groupes chargés du premier programme à se dissiper, d'autres chargés du troisième programme à avoir du mal à avancer. Homogénéiser le travail donné à chaque groupe du point de vue de la difficulté peut contribuer à améliorer le *topos* des élèves : on pourrait par exemple donner à tous les élèves un programme du type $a \times bx$ (en faisant varier les coefficients a et b) et un programme plus complexe. On notera que cela permettrait de réduire la différence d'avancée entre les groupes et que la mise en commun à partir du premier programme permettrait d'enrichir le milieu en rendant disponible une technique de vérification de l'équivalence des programmes de calculs sur laquelle s'appuyer pour les programmes plus complexes.

2. Réalisation du moment technologico-théorique : le cas de la démonstration

Nous poursuivons ici le travail à propos de la réalisation du moment technologico-théorique en examinant plus particulièrement la question de démonstration, soit de la déduction d'un résultat de la théorie mathématique déjà élaborée. On supposera donc qu'une AER a été réalisée, qui a permis de faire émerger au moins une organisation mathématique ponctuelle : (T / τ / θ /) pour laquelle le résultat θ a été avéré expérimentalement. Il s'agit maintenant de déduire le résultat de la théorie mathématique dont on dispose. Un premier exemple figurait dans les notes de la séance précédente du séminaire.

2.1. Un premier exemple : le théorème des milieux en classe de 4e
On reprendra ici la situation mise en place par un élève professeur dans une classe de 4e et que nous avions rencontrée par l'intermédiaire du forum des questions. Le problème suivant avait été donné aux élèves : On considère trois points non alignés, I, J et K. Est-il possible de construire un triangle dont ces points soient les milieux des côtés ?
L'étude de ce problème avait permis de faire émerger la technique suivante : on trace la parallèle à (IJ) passant par K ; le cercle de centre K et de rayon IJ coupe cette droite en deux sommets du triangle, B et C. l'intersection des droites BI et CJ donne ensuite le point A, technique produite par le théorème des milieux, dont on donne ci-après une formulation volontairement discursive et dont on suppose qu'il a été avéré expérimentalement : dans un triangle ABC, la droite joignant le milieu de deux côtés est parallèle au 3e coté et le segment d'extrémité ces deux milieux a pour longueur la moitié de la longueur du 3e côté.

Supposons maintenant qu'il s'agisse de le déduire de la théorie géométrique disponible. On a à déduire à propos de la configuration suivante deux assertions : $IJ = \frac{1}{2}BC$ et (IJ) est parallèle à (BC). (QC0 : que doit-on déduire ?) On est donc face à deux types de tâches : Déterminer que deux longueurs sont égales et démontrer que deux droites sont parallèles. (QC 1 : comment montrer que deux longueurs sont égales ? Comment montrer que deux droites sont parallèles ?)
Ces types de tâches ont été travaillés et les élèves disposent pour cela d'une technique « routinière » qui repose sur le parallélogramme. (QC2 : quel quadrilatère considérer pour que, si on montre que c'est un parallélogramme, on ait la conclusion ?) il est probable que, compte tenu de la figure, les premières propositions soient de s'intéresser au quadrilatère IJKB ou au quadrilatère IJCK. (QC3 : Comment montrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme ?)
En ce point, les choses se compliquent, parce qu'aucune des voies directes pour montrer que IJCK ou IJKB est un parallélogramme n'aboutit, et il faut faire appel à un quadrilatère AICL où L est le

symétrique de I par rapport à J. C'est là que la ***constitution du milieu*** va s'avérer un point essentiel. En effet, on peut faire appel à la mémoire de la classe parce qu'un problème du même type a été étudié : on a déjà rencontré au moins un cas où on a eu à montrer qu'un quadrilatère était un parallélogramme en faisant intervenir (et apparaître) un autre quadrilatère, et on l'a enregistré dans la synthèse. Comment faire apparaître un parallélogramme ? soit par ses côtés, en construisant des parallèles à des segments existants, soit par ses diagonales, en construisant des symétriques de points, soit encore par symétrie axiale, etc. La voie des diagonales est ici une voie qui permet d'aboutir.
Le professeur peut également avoir posé comme exercice dans le test d'entrée l'exercice suivant :

On considère un triangle ABC, I le milieu de [AB] et J le milieu de [AC]. Faire une figure et construire le point L, symétrique de J par rapport à I. Montrer que le quadrilatère ALCI est un parallélogramme. En déduire que le quadrilatère BILC est un parallélogramme.

Si ça n'est pas le cas, il faudra ***enrichir le milieu*** au moment où le problème est rencontré, le professeur apportant dans le milieu les éléments nécessaires par des questions qui, si elles limitent le topos des élèves, permettront de faire aboutir le travail déductif, la première de ces questions pouvant être par exemple : Est-ce qu'on pourrait ajouter un point qui, avec trois points de la figure, donnent un parallélogramme ?

Nous examinerons un second exemple à partir d'un compte rendu d'observation d'une séance en classe de seconde sur l'alignement des points qui a pris place à la fin du mois de janvier 2009, dans le cadre de l'ancien programme de seconde donc – ce qui ne change pas grand chose ici.

2.2. Un deuxième exemple : l'alignement des points en seconde

Le professeur fait une synthèse relative à un thème qu'il a intitulé « Vecteurs et équations de droites ». Le travail sur les vecteurs et les repères dans le plan a déjà eu lieu et a donné lieu à une synthèse. Il s'agit là donc de synthétiser le travail mené sur les équations de droites. Dans son travail sur l'alignement, P est parti de la poursuite d'une AER effectuée à propos des vecteurs, où il s'agissait de « caractériser l'alignement de points dont on connaît les coordonnées ». Une des « techniques proposées » par des élèves lors du travail sur les vecteurs était la suivante :

$$\left.\begin{array}{ll} \mathrm{A}\,(7\,;\,3) & 7 = 3\times 2+1 \\ \mathrm{B}\,(13\,;\,6) & 13 = 6\times 2+1 \\ \mathrm{C}\,(28\,;\,14) & 28 = 14\times 2+0 \neq 14\times 2+1 \\ \mathrm{D}\,(17\,;\,8) & 17 = 8\times 2+1 \\ \mathrm{E}\,(25\,;\,12) & 25 = 12\times 2+1 \end{array}\right\}\ \begin{array}{l}\text{A, B, D et E alignés ;}\\ \quad\text{C non alignés avec les autres.}\end{array}$$

Elle avait été laissée de côté dans le travail précédent, le professeur avait annoncé qu'elle serait reprise plus tard. Il s'agissait donc « d'éprouver cette technique sur les autres points de l'AER ». Dans la première partie de la séance, la classe a travaillé sur le problème suivant : Quelle relation existe-t-il entre A(0; 2), B(2; 5) et M(x, y) pour que les points A, B et M soient alignés ? Qui a été posé pour étudier la question : « si j'ai deux points donnés par leurs coordonnées, quelle relation existe-t-il entre l'abscisse et l'ordonnée des points qui leurs sont alignés ? » C'est à l'issue de cette étude que survient la synthèse.

Pour faciliter le commentaire, nous scinderons la synthèse en épisodes. Voici le premier.

L'enregistrement démarre environ un quart d'heure après le début de la séance.

- (P) Bon, ça a l'air de marcher... Donc... C'est bon ?... Ke, tu es enregistré, là... Alors, on va faire le « grand 3 »... Qu'est-ce qu'on va y mettre dans ce « grand 3 » ? Qu'est-ce qu'on a vu entre samedi et aujourd'hui ? Et le bilan qu'on a fait aujourd'hui ?
- (élève) Début samedi ou fin samedi ? Parce qu'il s'est passé des trucs entre le début et la fin.
- (P) C'est vrai. Mais qu'est-ce que t'as retenu ?
- (élève) Qu'il y avait une relation entre x et y pour trouver quand c'était colinéaire, euh, alignés.
- (P) Quand les points étaient alignés, d'accord.
- (élève) Cette formule que Ni avait donnée...
- (P) Ensuite, qu'est-ce qu'on a vu d'autre ?
- (élève) La colinéarité on l'avait vue avant, non ?
- (P) Oui, la colinéarité on l'avait vue avant.
- (élève) Donc, on peut pas le dire.
- (élève) Euh, l'alignement des... enfin deux droites parallèles... quand on a fait l'exercice.
- (P) Ça c'était la correction de samedi, oui.
- (élève) Ah ben, c'était samedi, hein.
- (P) C'est vrai... On a vu les équations de droites. Les équations de droites, elles sont de quelle forme ?
- (élève) $y = ax + b$.
- (P) OK. En tout cas, on l'a observé sur un cas. Est-ce qu'il y a que celle-là ? Est-ce qu'il y a que la forme $y = ax + b$?
- (élève) Non.
- (P) Non ?
- (élève) $x = a$ ou b.
- (élève) Ou n.
- (P) x égale un nombre, une constante. Me ?
- (Me) $y = ax$.
- (P) C'est possible aussi ça. Mais en fait, c'est la même forme que $ax + b$. Quand on a $y = ax$, c'est que b est égal à ?
- (élève) Zéro. C'est que ça passe par l'origine.
- (P) A zéro. D'accord ? On en a vu une aussi... y est égal à 12, mais ça c'est quoi qui est égal à 0 ? Dans ce cas-là ?... C'est petit a. Donc « grand 3 », équation de droites... Comment ?
- (élève) En fait, on l'a pas vue venir la fonction.
- (P) J'ai pas encore prononcé le mot « fonction ».
- (élève) Ah oui, mais ça va pas tarder, là, il y a le coefficient directeur...

P note le titre au tableau.

- (élève) Normalement... On sait jamais si il y a un « s » à droite ou pas.
- (élève) Y en a pas.
- (P) Ah bon ?
- (élève) On avait un prof qui était très sévère sur l'orthographe.
- (élève) En fait, ça dépend des professeurs parce qu'il y en a qui comptent juste.
- (P) Alors, « Propriétés »... Alors, comment on va dire ça ? Cette propriété où on va présenter les équations de droites. Comment le rédiger ?
- (élève) A, B et C sont alignés si...
- (P) Non, équation de droites. On va uniquement travailler avec deux points peut-être...
- (élève) Avec deux points ?
- (P) Ou même pas. D'après vous, qu'est-ce qu'on peut dire sur les équations de droites. On va dire quoi ? Qu'est-ce qui est important ? Qu'est-ce qu'on a retenu ?
- (élève) Il y a plusieurs formes.

- (P) Oui, il peut y avoir plusieurs formes. Et les deux formes que tu as retenu, c'est ?
- (élève) x égale constante et $y = ax + b$.
- (P) Allez, ok. (*P dicte et note au tableau*) Dans un repère, toute droite Δ du plan admet une équation de la forme, première possibilité $x = c$, une constante... Alors, et ça, ces droites-là, elles sont comment ?
- (élève) Parallèles.
- (P) Parallèles avec l'axe des ordonnées. (*P reprend la dictée*) ...si Δ est parallèle à l'axe des ordonnés. Et l'autre, c'est y... L'autre forme, c'est $y = ax + b$, avec bien sûr des constantes qui sont des nombres fixés. Et là, c'est dans quels cas ?
- (élève) Les droites sécantes à l'axe des ordonnées.
- (P) Très bien. (*P reprend la dictée*) ...si Δ est sécante à l'axe des ordonnées.
- (élève) C'est a qui dit où elle coupe après... ?
- (élève) Non, c'est b, raté !
- (élève) C'est a ou b ?
- (P) C'est une bonne question, tiens.
- (élève) C'est b!
- (P) Et pourquoi c'est b ? Pourquoi ça serait a ?
- (élève) Je sais pas, je demande.
- (élève) C'est l'ordonnée à l'origine.
- (P) L'ordonnée à l'origine. Et pourquoi ça ? On n'en a pas parlé...
- (élève) Non, c'est pour ça que je pose la question.
- (P) Vous l'avez vu l'année dernière ou...
- (élève) Oui, mais c'est loin.

Commentaires **–** On voit P procéder en questionnant les élèves sur ce qui a été vu précédemment, et piloter le travail de façon à ce que la classe ne s'enlise pas. Par exemple, au début, les élèves se rappellent la relation entre x et y donnée par l'un de leurs camarades, sans identifier les équations de droites et c'est P qui les nomme, avant de reprendre le questionnement, qui devient à ce moment-là plus productif. On notera que l'on a là un effet d'une synthèse qui arrive un peu tôt, les élèves n'ayant pas encore tout à fait identifié la praxéologie enjeu de l'étude – ou du moins, ils ont clairement identifié le type de tâches « montrer que trois points sont alignés », mais la justification par les équations de droites est encore incertaine comme le souligne le passage en bleu ; pour le dire autrement, le moment technologico-théorique n'a sans doute pas été assez développé et la synthèse réalisée participe encore de ce moment de l'étude. Ce sont les élèves qui apportent l'essentiel du matériel qui va figurer dans la synthèse, même si P empiète sur leur *topos* en le mettant en forme de manière un peu directive. Il aurait pu noter les éléments pertinents au tableau (ce qu'il fait sans doute, même si on ne le décèle pas à l'enregistrement) et faire formuler les propriétés aux élèves, avant éventuellement de corriger leur formulation.

On notera que l'atmosphère de la classe semble sereine, avec des élèves au travail et participant volontiers à l'élaboration collective – signe que ce type de travail est routinier pour la classe.

Épisode 2

- (P) Bon alors... Je vous donne une définition, c'est que cette équation de droite, que ce soit l'une ou l'autre, on l'appelle l'équation réduite de la droite Δ. (*P dicte et note au tableau*) Cette équation est appelée l'équation réduite de la droite Δ. Première définition. Est-ce que vous savez comment on appelle le petit a ?
- (élève) Le coefficient directeur.

- (P) Le coefficient directeur. (*P dicte*) Petit *a* est le coefficient directeur et petit *b* est l'ordonnée à l'origine. C'est ça ?
- (élève) Oui.

- (P) Il faudra que je vérifie le programme de 3e, mais je suis surpris, là, vous en savez plus que... vous êtes censé savoir...
- (élève) Censé !...
- (élève) Mais y a des choses qu'on devrait savoir et qu'on connaît pas...
- (élève) Y a un équilibre.
- (P) Faut bien compenser...
- (Rires)
- (P) Et vous l'avez démontré l'année dernière ? Est-ce que vous avez fait la démonstration l'année dernière ?
- (élève) Ah ça, on sait pas !
- (élève) Non.
- (P) Allez, démonstration, alors... Ce qu'on a fait sur un exemple, on va le faire dans le cas général. On va prendre deux points A et B de coordonnées (x_A, y_A) et (x_B, y_B). Eux, c'est des points qui sont fixés, d'accord ? Et M de coordonnées (x, y). Lui, c'est un point dont on veut qu'il soit aligné avec A et B de façon à ce que ce soit... que ça décrive une droite. Qu'est-ce qu'on a fait tout à l'heure ? Pour l'exemple ? (*10 minutes*)
- (élève) Le vecteur.
- (P) Oui. Donc on a calculé quoi comme vecteur ? On a calculé les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AM}$. Alors, $\vec{AB}$, quelles sont ses coordonnées ?... Attention, tout est enregistré... J'ai pas entendu... Voilà : $(x_B - x_A, y_B - y_A)$... Et $\vec{AM}$, ses coordonnées ça va être quoi ?...(*P reprend ce que lui dicte une élève*) $(x - x_A, y - y_A)$...

Commentaires – Le travail se poursuit dans un dialogue entre P et la classe. On peut noter que les notions de coefficient directeur et d'ordonnée à l'origine apparaissent un peu prématurément, poussées par les interventions des élèves, sans que le travail effectué précédemment n'ait semble-t-il construit du sens pour ces deux notions. P engage la classe dans la démonstration et c'est lui qui effectue la première étape : choix des points A et B, fixés, et M, variable. Il fait ensuite appel à ce qui vient d'être fait sur un exemple, et qui constitue en quelque sorte un cas particulier du travail démonstratif. Les élèves retrouvent donc du *topos* en cette fin d'épisode. Un épisode du moment technologico-théorique s'engage donc ici, sans que sa nécessité – autre que « formelle » – ait été dévolue à la classe.

Épisode 3
Après un temps durant lequel les élèves notent, P reprend :
- (P) Je suis pas sûr d'avoir été clair. On est en train de chercher quoi, là ? A faire quoi ?... Me ?
- (Me) D'écrire que les points sont alignés sur une droite.
- (P) Oui, d'accord. De façon à obtenir quoi à la fin ?... L'équation de la droite (AB), d'accord ? Donc, on va écrire que M appartient à la droite (AB) si et seulement si ?
- (élève) Si et seulement si...
- (élève) $\vec{AM}$ et $\vec{AB}$ sont colinéaires.
- (P) Voilà, si et seulement si $\vec{AM}$ et $\vec{AB}$ sont colinéaires. C'est-à-dire, M appartient à (AB), c'est pareil de dire que A, B et M sont alignés, hein ? Y aucun souci.
- (élève) C'est qu'il est sur la droite.
- (P) (*en notant au tableau*) $\vec{AB}$ et $\vec{AM}$ sont colinéaires.
- (élève) On n'écrit pas $x_{\vec{AB}}$ fois $y_{\vec{AM}}$...

- (P) Exactement. Si et seulement si... Alors, la condition, vous commencez à la connaître... (*sous la dictée d'un élève*) $x_{\vec{AB}}$ fois $y_{\vec{AM}}$ est égal à $x_{\vec{AM}}$ fois $y_{\vec{AB}}$. Je remplace par ce que j'ai trouvé. $x_{\vec{AB}}$ c'est quoi ?
- (élève) $x_{\vec{AB}}$ c'est, euh..., $x_B - x_A$.
P poursuit le calcul sous la dictée des élèves : $(x_B - x_A)(y - y_A) = (x - x_A)(y_B - y_A)$.
- (élève) Pourquoi on a laissé x... Pourquoi on met pas x_M ?
- (P) Non mais, c'est simple la réponse. Pourquoi pour A et B j'ai mis x_A, y_A et x_B, y_B et pour M j'ai mis x et y ?
- (élève) Ah, parce que c'est le milieu, non ?
- (P) Non.
- (élève) C'est le résultat de...
- (P) C'est quoi la différence entre A, B et M, dans cette démonstration ?
- (élève) (AB) c'est une droite.
- (élève) A c'est un point défini...
- (P) Fixé, oui...
- (élève) Et M c'est tout point de la droite.
- (P) Voilà, c'est n'importe quel point de la droite. D'accord ?
- (élève) Ah, d'accord ! On généralise.
- (P) En fait, l'énoncé il nous donne... Nous quand on aura à déterminer l'équation d'une droite pour x_A et y_A on aura des valeurs. D'accord ? Pareil pour x_B et y_B puisque ce sont des points fixés. Par contre, on dira je prends un point M qui appartient à cette droite et j'écris des choses avec lui et le point M, il sera de coordonnées (x, y)... J'ai presque envie de dire que le point M il est mobile.
- (élève) Parce que c'est pas expérimental, c'est théorique.
- (P) Ah oui, là, on est dans le théorique. L'expérimental, on l'a bouclé samedi. Donc... Et maintenant, qu'est-ce qu'on sait faire quand on a ce genre de choses ?
- (élève) On développe.

Commentaires – P précise à nouveau la situation, de manière à ce que le type de tâches antérieurement travaillé « Montrer que 3 points sont alignés » soit clairement identifié, puis apparaît le fait que pour cela, on montre que les vecteurs sont colinéaires ce qui suppose que l'on écrive que la condition etc. On voit le travail effectué précédemment porter ses fruits et les élèves (du moins certains) investir le *topos* qui leur est offert. On notera surtout que la différence entre ce qui est de l'ordre de l'expérimental et de celui du théorique vit dans la classe, sert de justification aux notations de la démonstration et permet semble-t-il à un élève au moins de comprendre où se situe l'enjeu du travail mené. P aurait pu s'appuyer précédemment sur cette existence dans la classe de la distinction entre expérimental et théorique pour que l'épisode du moment technologico-théorique s'engage. Le fait qu'il ne le fasse pas donne du crédit à l'hypothèse que dans l'AER, le moment technologico-théorique a été insuffisamment développé – y compris du point de vue expérimental.

Épisode 4

- (P) On développe... Qui c'est qui le développe ? Vous savez le faire ça... Allez !
Sous la dictée d'un élève, aidée par d'autres lorsqu'il se trompe, le développement est réalisé, non sans mal : $x_B y - x_A y - x_B y_A + x_A y_A = xy_B - x_A y_B - xy_A + x_A y_A$
- (P) Je vais faire le calcul et je vais vous montrer qu'on arrive aux formes qu'on a voulu, d'accord ? Vous savez faire les calculs. Sauf que vous les calculs vous aurez à les faire comme tout à l'heure, c'est-à-dire dans le cas où on aura des valeurs. C'est un peu plus facile. Alors, regardez.

Là, je vais factoriser y. Alors ça fait $(x_B - x_A)$ facteur de y. Ça, je le garde ensemble...
- (élève) y_A, on peut pas le factoriser ?
- (P) Bien sûr qu'on peut le factoriser Ni, mais moi ce que je cherche à obtenir c'est cette forme-là ou celle-là. Donc, ce qui m'intéresse c'est d'isoler le y. Ce qui est intéressant de factoriser, c'est le y et le x. Le reste, ça va pas nous apporter grand'chose, d'accord ? Donc ça fait $-x_B y_A + x_A y_A$ égale... Là, je factorise par contre, le x. Alors le x pour le factoriser, j'ai quoi ? Là j'ai y_B et là j'ai y_A. Donc, ça fait $y_B - y_A$ facteur de x moins $x_A y_B$ plus $x_A y_A$. Ça, je peux le transposer en additionnant des deux côtés de l'égalité... (20 minutes)
- (élève) On le factorise pas le x_A et le...
- (P) Attendez, j'ai un problème de signe... Là, c'est un moins...
- (élève) On le factorise pas le x_A.
- (P) Non, c'est pas la peine. Attendez... Non, non, y a un souci là...
- (élève) On recommence...
- (P) Hop, hop hop, on se tait...
Le professeur réfléchit un long moment tandis que les élèves essaient de trouver l'erreur.
- (P) On a une erreur de signe et j'arrive pas à la voir.
- (élève) C'est pas à la deuxième ligne ?
- (élève) Non, c'est $x_A y_A$, normalement il est moins, après $x_B y_A$ plus $x_A y_A$ puisqu'il fait partie de l'autre côté...
- (élève) Quelle ligne ?
- (élève) A la deuxième. C'est pas la première partie, c'est la deuxième, quand on a factorisé.
- (P) Oui, oui, mais j'arrive pas à...
- (élève) Mais c'est pas au tout début quand il y a Fl qui a fait son calcul... Faudrait pas qu'il le refasse, mais dans l'ordre ?
- (élève) C'est pas Fl, c'est la deuxième partie.
- (élève) M'sieur, pourquoi on le refait pas dans l'ordre ?
- (élève) Pourquoi on recommencerait pas tout depuis le début ?
Le bruit augmente et la classe s'agite un peu.
- (P) Allez, s'il vous plaît... Je vais faire autrement en fait... On va faire comme ça.

Commentaires **–** Les élèves réalisent le développement et P se charge de la factorisation : la tâche continue à être coopérative. Les élèves développent sans anticiper le résultat qu'il s'agit de produire, ce que P laisse faire ; il se trouve à avoir à factoriser à nouveau l'expression, travail qu'il effectue pour obtenir l'expression $y(x_B - x_A) - x_B y_A + x_A y_A = x(y_B - y_A) - x_A y_B + x_A y_A$, où il croit déceler une erreur de signe [ce qui n'est pas le cas]. Après un moment de flottement, devant l'agitation de la classe, il prend la décision de changer de stratégie. On notera que la classe s'agite pour coopérer mais que, si le temps de flottement s'était prolongé, il y aurait eu un risque de dérapage.
P aurait pu choisir de vérifier le calcul effectué de plusieurs façons : avec un logiciel de calcul formel (la classe est équipée de casio classpad) ; en donnant des valeurs aux coordonnées de A et B et en calculant les deux expressions pour vérifier si elles étaient égales.
Il aurait pu également piloter davantage le développement par questions cruciales : par exemple, que veut-on obtenir ? Comment peut-on développer l'expression pour cela ? Etc.

Épisode 5

- (P) Allez, s'il vous plaît... Je vais faire autrement en fait... On va faire comme ça. Donc, on va éviter de développer comme ça, ça évitera les erreurs de calcul. Je vais diviser les deux côtés par ce nombre-là, c'est-à-dire par $x_B - x_A$. Donc, ça veut dire que $y - y_A$ c'est égal à $(x - x_A)(y_B - y_A)$, le tout sur $x_B - x_A$. Je manipule un peu. Je fais apparaître un nombre... $y - y_A$ égale $y_B - y_A$ sur $x_B - x_A$, le tout facteur de $x - x_A$.

Tableau : $$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$$

- (élève) En fait on a fait passer $x_B - x_A$ de l'autre côté de l'égalité...
- (P) J'aime pas qu'on dise comme ça, mais oui...
- (élève) Faut pas dire faire passer, mais diviser.
- (P) D'accord ?
- (élève) On a divisé de chaque côté par $x_B - x_A$...
- (P) Et maintenant, regardez ce qui apparaît. Je fais les deux en même temps. J'additionne à la fois y_A des deux côtés de l'égalité et ensuite, là je le développe. Donc ça veut dire que ça donne y est égal à $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ facteur de x plus $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ facteur de x_A... Attention, il y avait un moins, donc c'est moins ici... et plus y_A.

Tableau : $$y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}x - \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}x_A + y_A$$

- (P) Est-ce que j'ai obtenu ma forme ? Oui, regardez. Là, j'ai un nombre que je peux appeler petit a qui n'est pas fonction de x. Là, j'ai un nombre, c'est ni fonction de x ni de y, que je peux appeler petit b, d'accord ? Et donc je me retrouve avec quelque chose de la forme $y = ax$..., je vais prendre le moins dans le petit b...Y a une précaution qu'on a pas prise...Y a une précaution qu'on a pas prise... Comment ?
- (élève) *inaudible*
- (P) Non. Quand je suis passé de là à là, j'ai divisé par $x_B - x_A$. Dans quels cas j'ai le droit de diviser... par un nombre ?
- (élève) Que quand c'est une équation.
- (P) Non. Il y a une division qu'on peut pas faire, qu'on sait pas faire, c'est laquelle ? Qui n'existe pas ? Par zéro. Donc qu'est-ce qu'il faut veiller ici ?
- (élève) A ce que x soit non nul.
- (P) $x_B - x_A$ soit non nul, c'est-à-dire...
- (élève) Différent de zéro.
- (P) Que x_A et x_B ne soient pas... égaux. Donc, là on va marquer si x_A différent de x_B.
- (élève) Sinon, comment on pouvait l'écrire ? On marque réel avec la petite étoile ?... Pour dire qu'il est non nul.
- (P) Oui, sinon, on peut écrire que $x_B - x_A$ appartient à... Donc, qu'est-ce qu'il faut que je traite maintenant comme cas ? Si x_B égale x_A... Si x_B égale x_A, $x_B - x_A$ ça fait combien ? Zéro. Zéro fois $y - y_A$..., ça fait zéro. Donc ça veut dire qu'on se retrouve qu'avec ce côté de l'égalité.
- (élève) M'sieur ?
- (P) Oui.
- (élève) Vous pouvez noter les étapes de la... de l'équation. C'est-à-dire quand on a divisé par $x_B - x_A$ et après...
- (élève) Parce que je vois pas trop comment on a fait là...
- (élève) Mais si c'est facile.
- (élève) Pour isoler $x - x_A$.
- (P) Là, j'ai simplement écrit la même chose différemment.
- (élève) On a le droit de l'écrire comme ça ?
- (P) Bien sûr!
- (élève) Oui, mais c'est différent si on... C'est pas différent si on multiplie le résultat de la division ou si on multiplie tout par...

- (P) C'est pareil. Si tu écris... Regardez. Si j'ai a fois b sur c, j'ai le droit d'écrire que c'est par exemple b sur c le tout fois a. (30 minutes)
- (élève) D'accord.
- (élève) Et a sur c fois b c'est possible aussi ?
- (P) Aussi, oui. Comment je fais pour ? Ah celui-là, qu'est-ce que j'ai fait ? J'ai fait plus y_A, d'accord ? Et j'ai développé... Écoutez, vous le ferez par le calcul, vous, avec les valeurs.
- (élève) En contrôle, quand on aura une démonstration, faudra le faire avec des x et des A?
- (P) Non, vous aurez des valeurs pour x_A et... pour les coordonnées.
- (élève) Mais quand on démontre, on a le droit de prendre des valeurs comme ça ?
- (P) Quand on démontre, il faut qu'on le voie dans le cas général, donc il faut qu'on prenne pas des valeurs...
- (élève) Ouais, mais c'est pas beau...

Commentaires – On voit là que c'est P qui « prend la main », et qui fait le travail démonstratif. Le type de dialogue avec la classe change, celle-ci n'a plus véritablement prise sur le travail et la plupart des élèves cherchent semble-t-il à comprendre ce que fait le professeur plutôt que de véritablement intervenir dans le travail. Un symptôme du fait que ce qui se passe n'est plus dans le *topos* des élèves, c'est l'intervention d'un élève qui demande si il y aura ce type de choses à faire au contrôle, ce que P avait d'ailleurs anticipé en annonçant l'instant d'avant que les élèves auraient « à le faire avec des valeurs ».

Épisode 6

- (P) Donc, quand x_B égale x_A, ça, ça fait zéro. Je multiplie quelque chose par zéro, donc ça fait zéro. Ça fait zéro égale à ça. D'accord ? Maintenant, le produit des facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. Vous êtes d'accord ?
- (élève) Oui.
- (P) Donc ici, soit ça égale à zéro... Moi, je vous dis que celui-là peut pas être égal à zéro. On a déjà x_B qui est égal à x_A. Si y_B est égal à y_A, ça veut dire qu'on a le même point.
- (élève) Ah oui.
- (P) Donc, ce qu'il faut faire au départ, c'est prendre deux points distincts... Y en a un qui me gonfle depuis ce matin. Je trouve qu'il a des yeux bien fatigués pour un lundi matin...
Silence dans la classe.
- (P) Donc ça veut dire que $x-x_A$ est égal à zéro et donc que $x=x_A$. On a bien trouvé l'autre forme : x égale constante. Le type de tâches qu'on va avoir à faire c'est quoi ? Déterminer l'équation d'une droite.
P le note au tableau.
- (P) Pour déterminer l'équation d'une droite, on vous donnera... à partir de deux points... (*en complétant*) passant par $A(x_A, y_A)$ et B (x_B, y_B). Comment je vais faire pour déterminer cette équation de droite ?... Oui, alors, vas-y...
- (élève) (*inaudible*)
- (P) Dis-le clairement. On va calculer le vecteur $\vec{AB}$. On va calculer quoi ? (*Tout en le notant*) Les coordonnées de $\vec{AB}$... On prend un autre point. Ses coordonnées on va les écrire ? L'autre point ? (x, y). Et on va écrire que quoi ? Que... ? On écrit que $\vec{AB}$ et $\vec{AM}$ sont colinéaires. Exemple. Deux exemples, que vous allez faire, qu'on va faire dans le cours.
- (élève) M'sieur ?
- (P) Oui.
- (élève) On a trouvé où $x-x_A$, juste en-dessous de « si $x_B=x_A$ »?
- (P) Je l'ai effacé.

- (élève) Oui, mais c'était quoi l'équation ?
- (P) On avait...

A ce moment, la sonnerie marquant la fin de la séance retentit. P poursuit :

- (P) On avait $x_B - x_A = 0$ qui était multiplié par $y - y_A$ et zéro fois quelque chose ça fait zéro. Donc, j'ai pris qu'une partie de l'égalité, l'autre partie de l'égalité j'ai dit qu'elle était égale à zéro.
- (élève) D'accord.
- (P) On va faire deux exemples, en reprenant ce que vous aviez fait, pour voir si on retombe dessus. Donc, on va prendre l'exemple... On va chercher la droite passant par G de coordonnées (0; -1) et... Chut... Et H de coordonnées (2; 0). Donc déterminer l'équation de la droite passant par G et H. Et en deuxième exemple, on va faire celui où vous aviez la même ordonnée, je sais plus où c'est... Je l'invente... Par C de coordonnées (2; -4) et D de coordonnées (2; -6)... Pardon, la même abscisse, j'avais dit la même ordonnée... Là, on est en module. Donc, il y a la moitié de la classe qui y va et l'autre moitié, vous faites ça au brouillon.

Fin de la séance enregistrée. (38 min 59 s)

Commentaires – La fin de la séance donne à nouveau du *topos* aux élèves en identifiant le type de tâches qu'ils auront à effectuer, et la technique pour le faire. On notera cependant que P ne va pas utiliser le résultat technologique qu'il vient de démontrer pour produire la technique. Cela l'aurait conduit à mettre en place la technique suivante : si $x_A \neq x_B$, on calcule le coefficient directeur, *a*, qui est égal à $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$; puis on calcule l'ordonnée à l'origine, *b*, qui est égale à $y_A - ax_A$; si $x_A = x_B$, l'équation est $x = x_A$.

Plusieurs points sont à souligner ici.

La synthèse annoncée participe davantage de la réalisation du moment technologico-théorique que du travail d'institutionnalisation, et cela sans doute parce que le moment technologico-théorique n'a pas été suffisamment développé dans l'AER. En effet, le travail exploratoire effectué a conduit les élèves à repérer que, pour montrer qu'un point est aligné avec deux autres, alors ce point vérifie une certaine relation. Mais ils n'ont pas encore véritablement caractérisé le type de relation : il aurait sans doute fallu débuter le travail par cette étape, après avoir effectué encore un ou deux spécimens du types de tâches, en posant la question : à quelles conditions un point M(*x*, *y*) est-il aligné avec les points A et B de coordonnées données ?

Cet épisode du moment technologico-théorique ne prend pas suffisamment appui sur le milieu que P s'est rendu disponible, mais il est vrai que celui-ci était sans doute encore un peu fragile parce que l'environnement technologico-théorique n'a pas véritablement été dégagé dans la partie expérimentale.

Le travail déductif mis en place ne prend pas assez appui sur des questions cruciales. On pourrait ici envisager, à partir du moment où l'on a formulé la propriété, le réseau de questions suivantes :

Que s'agit-il de montrer ?

Que les points d'une droite Δ ont leur coordonnées qui vérifient une équation du type $x = c$ ou $y = ax + b$.

Comment va-t-on exprimer que des points appartiennent à la droite Δ ? Comment va-t-on se donner cette droite ?

Comment exprimer qu'un point M est aligné avec les points A et B fixés ?

Comment exprimer la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$?

Comment transformer l'expression $(x_B - x_A)(y - y_A) = (x - x_A)(y_B - y_A)$? Que doit-on déduire ?

Comment obtenir y ?
Peut-on toujours diviser par $(x_B - x_A)$?
Dans le cas où on peut diviser par $(x_B - x_A)$, qu'obtient-on comme expression ? Etc.

3. Forum des questions

Raisons d'être...

Lorsque j'étais élève, on n'entendait parlait que de fractions et non de nombres en écriture fractionnaire. Quel est l'intérêt d'une telle distinction ? Ne peut-on pas considérer que l'on peut prendre la fraction de n'importe quel nombre (entier, décimal, rationnel,...) ? (JA, 19)

Voici ce qu'on peut lire dans les notes du séminaire 2001-2002 à propos d'une question relative au même sujet :

Écritures fractionnaires en 4^e^

Doit-on parler de la « fraction » $\frac{2}{3}$ ou de « l'écriture fractionnaire » $\frac{2}{3}$ en classe de 4^e^ ? Il me semble que l'on parle de fraction lorsque numérateur et dénominateur sont des entiers (non nul pour le dénominateur), et le terme « écriture fractionnaire » est réservé aux quotients de décimaux (non nuls). Cette distinction ne semble pas aussi nette dans les programmes ni chez les collègues. Qu'en est-il exactement ? (4^e^, 7)

Matériaux pour une réponse

1. Les programmes et les documents qui les accompagnent parlent d'***écriture fractionnaire*** (ou, moins souvent, de ***forme*** fractionnaire), d'une part, de ***fractions***, d'autre part. Ce dernier vocable semble bien renvoyer au cas des fractions ***d'entiers***, au moins dans certains contextes, comme dans l'expression « fraction irréductible ». Mais l'emploi du mot peut renvoyer aussi à des écritures fractionnaires qui, clairement, ne sont pas des fractions d'entiers ! C'est ainsi qu'on lit dans le document d'accompagnement du programme de 3^e^ :

Autrefois, les machines ne permettaient que du calcul approché dans certains cas (fractions non décimales, radicaux par exemple), mais aujourd'hui, les logiciels de calcul formel sont accessibles désormais aux collégiens dans certaines calculatrices de poche.

Lorsque les textes officiels désirent parler plus précisément de fractions d'entiers, c'est l'expression de ***quotient d'entiers*** qui est employée, comme dans l'extrait du programme de 3^e^ ci-après :

On s'intéressera particulièrement au problème suivant : étant donné deux points A et B, construire les points C de la droite (AB) sachant que le rapport $\frac{CA}{CB}$ a une valeur donnée sous forme de quotient d'entiers.

Semblablement, le document d'accompagnement du programme de 6^e^ comporte l'observation suivante :

Dès la classe de 6^e^, les élèves ont été amenés à travailler sur des nombres en écriture fractionnaire et en particulier sur des quotients d'entiers. Ils ont ainsi utilisé des nombres (rationnels) exprimés sous diverses formes : forme fractionnaire (réduite ou non) ou forme décimale (limitée ou non) ; ils ont pu constater que certains d'entre eux sont des entiers, d'autres des décimaux non entiers et d'autres encore ni des entiers ni des décimaux.

2. La distinction avancée dans la question posée n'est donc pas en accord avec les textes officiels.

① Les écritures fractionnaires $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\frac{2{,}7}{\sqrt{3}}$, $\frac{2{,}7}{1{,}8}$ sont ainsi des fractions, mais seule la fraction $\frac{2}{3}$ est un quotient ***d'entiers*** (ou une ***fraction*** d'entiers, même si les textes officiels n'emploient pas cette expression). On a : $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\frac{2{,}7}{1{,}8} = \frac{27}{18} = \frac{3}{2} = 1{,}5$.

② D'une manière générale, étant donné un anneau $\mathcal{A}$ unitaire, commutatif et intègre, on appelle ***corps des fractions*** ou ***corps des quotients*** de $\mathcal{A}$, le plus petit corps $\mathcal{K}$ contenant $\mathcal{A}$: formellement, il est constitué des fractions ou quotients $\frac{a}{b}$ d'éléments a, b de $\mathcal{A}$, avec $b \neq 0$: a est alors le ***numérateur*** et b le ***dénominateur*** de la fraction $\frac{a}{b}$.

③ La ***fraction*** $\frac{a}{b}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ est une ***écriture***. En particulier, de la même façon qu'un vecteur n'a pas d'origine ou d'extrémité, un ***nombre*** rationnel n'a pas de numérateur ou de dénominateur. Cela justifie que les textes privilégient l'expression d'***écriture*** (ou de forme) fractionnaire, plutôt que celle de fraction.

④ Le corps des fractions de l'anneau $\mathbb{Z}$ est évidemment l'anneau $\mathbb{Q}$ des fractions (d'entiers relatifs). Mais si $\mathcal{A} \supset \mathbb{Z}$ est un sous-anneau quelconque de $\mathbb{Q}$, il en va de même : son corps des fractions est le corps $\mathbb{Q}$. Ainsi le corps des quotients de l'anneau $\mathcal{A} = \mathbb{D}$ des nombres ***décimaux*** n'est-il rien d'autre que $\mathbb{Q}$. En d'autres termes, on n'enrichit pas le système des nombres disponibles en passant des fractions d'***entiers*** aux fractions de ***décimaux***.

Corpus B

1. Concernant le corpus B, n'ayant qu'une demi-classe, dois-je fournir les tableaux de note de la classe entière ou uniquement du demi-groupe à ma charge ? Comment avoir un avis global des autres professeurs sur ce demi-groupe alors que tous ont la classe entière. (AL, 18)

2. a) Faut-il mettre les appréciations des bulletins dans le corpus B ? Si oui, de tous les élèves ou uniquement de ceux choisis ?
b) Faut-il mettre les appréciations générales de la classe ? (CS, 18)

3. Pour le corpus B on doit présenter environ 7 séances. Si notre thème est long, quels sont les critères pouvant nous aider à faire un choix ? (CP, 19)

4. Si l'on fait un TP informatique dans notre thème pour le corpus B, faut-il faire des copies d'écran du travail des deux élèves choisis ? (CP, 18)

1. On rappelle d'abord ci-dessous ce qui est contenu dans le document sur la formation et la validation :

Le ***rapport 2*** est rédigé en principe par le même visiteur sur la base d'une prise d'information concrétisée en deux corpus solidaires mais distincts, le ***corpus A***, constitué du compte rendu d'observation établi par le visiteur à la suite d'une ***deuxième visite en classe*** (avant la mi-mars), et le ***corpus B***, constitué par l'élève professeur dans la période qui suit cette deuxième visite, et qui doit comporter

– *l'ensemble des documents écrits* (activités, synthèses, exercices, etc.) témoignant de l'activité de la classe (observée à travers deux élèves adéquatement choisis par le professeur stagiaire) sur le thème d'études principal travaillé lors de la visite, et cela au long d'une séquence comportant en moyenne sept séances réparties autour de la séance observée *in situ* (par exemple 2 ou 3 séances avant et 2 ou 3 séances après la visite, ou, si l'étude du thème a été inaugurée lors de la visite, 5 à 6 séances après la visite, etc.) ;
– lorsqu'ils ne sont pas inclus dans l'ensemble précédent, les *devoirs en classe* et / ou *à la maison* rédigés par les deux élèves choisis et relatifs en tout ou partie au thème d'études retenu, ainsi éventuellement que les corrigés correspondants ;
– *une présentation* de l'ensemble des pièces ainsi rassemblées, avec une ***analyse synthétique de l'organisation mathématique*** étudiée, une *chronologie* des séances (maximum 2 pages) et *un tableau* présentant *les notes* (et, s'il y a lieu, les appréciations) assignées à l'ensemble des élèves de la classe depuis le début de l'année jusqu'à la date de la constitution du corpus B.

Ce sont d'abord les notes de mathématiques qu'il s'agit de communiquer ; elle permettent en effet de situer les élèves choisis et leur résultats dans l'ensemble de la classe – les appréciations apportant un complément utile à cet égard. Une courte présentation de la classe s'avère également pertinente : elle permet de donner un ensemble de conditions pédagogiques auquel est soumis le système didactique observé qui aide l'évaluation à produire – le visiteur en a généralement eu connaissance par le biais de ses visites mais certaines ont pu lui échapper.
Dans le cas, très exceptionnel, du demi-groupe, il est pertinent de situer ce demi-groupe par rapport à la classe en mathématiques d'abord. Là encore, une courte présentation de la classe « entière » et des conditions pédagogiques auquel le système didactique est soumis permet au visiteur de produire une analyse et une évaluation mieux informée ; les informations recueillies lors du conseil de classe par exemple s'avèrent suffisantes.

2. Si le thème est long, il faut faire un choix et il importe surtout de présenter ce choix pour éclairer le rapporteur. Supposons que l'on veuille présenter le thème des équations de droites en classe de seconde, et qu'il soit « trop long » parce qu'il a été lié aux fonctions affines et à la résolution de systèmes par exemple. On peut faire le choix de présenter ce qui est justifié et produit par le fait qu'une droite à une équation de la forme $x = c$ ou $y = ax + b$, ajouté à quelques autres propriétés ; on fixe donc certains ingrédients de l'environnement technologico-théorique et on rassemble l'OD qui a mis en place l'OM relevant de cet environnement technologico-théorique. On peut également couper en partant des types de tâches : on choisit un sous-ensemble des types de tâches du thème d'origine, et on rassemble, de même, l'OD qui a mis en place l'OM autour de ces types de tâches. Ce à quoi il faut prendre garde, c'est d'un côté d'avoir une organisation didactique « complète » sur au moins une partie de l'OM enjeu de l'étude ; de l'autre de ne pas trop réduire l'OM, il faut garder une organisation mathématique locale.

3. Le problème soulevé par la dernière question rejoint le problème plus général de la gestion des traces écrites dans le travail de la classe, et notamment celles liées au travail fait en relation avec les TICE. Il faut prévoir des dispositifs pour que les élèves puissent garder la trace du travail effectué « sur machine » (voir par exemple le TD TICE 4). On peut imaginer par exemple, dans la situation évoquée où les élèves ont travaillé en salle informatique, que le professeur demande aux élèves de garder la trace de leur expérimentation en constituant un fichier comme nous le faisons en TD TICE (mais il faut donner des consignes précises sur le nom et le lieu d'enregistrement du fichier), ou

encore en enregistrant certains états de la figures que le professeur relèvera ensuite et synthétisera, ou en demandant de faire des schémas des situations assortis de commentaires, etc.

Traces écrites en AER

Lorsque je relève le classeur des élèves, je remarque que pour les AER, aucun d'entre eux ne garde de traces écrites de ses recherches personnelles (certains n'écrivent rien, d'autres écrivent au crayon et effacent). Je me demande s'il faut matérialiser ces phases de recherche de façon plus rigide et ritualisée, par exemple en imposant aux élèves d'écrire « recherche personnelle » sur leur copie. (MP, 19)

Ce problème, lié au problème abordé précédemment, n'est pas facile à résoudre car il dépend de conditions qui échappent au niveau de la discipline, et même au niveau pédagogique. En effet, si l'on ne peut que souhaiter que des traces écrites des recherches personnelles existent dans les cahiers, il est difficile de les faire exister pour des raisons liées en partie sans doute au fait que « un cahier doit être propre », ou encore que « un cahier ne doit contenir que des éléments "justes" », mais aussi au fait que les traces écrites d'une recherche personnelle sont considérées comme « indignes », les erreurs comme quelque chose qu'il faut éradiquer, etc.
Dans ces conditions, si le dispositif proposé peut aider à donner de la place à la recherche personnelle, il ne va évidemment pas suffire : il faut en outre « combattre » les assertions précédentes en insistant dans le travail effectué sur le prix qu'a une assertion erronée, parce que c'est sa mise à l'épreuve qui a permis d'avancer, en gérant les traces écrites de manières à recueillir, à noter et faire noter les propositions des élèves, ce qui légitimera le fait que chaque élève ait sa proposition sur son cahier, soit en constituant les traces écrites du cahier d'AER comme celles d'un véritable cahier de laboratoire. Voici ce que les notes du Séminaire 2001-2002 indiquaient à ce propos :

D'une manière générale, la notion de « cahier d'AER » rejoint la notion, traditionnelle en nombre de disciplines, de ***cahier de laboratoire***, sur laquelle on aura avantage à s'appuyer pour structurer les « cahiers » d'AER des différents domaines. À titre d'illustration, on a réuni ci-après, sans commentaires, des extraits de textes de présentation, dans des institutions d'enseignement supérieur, du cahier de laboratoire et de son usage.

Extrait 1

Utilisez le cahier de laboratoire pour consigner :

Vos idées dans le plus grand détail possible.

Les montages expérimentaux. Avant de réaliser un montage, c'est une bonne idée de le concevoir sur papier. Cette étape vous sauvera sûrement du temps ultérieurement.

…

Maintenez une liste chronologique de vos expériences. C'est une bonne idée d'assigner à chaque expérience un numéro d'identification.

Vos résultats de calculs mais surtout vos résultats théoriques et expérimentaux.

Pour toutes les données impossibles à relier statiquement à votre cahier de laboratoire, développez un système d'archivage efficace […] pour relier toutes vos données à votre cahier de laboratoire.

Vos conversations […].

Extrait 2

Dans ce cahier, il est indispensable de noter très précisément tout ce qui est fait à chaque séance : c'est votre mémoire !

…

À partir de ce cahier, votre travail doit pouvoir être reproduit sans votre intervention.

Extrait 3

Le cahier de laboratoire doit aussi être écrit en pensant aux autres. Écrivez toujours avec le souci que quelqu'un d'autre puisse comprendre exactement votre cheminement à la lecture du cahier de laboratoire.

Extrait 4

Ne détruisez jamais vos résultats primaires, ils méritent une place de choix dans votre système d'archivage.

Annotez tous vos graphiques et fichiers. Assurez-vous de bien identifier les données primaires dont ils sont issus et comment ils ont été générés (logiciel utilisé, traitement appliqué...).

Extrait 5

Les mesures ou constatations paraissant bizarres, fausses, etc. doivent être également consignées. Elles se révèlent souvent fort utiles pour la suite.

Représenter dès que possible (dans le cahier de laboratoire) les résultats sous forme graphique avec une représentation judicieuse permettant de tester les modèles théoriques. Ceci permet de déterminer les domaines intéressants à mesurer.

On peut, à l'instar des notations citées, faire noter dans la rubrique « Vie et travail », au fur et à mesure des travaux effectués dans l'année, des règles d'usage du cahier d'AER. On ajoutera que l'on voit ici combien le fait que le cahier d'AER n'ait pas une existence « séparée » du cahier de synthèse est une condition qui gêne le travail à effectuer en AER.

Un peu de droit

Pour le corpus B, suite à la conférence juridique, il y a quelques problèmes à propos des photocopies de cahiers. (GS, 19)

Les problèmes de droits qui pourraient se poser sont *a priori* – et sauf méprise – de deux ordres : soit on touche à la protection de la vie privée, soit à celle de la propriété intellectuelle.
Un cahier est un document qui rassemble les traces écrites du travail de la classe et de l'élève dans le cadre du travail de la classe. C'est un document qui peut-être soumis à évaluation (le professeur peut – et même doit – relever les cahiers régulièrement pour s'assurer de leur conformité au travail de la classe), ou encore être communiqué pour témoigner de l'activité de la classe ou de l'élève dans la classe (changement d'établissement en cours d'année par exemple) : on n'a donc pas affaire à un document privé de l'élève, comme il en va d'un courrier ou d'un courrier électronique. Il constitue un objet transitionnel entre la classe et l'extérieur. On notera qu'une copie annotée par le professeur relève du même cas : elle n'existe que parce que les deux personnes en présence sont assujetties à l'institution scolaire et on ne peut pas la considérer comme une correspondance privée : dans le corpus B, les travaux des élèves sont anonymés, et ils sont là pour témoigner du travail du professeur fait en interaction avec l'institution de formation. Il en irait autrement pour une copie annotée par le même professeur dans le cadre d'un cours particulier.

Un cahier peut être considéré comme une « œuvre » du point de vue de la théorie anthropologique du didactique ; il est moins certain que ça le soit dans l'acception juridique de la loi. Voici par exemple ce que l'on peut trouver dans les articles du code de la propriété intellectuelle (http://www.celog.fr/cpi/lv1_tt1.htm) :

« **Art. L. 111-1.** L'auteur d'une œuvre de l'esprit jouit sur cette œuvre, du seul fait de sa création, d'un droit de propriété incorporelle exclusif et opposable à tous.
Ce droit comporte des attributs d'ordre intellectuel et moral ainsi que des attributs d'ordre patrimonial, qui sont déterminés par les livres I^{er} et III du présent code. »

« **Art. L. 112-1.** Les dispositions du présent code protègent les droits des auteurs sur toutes les œuvres de l'esprit, quels qu'en soient le genre, la forme d'expression, le mérite ou la destination. »

Le dernier article fait l'objet de l'annotation suivante :
« L'Expansion industrielle / Coprosa, C.Cass., 1ère (sic) ch. civile, 2 mai 1989, *DIT 1990/2, p. 38, note Ph. Gaudrat.*
Un travail de compilation d'informations n'est pas protégé en soi par le droit d'auteur. L'effort de recherche et la composition nouvelle ne suffisent pas pour prétendre à la protection ; le texte ou la forme graphique doit comporter un apport intellectuel de l'auteur caractérisant une création originale. »

Art. L.112-2. Sont considérés notamment comme œuvres de l'esprit au sens du présent code :
1° Les livres, brochures et autres écrits littéraires, artistiques et scientifiques ;
2° Les conférences, allocutions, sermons, plaidoiries et autres oeuvres de même nature ;
3° Les œuvres dramatiques ou dramatico-musicales ;
4° Les œuvres chorégraphiques, les numéros et tours de cirque, les pantomimes, dont la mise en œuvre est fixée par écrit ou autrement ;
5° Les compositions musicales avec ou sans paroles ;
6° Les œuvres cinématographiques et autres oeuvres consistant dans des séquences animées d'images, sonorisées ou non, dénommées ensemble oeuvres audiovisuelles ;
7° Les œuvres de dessin, de peinture, d'architecture, de sculpture, de gravure, de lithographie ;
8° Les œuvres graphiques et typographiques ;
9° Les œuvres photographiques et celles réalisées à l'aide de techniques analogues à la photographie ;
10° Les œuvres des arts appliqués ;
11° Les illustrations, les cartes géographiques ;
12° Les plans, croquis et ouvrages plastiques relatifs à la géographie, à la topographie, à l'architecture et aux sciences ;
13° Les logiciels, y compris le matériel de conception préparatoire ;
14° Les créations des industries saisonnières de l'habillement et de la parure. Sont réputées industries saisonnières de l'habillement et de la parure les industries qui, en raison des exigences de la mode, renouvellent fréquemment la forme de leurs produits, et notamment la couture, la fourrure, la lingerie, la broderie, la mode, la chaussure, la ganterie, la maroquinerie, la fabrique de tissus de haute nouveauté ou spéciaux à la haute couture, les productions des paruriers et des bottiers et les fabriques de tissus d'ameublement.
■ CA Versailles, 9 oct.2003 Microsoft France c/ Synx Relief et autres, Concernant l'étendue de la protection : Une fonctionnalité de logiciel se définit comme la simple « mise en œuvre de la capacité d'un logiciel à effectuer une tâche précise » et ne peut de ce fait être qualifiée d'œuvre de l'esprit. Elle peut toutefois faire l'objet d'une protection par brevet.

Sauf cas très exceptionnel, que le choix des cahiers doit pouvoir éviter, un cahier d'élève ne semble pas relever d'un « apport intellectuel de l'auteur caractérisant une création originale » du point de vue du code. En outre on rappelle que, conformément aux usages en recherche, les traces écrites des élèves produites dans le corpus B doivent être anonymées.

Dans le même ordre d'idée, on examinera la question suivante :

Quand on copie (ou qu'on s'inspire de) un exercice dans un livre ou un document Internet doit-on préciser la source aux élèves ? (TT, 19)

La reproduction d'un exercice s'autorise sans doute du droit dit « de courte citation ». Voici ce qu'on trouve dans l'article Wikipédia du même nom (http://fr.wikipedia.org/wiki/Droit_de_courte_citation) :

En France c'est le code de la propriété intellectuelle qui le détermine, et en particulier l'article L122-5. Les conditions de la loi française sont simplement (art L122-5 CPI) : « Lorsque l'œuvre a été divulguée, l'auteur ne peut interdire : […] 3° Sous réserve que soient indiqués clairement le nom de l'auteur et la source : a) Les analyses et courtes citations justifiées par le caractère critique, polémique, pédagogique, scientifique ou d'information de l'œuvre à laquelle elles sont incorporées ». Le droit de citation est gratuit et autorisé à tous.

Vous avez donc le droit d'incorporer des exercices issus des ouvrages ou d'un site Internet dans une feuille d'exercices de votre cru ***à condition de citer l'auteur (qui peut être un auteur moral) et la source.***

Nous reviendrons la semaine prochaine sur le thème Vecteurs, relation de Chasles et propriétés de la multiplication par un réel. On rappelle le travail à faire dans ce cadre.

Exercice : Peut-on fonctionnaliser la relation de Chasles comme ***élément technologique*** sans avoir recours aux propriétés notées (1), (2), (3) par la question 2 ? Si oui, donner un spécimen de type de tâches et la technique correspondante dont la justification repose sur la relation de Chasles ; si non, donner un spécimen de type de tâches et expliciter la ou les propriétés indispensables à la fonctionnalisation de la relation de Chasles dans ce cas.

4. Travail de la notice « Questions & Réponses »

Les traits saillants des cinq premières parties ont été examinés. La 6e partie sera travaillée lors de la prochaine séance.

Prochaine séance : le mardi 30 mars 2010.

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 21 : mardi 30 mars 2010

Programme de la séance. 1. Forum des questions // 2. TER : contraintes de mise en forme // 3. Notice Questions & Réponses // 4. Évaluation & développement : fabriquer des questions cruciales

1. Forum des questions

Les équations sont vues dans différentes résolutions de problèmes au cours de l'année. Est-il nécessaire de faire une séquence complète sur les équations ? Et si oui, est-il nécessaire de faire des AER ou peut-on se limiter à la synthèse ? (5^{e}, 19)

Si le travail effectué à l'occasion de l'étude de différents thèmes a fait émerger des éléments d'une OM relative aux équations, les travaux relatifs à ces thèmes ont constitué des AER relatives au thème des équations et il doit y en avoir eu des traces dans les bilans d'étapes au moins. On pourrait alors dans ce cas mettre en forme, à partir de ces bilans d'étapes, une synthèse relative au thème « équations ». Compte tenu de la gestion du temps de l'étude, on aura cependant intérêt à préparer ce travail de synthèse par l'étude d'un problème mettant en jeu les principaux éléments qui ont déjà émergé de manière à constituer un milieu pour la synthèse en « rafraîchissant » la mémoire didactique de la classe sur ce thème. [Développé oralement]

Moment du travail d'une organisation mathématique

Sur une séquence d'environ 6 – 7 heures, quel temps accorder au moment de travail ? J'ai l'impression de ne pas avoir assez de temps pour le mener correctement. (6^{e}, 14)

Lors du moment du travail de l'OM, je remarque que la plupart des élèves oublient la réflexion qui a été menée en AER et exécutent mécaniquement des techniques sans leur donner de sens. Ceci se ressent à travers leurs questions : « Dans le contrôle, on fera aussi $\frac{x_A+x_B}{2}$ et $\frac{y_A+y_B}{2}$? » (au sujet des coordonnées du milieu) ; « Quand on fait Pythagore, la racine carrée on l'enlève ? » (calcul de longueurs au carré en fonction des coordonnées) ; Comment éviter qu'ils se focalisent autant sur la technique ? (2de, 16)

1. Le moment de travail de l'organisation mathématique dépend dans une large mesure de la constitution de l'organisation mathématique : plus celle-ci sera correctement développée et aura émergée en donnant du *topos* aux élèves, en développant suffisamment le moment

exploratoire et le moment technologico-théorique – articulés à la justification, la production et l'intelligibilité des techniques –, moins l'organisation de l'étude nécessitera de temps consacré au travail de l'organisation mathématique. Pour donner une indication quantitative, c'est à peu près trois spécimens de chaque type de tâches de l'OM qui doivent être travaillés collectivement – en prenant garde que les spécimens soient véritablement l'occasion d'un travail et non de l'émergence subreptice d'une partie de l'OM. On ajoutera qu'il est nécessaire de travailler et de faire travailler l'ensemble de l'OM mise en place.

2. Il n'est pas anormal que, « spontanément », les élèves « se focalisent sur la technique » : ce qu'ils ont à faire, c'est accomplir des types de tâches et ils se centrent donc sur ce qu'ils voient comme immédiatement et structurellement utile pour cela, soit des ingrédients techniques ; on ajoutera qu'il y a là l'effet d'un partage topogénétique classique. Ce qu'il faut faire apparaître et installer dans le rapport institutionnel aux mathématiques de la classe, c'est que l'environnement technologico-théorique permet de contrôler les techniques et qu'il entre dans le *topos* des élèves au même titre que les techniques – ce qui passe par un travail de longue haleine sur l'articulation entre le moment exploratoire et le moment technologico-théorique, d'une part ; sur la mise en forme des raisonnements, d'autre part.

Une condition qui favorise ce type de rapport est la structuration des OM avec des techniques « amalgamées », qui articulent étapes expérimentales et étapes déductives, les étapes expérimentales permettant de produire les résultats qu'il s'agit de déduire et/ou de les vérifier, de les contrôler.

3. Pour illustrer ces remarques, nous donnerons un extrait d'un rapport 2 : il s'agit d'un corpus B sur le thème des fonctions affines, l'OM étant articulée autour des quatre types de tâches suivants :

T_1 : Représenter graphiquement une fonction affine.
T_2 : Déterminer la fonction affine passant par deux points donnés.
T_3 : Déterminer le sens de variation d'une fonction affine
T_4 : Déterminer si une fonction donnée par trois points peut être affine.

3.4. Les exercices et le moment de travail de l'organisation mathématique
Les élèves ont régulièrement du travail à effectuer hors classe et les types de tâches découpés par P sont travaillés, même si c'est de façon inégale : on trouve ainsi dans les exercices effectués quatre spécimens de T_1, deux spécimens de T_2 et deux spécimens de T_4. On voit donc que T_3 n'a pas été travaillée, ce qui rejoint les remarques faites plus haut. On ajoutera que le corpus d'exercices proposé, issu du livre de la classe, ne comporte pas d'exercices de modélisation (ce qui est en partie dû sans doute au défaut d'analyse de l'OM relevé plus haut) et que les spécimens de T_4 rencontrés conduisent tous au cas où la fonction est affine. Les traces écrites des élèves sont suffisamment complètes pour faire apparaître la technique relative au type de tâches T_4 (ou plutôt au sous-type déjà cité) et au type de tâches T_2. À cet égard, on notera que la technique relative à T_2 est celle issue de la classe de 3^{e}, *ne varietur* : il est probable que le fait de faire travailler cette technique pour faire apparaître le taux d'accroissement et la faire évoluer aurait aidé à mettre en place la technique de calcul du taux d'accroissement.

Commentaires développés oralement
L'un des reproches touche le fait que l'on ne constitue pas le taux d'accroissement comme élément technologique relativement au type de tâches T_2, ce que l'on relie à un problème relatif à la technique de calcul du taux d'accroissement ; c'est donc un problème d'amalgamation de l'organisation mathématique. Le type de tâches non travaillé est également lié à un défaut de constitution de l'OM. On note également la réduction d'un type de tâches à l'un de ses sous-types.

Quelles sont les raisons d'être de la fréquence car je n'arrive pas à faire une AER pour introduire la fréquence en 5^e ? (5^e, 16)

La réponse à cette question tient d'abord dans le fait que le travail avec les effectifs ne permet pas de comparer deux séries dont les tailles ne sont pas identiques, ou encore de répondre à des questions du type : est-ce qu'il y a un grand nombre d'individus de la population qui ont tel caractère ?

Supposons qu'un collège se pose le problème de modifier l'heure de début des cours le matin : en effet, lors du conseil d'administration, les parents se sont plaints du fait que « 8 h, ça fait trop tôt pour beaucoup d'élèves qui habitent loin ». L'équipe de direction veut donc savoir s'il y a beaucoup d'élèves qui mettent plus de 20 minutes pour venir au collège. Après enquête, ils trouvent que 180 élèves ont un trajet d'au moins 20 minutes le matin : est-ce beaucoup ou pas ? La réponse à cette question va dépendre du nombre d'élèves scolarisés au collège : s'il s'agit d'un « petit établissement », qui compte 400 élèves, ça fait près de la moitié des élèves tandis que s'il s'agit d'un « grand établissement », qui compte 720 élèves, ça ne représente plus que le quart de la population des élèves. On pourra à cet égard consulter le travail sur la statistique descriptive effectué ces trois dernières années dans le séminaire.

Quartiles

Il existe différentes méthodes de calcul des quartiles. Celle qui est proposée sur les livres de seconde ne donne pas les mêmes résultats que la calculatrice (Exemple : Hyperbole, 2^{de} nouveau programme). Comment doit-on faire face à ce problème ? Quelle méthode doit-on enseigner aux élèves, celle du livre ou de la calculatrice ? (2^{de}, 17)

Il faut, dans ces cas-là, enquêter sur les définitions fixées par le programme : ces éléments étant étudiés au collège, c'est vers le programme du collège qu'il faut se tourner. Voici ce qui figure dans le document ressources pour le collège :

Cela fixe le cadre à imposer en classe de seconde. [Développé oralement]

<u>3.3• Médiane, quartiles</u>

La médiane est, comme la moyenne, un indicateur de tendance centrale.
La définition qui est retenue en collège pour la médiane d'une série est celle qui est adoptée dans le programme de seconde. Elle s'appuie sur la pratique :
Médiane (empirique) *: La série des données est ordonnée par ordre croissant. Si la série est de taille impaire (2n+1), la médiane est la valeur du terme de rang n+1. Si la série est de taille paire (2n), la médiane est la demi-somme des valeurs des termes de rang n et n+1.*
D'autres définitions sont parfois utilisées ; par exemple, la médiane est le deuxième quartile[16]. Dans la pratique statistique, ces différences n'ont pas d'importance. Pour les élèves, connaître la signification de la médiane en terme de position est l'objectif principal. La détermination de la médiane nécessite le classement des données, ce qui n'est pas le cas pour le calcul de la moyenne. De plus, contrairement à la moyenne, la médiane n'est pas sensible aux valeurs extrêmes, ce qui est mis en évidence sur des exemples. La position relative de la médiane et de la moyenne d'une série peut être interprétée quand cela est significatif. Ainsi des expressions comme « la moyenne des salaires est… » et « la médiane des salaires est … » doivent pouvoir être traduites par les élèves sous d'autres formes, par exemple : « Avec la masse des salaires distribués, si chacun recevait le même salaire, celui-ci serait de … », « La moitié de la population gagne plus de … et l'autre moitié moins de … ».
Pour mieux comprendre la notion de médiane, il est utile de mettre en évidence, sur quelques exemples, d'autres caractéristiques de position : les premier et troisième quartiles.
Pour mémoire, les définitions concernant les quartiles sont les suivantes :
Premier quartile (empirique) *: c'est le plus petit élément q des valeurs des termes de la série, tel qu'au moins 25 % des données sont inférieures ou égales à q.*
Troisième quartile (empirique) *: c'est le plus petit élément q' des valeurs des termes de la série, tel qu'au moins 75 % des données sont inférieures ou égales à q'.*

Si l'on considère la série de 12 nombres consécutifs 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, la médiane est donc la moyenne entre la 6e et la 7e valeurs, soit $\frac{16+17}{2} = 16{,}5$; $12 \times \frac{1}{4}$=3, donc le premier quartile est la valeur de la série de rang égal à 3, soit 13 ; le troisième quartile est la valeur de la série de rang égal à 9, soit 19.

Si l'on considère maintenant la série de 13 nombres consécutifs 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, la médiane est la 7e valeur, soit 17, et comme $13 \times \frac{1}{4}$=3,25, le premier quartile est la quatrième valeur de la série, soit 14 et le troisième quartile la 10e valeur soit 20. Une calculatrice collège Casio 2D+ achetée en 2009 donne les bonnes valeurs, tandis que qu'une TI 89 qui a une dizaine d'années fournit la même médiane mais des quartiles différents : 13,5 et 19,5 pour la première série et 13,5 et 20,5 pour la deuxième (elle détermine les médianes des sous-séries définies par la médiane). Cela permet quand même de vérifier qu'on n'a pas commis une erreur grossière.

J'aimerais savoir comment se procurer les anciens documents d'accompagnement du collège. (4e & 3e, 18)

On les trouvera avec les anciens programmes de collège dans la rubrique Documents des pages de la filière mathématiques : http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/fi/pcl2/2A.TXT/2009-2010/documents_10.html
Un lien direct vers le fichier : http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/fi/pcl2/2A.TXT/2002-2003/programmes_du_college.doc

Les vecteurs et les équations de droites en seconde (suite)

1. De la part de l'équipe de maths du lycée St Charles : le programme n'est pas clair quant à l'exigibilité des propriétés de distributivité pour les vecteurs ainsi que la caractérisation de la colinéarité par $xy' - yx' = 0$. Quelle est votre interprétation ? (2de, 18)

2. Dans le programme de seconde, il est noté :

Contenu	Capacités attendues
• Produit d'un vecteur par un nombre réel	• Utiliser la notation $\lambda\vec{u}$ • Établir la colinéarité de deux vecteurs
• Relation de Chasles	• Construire la somme de deux vecteurs • Caractériser alignement et parallélisme par la colinéarité de vecteurs.

a) Faut-il voir les propriétés de la distributivité d'un réel par rapport à une somme de vecteurs, etc.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, λ et λ' deux nombres réels :

(1) $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$

(2) $\lambda(\lambda'\vec{u}) = \lambda'(\lambda\vec{u}) = \lambda'\lambda\vec{u}$

(3) $(\lambda+\lambda')\vec{u} = \lambda\vec{u} + \lambda'\vec{u}$

b) Faut-il donner la caractérisation de la colinéarité par le déterminant i.e. $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ sont colinéaires ssi $xy' - x'y = 0$? (2de, 18)

3. Dans ma progression, le chapitre sur les vecteurs avec la notion de *colinéarité* arrive avant le chapitre sur les équations de droites avec la notion de *droites parallèles*. Comment peut-on éviter que les élèves se ramènent à la colinéarité de vecteurs et cherchent plutôt à déterminer l'équation d'une droite passant par deux points donnés afin de faire émerger la propriété sur les droites parallèles (même coefficient directeur) et/ou la méthode pour montrer que trois points sont alignés (A, B, C alignés ssi (AB) et (AC) ont le même

coefficient directeur) ? (2de, 18)

4. *a*) Sur le chapitre sur les équations de droites en 2de, faut-il parler d'équations cartésiennes ? J'ai juste évoqué ce que c'était, mais ensuite je n'ai traité que les équations réduites.
b) Au niveau des vecteurs, je n'ai pas évoqué le vecteur directeur d'une droite. Fallait-il le faire ? Car cela simplifie les démonstrations sur le chapitre des droites. De même pour la condition de colinéarité de deux vecteurs que je n'ai pas faite émerger ($\vec{u}(x\,,y)$ et $\vec{v}(x\,'\,,y\,')$ sont colinéaires si et seulement si $xy\,'-x\,'\,y=0$) ? (2de, 17)

5. Dans le programme de 2de, sur les droites, il y a en commentaire : ce sera l'occasion de revoir les systèmes linéaires. Étant donné qu'on ne voit que les équations réduites, à quel moment doit-on les revoir ? Est-ce dans le type de tâches : déterminer l'équation d'une droite à partir de deux points ? Par exemple, soit A(2;-3) et B(1;4)deux points ; comme $x_A\neq x_B$, (AB) : $y=ax+b$; A ∈ (AB) donc $-3=2\,a+b$; B ∈ (AB) donc $4=a+b$; on résout le système pour trouver a et b. Seulement ici c'est un système particulier car l'inconnue b est facilement « isolable ». De plus, il y a une autre technique, qui me semble plus facile, pour résoudre ce type de tâches (calculer le coefficient directeur avec la formule, puis se servir d'un des points A ou B pour calculer b). (2de, 18)

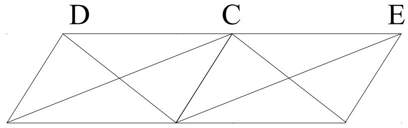
6. Il n'est pas marqué dans le programme d'institutionnaliser la résolution de systèmes linéaires mais d'en faire dans le cadre de la recherche de coordonnées de points d'intersection de droites. Faut-il tout de même leur montrer les deux techniques de résolution (combinaison et substitution) sur des exemples ou est-il mieux d'en utiliser qu'une pour éviter des confusions ? (2de, 18)

Nous avions remarqué, dans le travail effectué lors d'une séance antérieure, que l'utilisation des propriétés allait de pair avec l'utilisation de la relation de Chasles, tandis que leur évitement conduisait à l'évitement de cette propriété. Cette remarque met en évidence un deuxième point à considérer : il s'agit d'examiner si les propriétés ne sont pas nécessitées par la fonctionnalisation d'un élément technologique qui, lui, figure au programme.

Exercice : Peut-on fonctionnaliser la relation de Chasles comme ***élément technologique*** sans avoir recours aux propriétés notées (1), (2), (3) par la question 2 ? Si oui, donner un spécimen de type de tâches et la technique correspondante dont la justification repose sur la relation de Chasles ; si non, donner un spécimen de type de tâches et expliciter la ou les propriétés indispensables à la fonctionnalisation de la relation de Chasles dans ce cas.

Le principal type de tâches proposé pour la fonctionnalisation de la relation de Chasles comme élément technologique a été la construction de la somme de deux vecteurs comme par exemple dans l'exercice suivant (maths seconde, collection Indice, 2009, page 213 exercice 18) :

ABDC et ACEF sont des parallélogrammes.



Reproduire et compléter les égalités suivantes à l'aide des points de la figures :
1. $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{B...}$; $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A...}$; $\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{F...}$; $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{C...}$.
2. $\overrightarrow{CF}-\overrightarrow{CE}=\ldots$; $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB}=...$; $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=...$; $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BA}=...$;

On notera que deux techniques peuvent être employées pour les trois premières égalités de la première question : celle reposant sur la relation de Chasles qui conduirait par exemple à écrire que $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$; celle produite par la « règle du parallélogramme » qui permettrait d'écrire : BACD est un parallélogramme donc le vecteur $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}$ est le vecteur $\overrightarrow{BC}$. [On cherche un point de la figure, X, tel que BAXD soit un parallélogramme]. La dernière égalité se traite, elle, par la relation de Chasles : $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CE}$. Le traitement de la deuxième question peut quant à elle éviter complètement la relation de Chasles si l'on dispose de la règle du parallélogramme mais on remarquera que cela suppose un recours à la figure que la relation de Chasles ne nécessite pas : on a seulement besoin des égalités de vecteurs $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AF}$; $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{EF}$; $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{FC}$ et $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AE}$. On notera également que la relation de Chasles peut avoir permis de produire la règle du parallélogramme : elle a alors, si elle n'est pas utilisée, un statut théorique dans l'OM mise en place.

Examinons l'exercice suivant, pris dans l'ouvrage *Modulo math* (Didier, édition 2004, exercice 55 page 280).

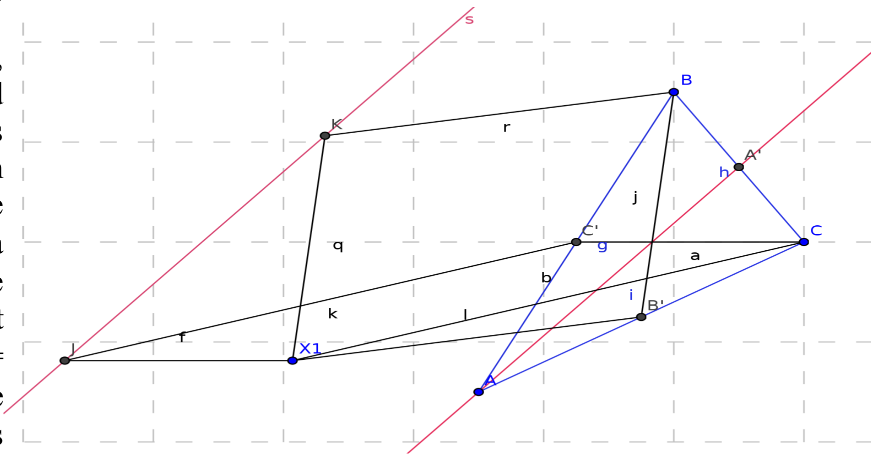
I est le milieu de [AB] et $\overrightarrow{CG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CI}$. On considère le repère (A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$). Il s'agit de déterminer les coordonnées du points G.

Voici une première technique. I étant le milieu de [AB], on a $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$et I a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;0\right)$. De $\overrightarrow{CG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CI}$, il vient que $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CI}$, soit encore que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{AC}$. Il reste à calculer les coordonnées de $\overrightarrow{CI}$, à partir de celle de C et de I.

On peut autonomiser le travail de la relation de Chasles en posant G (x, y), en écrivant que $\overrightarrow{CG}$ a pour coordonnées (x ; $y-1$), on obtient que x = 1/3, puis que $y - 1 = -\frac{2}{3}$.

Considérons maintenant l'exercice suivant (Axiale, Hatier 2004, page 299) :

Dans un triangle ABC, A', B' et C' sont les milieux respectifs des côtés [BC], [AC] et [AB] et X est un point du plan. On construit J et K tels que CC'JX et BB'XK soient des parallélogrammes. Les droites (AA') et (JK) sont-elles parallèles ?

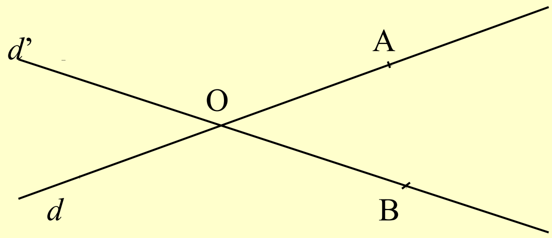


La donnée du point X, quelconque dans le plan, rend plus malaisé le travail avec les seules coordonnées dans un repère ; on prendra ici le repère (B, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}$). L'utilisation de la relation de Chasles permet de simplifier le travail : on obtient d'abord que $\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{JX} + \overrightarrow{XK} = \overrightarrow{CC}$'+ $\overrightarrow{BB}$', ce qui permet de conclure en utilisant les coordonnées des points B, C, B' et C'.

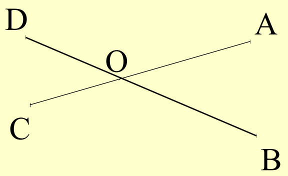
Une question posée il y a quelques mois, mais qui n'apparaît pas dans le récapitulatif de mes questions. Nous avons vu pendant une séance de séminaire que la notation $\widehat{ABC}$ désignait la mesure d'un angle plutôt que le secteur angulaire. Pourtant les notions d'angles adjacents, correspondants, etc., font bien appel à la position dans le plan des angles. Il y a donc un certain abus de langage à utiliser cette notion dans ce cas. Faut-il faire prendre conscience de cette ambiguïté aux élèves ou est-ce inutile ? (B, 5^{e}, 19)

On reproduit ci-dessous l'extrait évoqué :

Sur la figure ci-après, les droites sécantes *d* et *d'* déterminent quatre ***secteurs angulaires***.



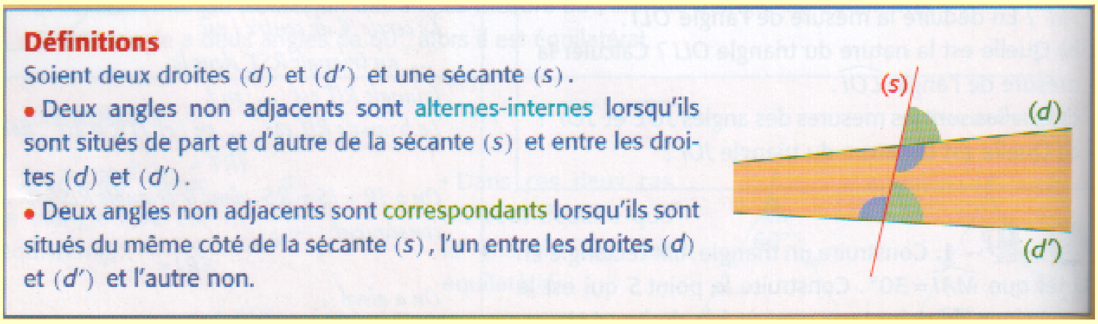
Le secteur angulaire qu'on peut noter par exemple (pourquoi pas ?) ⟨[OA), [OB)⟩ est une ***partie du plan***, qui s'écrit encore $d'_A \cap d_B$, où d'_A est le demi-plan fermé déterminé par *d'* et contenant A et d_B le demi-plan fermé déterminé par *d* et contenant B. En revanche l'angle $\widehat{AOB}$ désigne une ***grandeur*** (d'un genre particulier !) : c'est l'***angle*** du ***secteur angulaire*** ⟨[OA), [OB)⟩, comme on parle de la ***longueur*** ℓ d'un ***segment*** [AB]. C'est ce qu'on reconnaît implicitement quand on écrit – selon l'usage – une égalité telle



$$\widehat{AOB} = \widehat{COD}$$

Celle-ci dénote en effet l'égalité de deux angles, non l'identité de deux secteurs angulaires : ici, les angles sont égaux – sont une seule et même entité – tandis que les secteurs angulaires sont deux régions du plan qui n'ont en commun que le point O. De la même façon que toutes les longueurs mesurées en kilomètres par le nombre 6 (par exemple) sont ***égales***, c'est-à-dire sont ***une seule et même longueur***, notée 6 km, de même tous les secteurs angulaires dont l'angle est mesuré en ***degrés*** par le nombre 37 sont notés 37 ° : on aura ainsi : $\widehat{AOB} = \widehat{COD} \approx 37\,°$.

Lorsque l'on parle « d'angles adjacents » ou « d'angles correspondants », ce sont en effet les secteurs angulaires qui sont adjacents, et non les grandeurs que sont les angles comme en témoigne l'extrait suivant que nous avions cité :



Définitions

Soient deux droites (d) et (d') et une sécante (s).

- Deux angles non adjacents sont alternes-internes lorsqu'ils sont situés de part et d'autre de la sécante (s) et entre les droites (d) et (d').
- Deux angles non adjacents sont correspondants lorsqu'ils sont situés du même côté de la sécante (s), l'un entre les droites (d) et (d') et l'autre non.

Lorsque l'on formule par exemple la propriété que deux droites sont parallèles si une sécante à ces droites déterminent deux angles alternes-internes égaux, on a la coprésence des secteurs angulaires et des angles attachés à ces secteurs. Une formulation prenant en charge cette distinction pourrait être : deux droites sont parallèles si une sécante à ces droites détermine deux secteurs angulaires alternes-internes dont les angles ont même mesure.

Si dans l'émergence de la notion d'angle, il faudra porter attention à ce que l'on distingue correctement les secteurs angulaires de la grandeur que l'on examine à leur propos, on pourra ensuite maintenir cette ambiguïté de formulation qui s'avère commode et qui est usuelle comme nous le signalions dans l'extrait cité.

Nous examinerons lors de la prochaine séance la question suivante :

Je suis en train de préparer le chapitre Factorisation. Peut-on justifier la raison d'être de la factorisation par la résolution d'équation produit nul ? Ma future AER consiste à trouver les solutions de l'équation $(x-2)(x+5)=0$. Ainsi on fera émerger la technologie suivante : un produit de deux facteurs est nul si l'un au moins des facteurs est nul. Ainsi lors de la résolution d'équation du type $x^2+2x+1=0$ ou $x^2-2x=0$, ils essaieront de se ramener à un produit du type A B = 0 et donc découvrir la factorisation. Est-ce une AER correcte ? (AB, 3^e, 19)

2. Notice Questions & Réponses

On devait examiner la 6^e partie de la notice Questions & réponses : faute de temps, ce travail est repoussé à la prochaine séance.

3. TER : contraintes de mise en forme

La rédaction d'un manuscrit demande de se conformer à certaines normes en usages, et notamment des normes typographiques, qui sont pour la France fixées pour l'essentiel par l'Imprimerie Nationale. Deux documents intitulés *typographie 1* et *typographie 2* (ce dernier étant plutôt relatif aux écritures mathématiques), basés sur le *Lexique des règles typographiques en usage à l'Imprimerie nationale* (Paris : Imprimerie nationale, 2008 pour la dernière édition), figurent dans la rubrique Documents et donnent les principes essentiels à respecter.

On a examiné rapidement en séance les deux documents : on insiste sur le fait que l'on écrit **6^e** et pas 6^ème, **1^re** et pas 1^ère, que 1° signifie primo, qu'il y a une espace insécable (CTRL+Alt+espace) devant les signes de ponctuation suivants : : ; ! ? et que les écritures mathématiques sont pour l'essentiel en italique : on écrira par exemple x^2+4 et non x^2+4.

4. Évaluation & développement : fabriquer des questions cruciales

Nous reprendrons ici le travail effectué lors de la 4^e séance de travaux dirigés. Nous reproduisons ci-dessous l'énoncé du travail qui était à réaliser.

1. Techniques à composante expérimentale

Un professeur de seconde a identifié le type de tâches suivant qu'il souhaite faire étudier aux élèves de sa classe :
T – déterminer les variations et l'extrémum d'une fonction du second degré.
Il a fabriqué une technique relative à ce type de tâche intégrant l'expérimentation qui s'appuie sur les variations de la fonction $x \mapsto x^2$. Voici ses traces écrites.

L'argument principal de cette technique consiste à mettre la fonction sous la forme $a(x-b)^2+c$ où c est l'extrémum de la fonction et b la valeur de x pour laquelle il est atteint, valeurs qui sont déterminées à l'aide de la calculatrice. On détermine l'extrémum et les variations par une technique expérimentale, ce qui permet de dire : d'une part que $f(x)$ se met sous la forme $a(x-b)^2+c$, ce que l'on vérifie en tabulant les deux expressions à la calculatrice et que l'on déduit théoriquement en développant la deuxième expression pour obtenir la première ; d'autre part

que f est croissante sur [b ; +∞[si $a > 0$, sur]-∞ ; b] si a <0 et décroissante sur [b ; +∞[si $a < 0$, sur]-∞ ; b] si a >0 ce qu'il s'agit ensuite de déduire théoriquement.

Par exemple, pour $a > 0$.
Soit x et y tels que $x \geqslant y \geqslant b$. On a alors $(x-b) \geqslant (y-b) \geqslant 0$.
La croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur [0; +∞[donne alors que $(x-b)^2 \geqslant (y-b)^2 \geqslant 0$ soit que $a(x-b)^2 \geqslant a(y-b)^2 \geqslant 0$ puis que $a(x-b)^2+c \geqslant a(y-b)^2+c \geqslant c$, ce qui prouve la croissance de f sur [b ; + ∞[.
Soit x et y tels que $x \leqslant y \leqslant b$. On a alors $(x-b) \leqslant (y-b) \leqslant 0$.
La décroissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur]-∞, 0] donne alors que $(x-b)^2 \geqslant (y-b)^2 \geqslant 0$ soit que $a(x-b)^2 \geqslant a(y-b)^2 \geqslant 0$ puis que $a(x-b)^2+c \geqslant a(y-b)^2+c \geqslant c$, ce qui prouve la décroissance de f sur]-∞, 0].
On a en outre montré que sur les deux intervalles $f(x) \geqslant c = f(b)$, ce qui prouve que f admet un minimum en b qui vaut c.

Il souhaite fabriquer un dispositif permettant aux élèves de garder des traces écrites de leurs expérimentations faites avec la calculatrice ou un grapheur.

Fabriquer un tel dispositif. Pour cela, on s'appuiera sur la détermination des variations et l'extrémum des fonctions du second degré suivantes pour mettre en évidence les traces écrites à conserver.

$x \mapsto 3x^2 + 2x - 1$; $x \mapsto 2x^2 - x + 1$; $x \mapsto -x^2 + 6x - 2$; $x \mapsto -2x^2 - 4x + 1$; $x \mapsto \frac{1}{4}x^2 + x - 3$; $x \mapsto (x-1)^2 - 1$; $x \mapsto -x^2 + 96x$.

2. Expérimenter pour explorer et réaliser un moment technologico-théorique

Ce professeur a conçu une AER pour mettre en place l'OM précédente : il est parti d'un problème (celui du « maître nageur ») dont la modélisation a abouti à la fonction suivante : $A(x) = x(185-2x)$. Le travail s'est arrêté sur la formulation des assertions suivantes :

La droite parallèle à l'axe des ordonnées et passant par l'abscisse du point maximum, x_M, est un axe de symétrie de la courbe d'une fonction du second degré.
Une fonction du second degré est croissante sur l'intervalle $]-\infty ; x_M]$ et décroissante sur l'intervalle $[x_M ; +\infty[$.

Produire l'armature d'un scénario permettant la mise à l'épreuve de ces assertions et l'émergence de la technique relative à T décrite dans la première partie du TD. On l'enverra à l'issue de la séance à m.artaud@aix-mrs.iufm.fr.

On pourra s'appuyer sur le logiciel Geogebra (http://www.geogebra.org/cms/index.php?lang=fr) et le corpus de fonctions suivant, que l'on complètera éventuellement suivant les besoins de l'expérimentation :

$x \mapsto 3x^2 + 2x - 1$; $x \mapsto 2x^2 - x + 1$; $x \mapsto 2x^2 - 3x - 2$; $x \mapsto 2x^2 - 8x + 10$; $x \mapsto -x^2 + 6x - 2$;
$x \mapsto -2x^2 - 4x + 1$; $x \mapsto x^2 - 4x + 2$; $x \mapsto \frac{1}{4}x^2 + x - 3$; $x \mapsto (x-1)^2 - 1$; $x \mapsto x^2 + 6x + 5$;
$x \mapsto -x^2 + 96x$; $x \mapsto 2x^2 - 12x + 10$; $x \mapsto (x-2)(4-x)$; $x \mapsto x^2 + 8x + 10$; $x \mapsto 2x^2 - 4x + 9$;
$x \mapsto \frac{-1}{2}x^2 + 2x + 3$; $x \mapsto x^2 - 6x + 9$; $x \mapsto -x^2 + 6x$;$x \mapsto -5x^2 + 10x + 15$;$x \mapsto 2x(x+2)$.

Quelques remarques sur les travaux remis

Peu se présentent sous la forme de questions cruciales ; en général, trop peu d'exemples sont considérés (ce qui limite le travail expérimental et donc le milieu) et la répartition d'exemples entre les élèves n'est pas prévue. (Remarque :dans le cas où on prend « beaucoup » d'exemples, cela pose le problème du recueil des données ; c'est peut-être ça qui est évité.)

Les techniques « à geogebra » sont assez souvent basées sur une utilisation de commandes « directes » du logiciel alors qu'on peut penser à d'autres techniques (dont certaines qui prépareront mieux la déduction) ; on notera que certains essaient de faire découvrir la fonction geogebra alors que ce n'est pas le but du travail.

Généralement, des traces écrites à laisser ne sont pas prévues, la déduction des assertions de la théorie disponible non plus.

Le travail effectué avait pour objet de faire émerger collectivement une technique de développement d'une AER de ce type. On en présentera une synthèse succincte.

Fait oralement

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2009-2010

Travaux dirigés de didactique des mathématiques
Utiliser les TICE

➔ Séance 5 : mardi 30 mars 2010 (17 h 20 – 18 h 50)

Expérimenter pour explorer et réaliser un moment technologico-théorique

À l'occasion du travail d'un devoir à faire hors classe, deux élèves munis de calculatrices s'intéressent aux quotients des entiers par 7. Voici un extrait de leur dialogue :

– Tu as vu que 1/7 et 8/7 ça donne la même chose après la virgule ?
– Non, je ne l'avais pas vu, mais t'as raison. Moi, ce que j'avais vu, c'est qu'après la virgule, il y a toujours 6 chiffres différents et qui se répètent dans le même ordre...
– Six chiffres, c'est normal, dans la division par 7, il y a 6 restes possibles : 1, 2, 3, 4, 5 et 6.
– Heu... Et zéro alors ?
– Ben, il y est pas, sinon ça serait un multiple de 7...
– Ouais... Ce qui est drôle, c'est que pour 3/7 c'est les mêmes chiffres, mais décalés d'un rang...
Ça devrait être pour 2/7... Mais pour 2/7, c'est les mêmes chiffres mais décalés de deux rangs.
– Ça alors !

Pour en avoir le cœur net, ils demandent à leur professeur de mathématiques si ce qu'ils ont cru observer pour 7 est généralisable et, si oui, comment on peut connaître le décalage. Le professeur décide alors de mettre à l'étude dans une séance ultérieure la question suivante :

Q : Est-il possible, et si oui comment, de déterminer le développement décimal d'un rationnel de la forme p/q, où q est un nombre premier, à partir du développement décimal de $1/q$?

Chaque binôme fabriquera ***expérimentalement*** des éléments techniques pour déterminer, si c'est possible, le développement décimal d'un rationnel de la forme p/q, où q est un nombre premier, à partir du développement décimal de $1/q$, et dégagera un ou des éléments technogiques les justifiant en précisant s'il est considéré comme expérimentalement avéré ou encore conjectural.
On fabriquera un dispositif permettant de garder la trace des expériences (couronnées de succès ou pas) effectuées, et on rendra les traces du travail effectué à l'issue de la séance en les envoyant par mel à l'adrel m.artaud@aix-mrs.iufm.fr.

On notera que :
1) On se place dans la position du professeur qui a à anticiper le travail possible effectué par des élèves. On se gardera donc, dans le temps du TD, d'élucider théoriquement le problème posé et on restera délibérément dans le cadre de l'exploration et de la justification expérimentale ; en outre on pourra, suivant l'avancée du travail, explorer plusieurs voies.
2) Outre la constitution d'une clinique de l'expérience de façon à pouvoir en mettre en place adéquatement avec les élèves, il s'agit également de se créer une clinique de la tenue des traces écrites : on ne négligera donc pas la mise en forme des résultats expérimentaux.

Pour les besoins du travail, on pourra recourir à des calculatrices en ligne, comme par exemple celle accessible par le lien ci-dessous : http://wims.univ-mrs.fr/wims/wims.cgi?session=DNFE1EC65E.2&+lang=fr&+module=tool%2Fnumber%2Fcalcnum.fr

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 22 : mardi 20 avril 2010

Programme de la séance. 1. Forum des questions // 2. Orientation // 3. Notice Questions & Réponses // 3. TER : contraintes de mise en forme // 4. Évaluation & développement : fabriquer des questions cruciales

À noter
Dead line pour le C2i2e : 4 mai 2010
Prochaine séance du séminaire : 4 mai 2010

1. Forum des questions

TER

En quoi consistera la présentation - soutenance - orale du TER ? Quels contenus ? Quelle(s) organisation(s) de la présentation ?

Comment se déroule la « soutenance » du TER ? Comment choisir la répartition de cette soutenance entre les stagiaires du trinôme (ou du binôme) ?

Pourrait-on avoir des conseils / informations sur le déroulement des soutenances des TER ?

Pour le TER, nous avons besoin des documents d'accompagnement mais ils sont protégés contre le « copier-coller ». Y-a-t-il un moyen de passer outre ?

Suite à la rédaction de l'évaluation des TER, plusieurs idées de développement ont ressurgi. Chacune de ces idées ont été mises en évidence car des lacunes, traitées par écrit, ont été remarquées. Si on choisit un de ces sujets de développement, doit-on retraiter les raisons de ce choix dans le développement ?

1. Voici d'abord un passage du document sur la formation et la validation relatif au TER :

Après sa réalisation en classe lors du SPA, et, du moins, si le choix du trinôme de TER s'est porté sur cette séance, une nouvelle vie va commencer pour $R_0^♥$.

4.3. La réponse $R_0^♥$ va en effet faire l'objet d'une ***analyse* a posteriori** et d'une évaluation corrélative qui mettront en évidence que, par rapport à un certain ***projet*** de développement conçu par le trinôme sous la direction du tuteur, certaines contraintes, consubstantielles à ce projet, ne sont pas satisfaites par $R_0^♥$. Analyse et évaluation de $R_0^♥$ font la matière de la première partie du mémoire professionnel qui en rend raison. Pour le trinôme de TER, $R_0^♥$ n'est plus dès lors qu'une réponse $R^◊$, à partir de laquelle il convient d'envisager la conception et la construction d'une nouvelle réponse, $R_1^♥$, satisfaisant au moins certaines des contraintes du projet.

4.4. Le travail effectué pour produire $R_0^♥$ va donc être repris à nouveaux frais pour produire $R_1^♥$: la présentation et l'analyse de ce nouveau travail de développement occuperont la seconde partie du mémoire professionnel du trinôme. Mais le développement de $R_1^♥$ se fera sous des conditions quelque peu différentes de celles qui avaient présidé au développement de $R_0^♥$, en particulier sur les points suivants.

– Alors que le travail de production de $R_0^♥$ avait été mené à bien dans une large autonomie, le travail de conception et de construction de $R_1^♥$ est encadré par un « directeur de mémoire ».

– Entre la production de $R_0^♥$ et la production de $R_1^♥$, la « science professionnelle » des élèves professeurs s'est en principe sensiblement accrue et va s'accroître encore dans l'effort même de production de $R_1^♥$.

– La réponse $R_1^♥$ ***ne sera pas mise à l'épreuve dans une classe***, mais devra être ***présentée et défendue*** devant le jury d'évaluation des mémoires professionnels. Le métier de professeur implique en effet que l'on se présente devant une classe donnée avec une construction de papier élaborée pour être diffusée ***dans cette classe-là*** et qui, par définition, ***n'y a encore jamais été mise en œuvre***. Tel est le lot du professeur : il n'est pas un expérimentateur qui aurait le droit d'engager sa classe dans une activité ***simplement « pour voir »*** ; en revanche, dans un fonctionnement ***rénové*** de son activité au sein de son établissement, il pourra avoir à présenter et à « défendre » une « préparation de cours », personnelle ou à visée collective, ***devant un séminaire d'établissement***. Ce dispositif, qui, certes, existe encore fort peu, devra se développer à l'avenir pour permettre la pratique ***intégrée***, tout au long de la carrière, d'un geste professionnel essentiel, accompli en principe par un ***collectif de professionnels***, celui qu'inaugure justement le TER au cours de la formation professionnelle initiale.

ÉVALUATION DU MÉMOIRE PROFESSIONNEL

1. La validation du mémoire professionnel est prononcée par un jury spécifique, siégeant en commissions d'examen de trois membres au moins, dont l'un assume la fonction de modérateur. Une commission d'examen ne peut examiner les élèves professeurs dont l'un de ses membres est le maître de stage, le tuteur, le visiteur ou le directeur de mémoire. Ce dernier peut faire connaître par écrit les informations qu'il juge utile de porter à la connaissance de la commission d'examen.

2. L'examen auquel la commission procède a pour support et en partie pour objet le ***mémoire de TER*** dont l'élève professeur est l'auteur ou l'un des auteurs. La commission dispose à l'avance de deux exemplaires de ce mémoire, dont deux membres de la commission qui ne l'ont pas dirigé ont pris connaissance préalablement.

3. Chaque élève professeur présente, ***pendant 10 minutes environ***, le mémoire de TER. Cette présentation est suivie d'un échange avec la commission ***de 10 minutes environ*** au cours duquel elle apprécie notamment la maîtrise par l'élève professeur de l'usage des TICE dans l'enseignement de sa discipline (compétence 8).

4. Sur cette base, et après en avoir débattu, la commission d'examen propose au jury d'évaluation des mémoires professionnels l'une des appréciations suivantes : ***non satisfaisant*** ; ***passable*** ; ***assez bien*** ; ***bien*** ; ***très bien***, assortie d'une note sur 20.

Commentaires oraux

2. Il y a bien entendu plusieurs techniques pour se répartir les interventions. Si une présentation strictement linéaire – *i.e.* dans laquelle le premier intervenant ne présente que l'analyse de la séance, le second l'évaluation et le troisième le développement – n'est pas conseillée, il n'en reste pas moins que le premier intervenant a la tâche de présenter les éléments essentiels de la séance observée de façon à rendre la soutenance intelligible pour le jury, et notamment le ou les membres qui n'ont pas lu le manuscrit. La voie à emprunter est sans doute de ne pas « suivre les parties du mémoire », mais de prendre du recul par rapport au manuscrit et de prévoir un découpage qui recouvre la plus grande partie du mémoire, en faisant ressortir des lignes de force du travail proposé.

3.Il est conseillé de présenter avec un support écrit (transparents ou présentation assistée par ordinateur) : par la structuration que sa préparation oblige à faire dans la présentation, un tel support permet de prendre du recul par rapport au travail effectué et d'optimiser le temps imparti à la présentation. Dans le cas de l'utilisation d'un ordinateur, vous pouvez utiliser un « fichier texte », ou encore un logiciel de présentation comme powerpoint ou impress. Veillez, si vous n'utilisez pas votre ordinateur portable, à l'enregistrer sous un format lisible par une majorité d'ordinateurs (docx, etc. à éviter...).

4. À moins de savoir « craquer » la protection des documents[31], la seule possibilité à ma connaissance consiste à retaper les parties du document à citer ou encore à en prendre une image par copie d'écran. La reconnaissance de caractères peut s'avérer utile : compte tenu des formules mathématiques, des graphiques et des colonnes, il est souvent plus rapide de retaper le passage cité.

5. En ce qui concerne la dernière question, il n'est pas utile de répéter ce qui a été dit dans les parties précédentes mais on peut justifier le choix de telle voie de développement par rapport aux autres. [Développé oralement]

Évaluation d'une praxéologie

Lorsqu'un élève a appris sa leçon et n'arrive pas à faire un exercice (en contrôle) qui utilise cette leçon, quel moment a été raté ? Le moment technologico-théorique ou le moment du travail des types de tâches ?

Travail collectif oral

Synthèse des éléments développés oralement
Bien évidemment, cela dépend de ce que signifie « apprendre sa leçon » et de ce que l'on entend par « exercice qui utilise cette leçon », et plusieurs moments peuvent être « ratés », l'échec de certains impliquant l'échec d'autres : le moment technologico-théorique, parce que par exemple on n'a pas donné suffisamment de moyens de contrôles ou qu'on ne s'est pas donné les moyens technologiques de fabriquer une technique suffisamment fiable et robuste – ce qui implique que le moment exploratoire, qui a vu surgir la technique n'a pas été bien mené non plus et qui suppose que la détermination et la constitution de l'OM par le professeur n'a pas été de bonne qualité ; le moment de synthèse, parce que par exemple la synthèse ne comprend pas une « description » des techniques ; le moment de travail de l'OM parce que par exemple plusieurs spécimens du type de tâches évalués n'ont pas été travaillés, ou encore que l'OM qui a émergée est insuffisamment développée et que le moment de travail n'a pas permis de reprendre le développement ; le moment d'évaluation lui même parce que l'exercice proposé comprend des types de tâches qui ne se situent pas dans la ZEN (zone d'étude normale) mais dans la ZEP (zone d'étude proche) ou dans la ZEL (zone d'étude lointaine).

Fonctions homographiques

En seconde, le programme indique qu'au sujet des fonctions homographiques, les élèves doivent uniquement savoir déterminer l'ensemble de définition. Comment peut-on alors motiver cette notion ? (JC, 2de, 20)

En classe de seconde, on doit introduire les « fonctions homographiques ». Dans le programme, la seule chose exigible est de savoir trouver l'ensemble de définition d'une fonction homographique. Je ne vois pas l'intérêt d'étudier ce cas particulier de fonction, sachant que l'on demande aux élèves de savoir uniquement trouver l'ensemble de définition. (SC, 2de, 20)

Voici ce que contient le programme de seconde sur les fonctions homographiques :

31 Pour les documents d'accompagnement, il ne s'agit vraisemblablement pas de protection contre la copie mais de manière de fabriquer le document (à partir d'images au lieu de le faire à partir de textes).

Études de fonctions Fonctions homographiques.	 • Identifier l'ensemble de définition d'une fonction homographique.	 Hormis le cas de la fonction inverse, la connaissance générale des variations d'une fonction homographique et sa mise sous forme réduite ne sont pas des attendus du programme.
Inéquations Résolution graphique et algébrique d'inéquations.	• Modéliser un problème par une inéquation. • Résoudre graphiquement des inéquations de la forme : *f(x) < k ; f(x) < g(x).* • Résoudre une inéquation à partir de l'étude du signe d'une expression produit ou quotient de facteurs du premier degré. • Résoudre algébriquement les inéquations nécessaires à la résolution d'un problème.	Pour un même problème, il s'agit de : • combiner les apports de l'utilisation d'un graphique et d'une résolution algébrique ; • mettre en relief les limites de l'information donnée par une représentation graphique. Les fonctions utilisables sont les fonctions polynômes de degré 2 ou homographiques.

Les fonctions homographiques apparaissant sous le titre « étude de fonctions », il s'agit bien d'étudier des fonctions homographiques. Ce que dit le programme, c'est que les élèves doivent savoir déterminer en autonomie didactique l'ensemble d'une définition d'une fonction homographique, mais qu'ils n'ont pas à savoir étudier en autonomie didactique une fonction homographique autrement qu'expérimentalement, notamment parce que l'élément technologique que serait la propriété donnant les variations des fonctions homographiques n'est pas au programme, pas plus que ne l'est la technique permettant de les mettre sous forme réduite. Autrement dit, on ne peut pas poser comme problème lors d'une évaluation ou d'un devoir hors classe : étudier la fonction $h(x)=\frac{2x-3}{4x+2}$ en attendant autre chose que la détermination de l'ensemble de définition et la mise en œuvre d'une technique expérimentale consistant à représenter sa courbe à la calculatrice et en déduire les variations. On peut en revanche poser l'exercice suivant :

On considère la fonction $h(x)=\frac{2x-3}{4x+2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de *h*.

2. Montrer que $h(x)=\frac{1}{2}-\frac{2}{2x+1}$

3. Montrer que la fonction *f* définie par $f(x)=\frac{2}{2x+1}$ est décroissante sur l'intervalle]-1/2 ; 4].

4. En déduire que la fonction *h* est croissante sur cet intervalle.

5. Déterminer les solutions positives de l'inéquation $\frac{2x-3}{4x+2}<\frac{1}{10}$.

En voici une solution qui reste dans ce que demande le programme à propos des fonctions homographiques.

1. h est définie pour les x tels que $4x+2\neq 0$. Or $4x + 2 = 0$ équivaut à $x=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$. L'ensemble de définition de h est ainsi $\left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right[\cup\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$

Vérification :

x	y1
-2.	1.1666666667
-1.5	1.5
-1.	2.5
-.5	undef
0.	-1.5
.5	-.5
1.	-.1666666667
1.5	0.

x=-2.

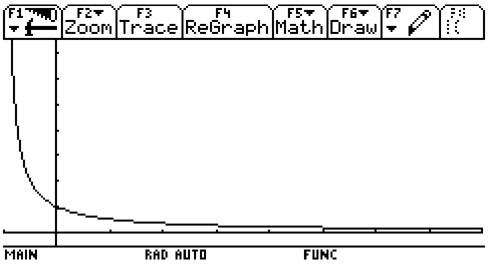
2.

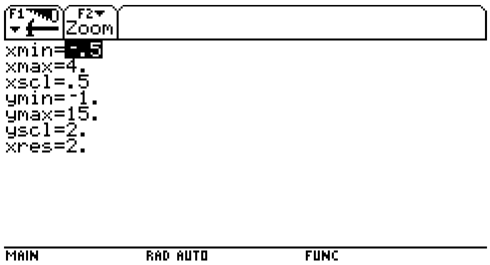
x	y1	y2
-2.	1.1666666667	1.1666666667
-1.5	1.5	1.5
-1.	2.5	2.5
-.5	undef	undef
0.	-1.5	-1.5
.5	-.5	-.5
1.	-.1666666667	-.1666666667
1.5	0.	0.

x=-2.

$\frac{1}{2}-\frac{2}{2x+1}=\frac{2x+1}{2(2x+1)}-\frac{4}{2(2x+1)}=\frac{2x-3}{4x+2}=h(x)$.

3.





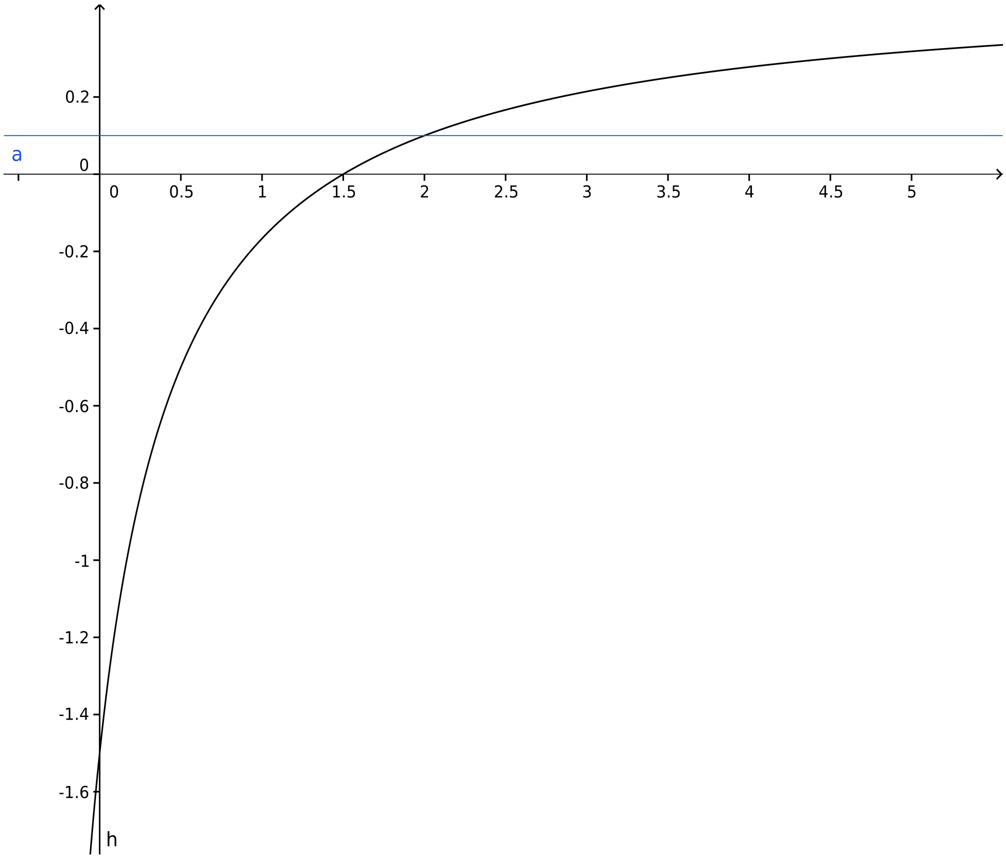
Soit a et b dans $\left]-\frac{1}{2}\,;4\right]$ tels que $a < b$. Alors $0 < 2a + 1 < 2b + 1$ puisque la fonction qui à x associe $2x+1$ est strictement croissante sur l'intervalle considéré et que $2\times-\frac{1}{2}+1=0$.

La fonction inverse étant décroissante sur $]0\,;+\infty[$, on obtient que $\frac{1}{2a+1}\geqslant\frac{1}{2b+1}$, et encore que $\frac{2}{2a+1}\geqslant\frac{2}{2b+1}$.

4. Soit a et b dans $\left]-\frac{1}{2}\,;4\right]$ tels que $a < b$. Comme f est décroissante sur l'intervalle, $f(a)\geqslant f(b)$ et

donc $-f(a) \leqslant -f(b)$, ce qui entraîne que $\frac{1}{2} - f(a) \leqslant \frac{1}{2} - f(b)$ soit finalement $h(a) \leqslant h(b)$.

5.



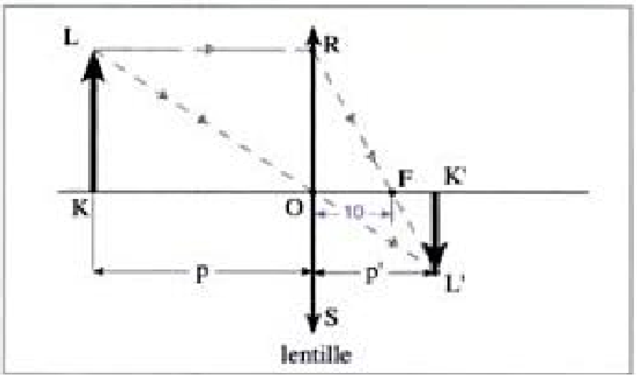
$h(2) = \frac{4-3}{8+2} = \frac{1}{10}$. Il s'agit donc de déterminer les solutions positives de l'inéquation $h(x) \leqslant h(2)$.

h étant croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2} ; 4\right]$, l'ensemble des solutions cherchées est [0 ; 2].

Bien entendu pour construire une telle organisation mathématique autour des fonctions homographiques, ou encore pour la travailler ***en classe***, rien n'interdit que l'on pose un problème qui nécessite l'étude d'une fonction homographique, le découpage de questions cruciales permettant de gérer le degré d'autonomie à laisser aux élèves comme on l'a vu avec les fonctions polynômes du second degré : la différence ici est que l'on ne va pas jusqu'à fabriquer une technique déductive pour l'étude des fonctions homographiques.

À cet égard, on signalera la situation suivante, qui conduit à une fonction homographique.

On considère le système optique suivant, pour lequel la lentille RS a une distance focale OF de 10 cm, et on note p la distance de l'objet [KL] à O, p' la distance de son image [K'L'] :



Quelles peuvent être les valeurs de p pour que la distance p' soit supérieure à 7 cm ?

Indication de solution : Le théorème de Thalès donne OF/FK'=OR/K'L'=KL/K'L', puis KL/K'/L'=OK/OK' ; on obtient donc que $\frac{p}{p'} = \frac{10}{10-p'}$ puis finalement $p' = \frac{10\,p}{10+p}$ et $p' \geqslant 7$ cm quand $p \geqslant (23 + \frac{1}{3})$ cm

On peut trouver sur Internet des simulations informatiques d'un banc d'optique qui permettent d'expérimenter sur le système, comme par exemple http://pagesperso-orange.fr/gilbert.gastebois/java/banc/banc.htm.

Je suis en train de préparer le chapitre Factorisation. Peut-on justifier la raison d'être de la factorisation par la résolution d'équation produit nul ? Ma future AER consiste à trouver les solutions de l'équation $(x-2)(x+5)=0$. Ainsi on fera émerger la technologie suivante : un produit de deux facteurs est nul si l'un au moins des facteurs est nul. Ainsi lors de la résolution d'équation du type $x^2+2x+1=0$ ou $x^2-2x=0$, ils essaieront de se ramener à un produit du type A B = 0 et donc découvrir la factorisation. Est-ce une AER correcte ? (AB, 3e, 19)

La question laisse penser que l'on part d'un type de tâches : déterminer les racines d'une équation de degré 2, et que l'on envisage la technique suivante :

si l'équation est sous la forme d'un produit de deux expressions du premier degré, déterminer le nombre pour lequel chacune de ces expression s'annule, a et b ; les racines de l'équation de degré 2 sont alors a et b.

si l'équation est sous une forme développée, se ramener à une forme factorisée et la résoudre sous la forme factorisée.

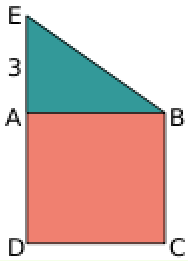
L'AER envisagée a d'abord pour objet de faire émerger la première partie de la technique, avant de faire émerger la deuxième partie permettant de motiver le travail de factorisation. Ce qui manque encore, en dehors d'un scénario ou d'un guide de direction d'étude, c'est un problème qui fasse apparaître la nécessité de la résolution d'une équation du type $(ax+b)(cx+d)=0$. La raison d'être de ces équations envisagée dans la question étant la résolution des équations du second degré, on peut donc penser à reprendre la chaîne des raisons d'être à partir de ces équations.

Un problème d'optimisation d'aire permet classiquement de donner une raison d'être à la résolution d'équations du second degré. Considérons par exemple le problème suivant, issu du manuel Sésamath 3e :

hode 5 : Mettre un problème en équation

Exemple : Sur le schéma, ABCD est un carré et ABE est un triangle rectangle en A tel que AE = 3 cm. Tous les points sont distincts.

Quelle doit être la longueur du côté du carré ABCD pour que son aire soit égale à l'aire du triangle rectangle ABE ?



Il conduit à résoudre l'équation $x^2 = 1{,}5\,x$.
Le travail exploratoire avec un tableur ou une calculatrice collège du type casio collège 2D+, auquel les élèves ont été habitués en 4e, permet d'aboutir aux solutions possibles : $x = 0$ ou $x = 1{,}5$.

x	x^2	$1{,}5x$
0	0	0
0,5	0,25	0,75
1	1	1,5
1,5	2,25	2,25
2	4	3
2,5	6,25	3,75
3	9	4,5
3,5	12,25	5,25
4	16	6
4,5	20,25	6,75
5	25	7,5
5,5	30,25	8,25
6	36	9

x	x^2	$1{,}5x$
0	0	0
1	1	1,5
2	4	3
3	9	4,5
4	16	6
5	25	7,5
6	36	9
7	49	10,5
8	64	12
9	81	13,5
10	100	15
11	121	16,5
12	144	18

Supposons maintenant que l'on ait AE = 4 ; on aboutit à l'équation $x^2 = 2\,x$ et le même travail fait apparaître que $x = 0$ et $x = 2$. En explorant d'autres valeurs de AE, on peut mettre en évidence qu'on a toujours deux solutions dont l'une est nulle, l'autre est la moitié de AE. Peut-on déduire cela de la théorie algébrique disponible et s'assurer que ce sont les seules solutions ?
La disponibilité de la notion de programme de calcul et d'équivalence de programmes de calcul d'une part, du calcul équationnel d'autre part, qui ont été étudiés en classe de 4e doit permettre d'aboutir. Plusieurs voies sont possibles. On peut noter que $x^2 = 2\,x$ équivaut à $x \times x = 2\,x$;

pourvu que x soit non nul, on est donc conduit à $x = 2$; si x est nul, l'équation est vérifiée. On peut encore écrire que $x^2 = 2x$ équivaut à $x^2 - 2x = 0$ soit encore à $x(x-2) = 0$, écriture qui permettra de faire émerger l'élément technologique cherché.

x	(x+1)(x+2)
0	2
1	6
2	12
3	20
4	30
5	42
6	56
7	72
8	90
9	110
10	132
11	156
12	182

Considérons une autre situation du même type : on part d'un carré de côté x cm ; on ajoute 1 cm à deux côtés opposés et on ajoute 2 cm aux deux autres côtés : peut-on obtenir un rectangle ayant pour aire 6 cm² ? La modélisation conduit à l'équation suivante : $(x+1)(x+2) = 6$ et une première exploration avec le tableur donne d'emblée une solution positive : $x = 1$.

Est-ce la seule solution ? Peut-on déduire cela de la TAD ?

On peut chercher à se ramener à une équation du type précédent. On obtient en développant $x^2 + 3x + 2 = 6$ soit encore $x^2 + 3x = 4$ qui ne permet pas de conclure mais qui permet de mettre en évidence que 1 est solution puisque $1^2+3 \times 1=4$. En remplaçant 4 par $1^2+3 \times 1$, on obtient alors que $x^2 + 3x = 1^2 + 3 \times 1$ soit par exemple $x^2 - 1^2 = 3(1-x)$ ou encore $x^2 - 1^2 + 3(x-1) = 0$ ce qui permet d'aboutir et d'obtenir une autre solution $x = -4$, qui n'est pas pertinente pour le problème posé.

Bien entendu, le scénario évoqué suppose que l'égalité remarquable $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ fasse partie du milieu. Si cela n'est pas le cas, il s'agira de la faire surgir en utilisant ce qui a permis de conclure précédemment : la « simplification par x » du programme $x \times x=2x$. On a en effet ici que $x^2 - 1^2 = 3(1-x)$. Pourrait-on mettre $x^2 - 1$ sous la forme de $(1-x) \times y$ qui permette de simplifier par $(1-x)$? Une expérimentation avec un tableur donne le résultat : on obtient facilement y en comparant $(1-x)$, puis y apparaît encore aisément sous la forme $-(x+1)$.

x	1-x	x²-1	y	-(x+1)
0	1	-1	-1	-1
1	0	0		-2
2	-1	3	-3	-3
3	-2	8	-4	-4
4	-3	15	-5	-5
5	-4	24	-6	-6
6	-5	35	-7	-7
7	-6	48	-8	-8
8	-7	63	-9	-9
9	-8	80	-10	-10
10	-9	99	-11	-11

On peut bien entendu pousser l'expérimentation avant de déduire ce fait de la théorie algébrique disponible en développant $-(1-x)(x+1)$.

Enroulement de la droite sur le cercle trigonométrique

Concernant la géométrie, je comprends parfaitement l'idée d'enroulement de $\mathbb{R}$ sur le cercle trigonométrique. Par contre, je ne vois pas trop comment l'expliquer et comment construire une AER dessus. (GBR, 2de, 17)

Dans le programme de seconde, il y au chapitre trigo / enroulement de $\mathbb{R}$ sur le cercle ! Comment motiver ce genre de chapitre ? Quelle raison d'être peut-on invoquer ? Comment mener une expérimentation sur ce genre de chapitre pour laisser du topos aux élèves ? (RB, 2de, 19)

Comment introduire de façon pertinente « l'enroulement de la droite numérique » ? L'utilisation d'un logiciel de géométrie me semble pertinente. Qu'en pensez-vous ? (AMJ, 2de, 20)

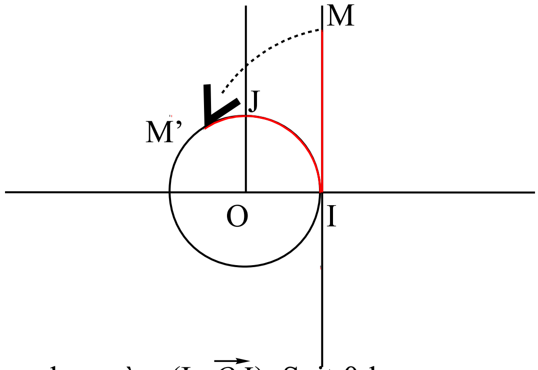
❶ À propos de la définition des ***fonctions*** sinus et cosinus, le programme de 2de comporte le contenu suivant :

« Enroulement de la droite numérique » sur le cercle trigonométrique et définition du sinus et du cosinus d'un nombre réel.

Le document d'accompagnement de l'ancien programme de seconde développait cette indication dans les termes suivants :

Un logiciel de géométrie dynamique sera alors particulièrement utile pour bien montrer comment l'ensemble des nombres réels *s'enroule* sur le cercle et comment varient les projections de l'extrémité d'un arc AM en fonction de la longueur de cet arc. Pour faire le lien avec les valeurs des sinus et des cosinus de 30º, 45º et 60º, on déterminera, sur le cercle trigonométrique, la longueur des arcs interceptés par ces angles remarquables et on établira les valeurs exactes des sinus et cosinus correspondants ; on introduira ici le radian pour mesurer l'angle au centre interceptant un arc du cercle trigonométrique avec le même nombre que la longueur de cet arc : on en restera à des mesures d'angles en radian comprises entre –π et π ou entre 0 et 2π.

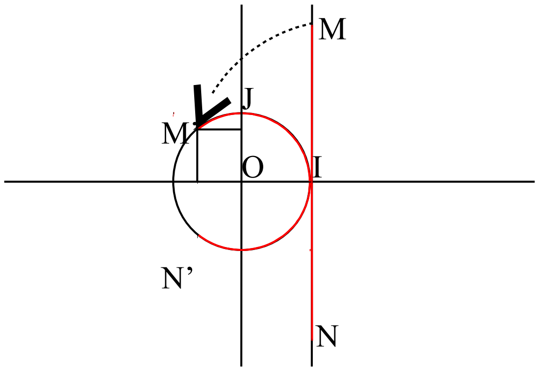
❷ L'enroulement évoqué peut être « matérialisé » par celui de la (demi-)droite (IM) comme le montre la figure ci-après : M vient en M' tel que la longueur de l'arc OM' soit égale à OM.



Soit t l'abscisse de M dans le repère (I, $\overrightarrow{OJ}$). Soit θ la mesure en radian de $\widehat{IOM'}$; on a : longueur de l'arc IM' = θ × 1 = t. Le point M' a donc pour coordonnées :

$$\begin{cases} x_{M'} = \cos\theta = \cos t \\ y_{M'} = \sin\theta = \sin t \end{cases}$$

❸ Le programme privilégie l'enroulement de [0, 2π[ou encore de [–π, π[(ci-dessous).



En conséquence, il n'apparaît pas utile de parler de mesure ***principale*** : que l'on choisisse de mesurer les angles avec les réels de l'intervalle [–π,π[ou de l'intervalle [0, 2π[, chaque angle aura ***une*** mesure, et non une infinité (même si les fonctions cosinus et sinus, définies sur ℝ, prennent une infinité de fois chacune de leurs valeurs).

❹ Si l'on admet comme « évident » l'enroulement de ℝ sur le cercle de rayon 1, ce qui est le point de vue du programme de 2[de], on peut alors ***définir*** les fonctions sinus et cosinus par

$$\begin{cases} \cos t = x_{M'} \\ \sin t = y_{M'} \end{cases}$$

Pour $t = 0$ on a M = I et donc

$$\begin{cases} \cos 0 = 1 \\ \sin 0 = 0 \end{cases}.$$

Le cercle trigonométrique étant de longueur 2π, pour $t = 2\pi$ on a de même M = I et donc

$$\begin{cases} \cos 2\pi = 1 \\ \sin 2\pi = 0 \end{cases}.$$

Plus généralement, on aura

$$\begin{cases}\cos 2\,k\,\pi = 1\\ \sin 2\,k\,\pi = 0\end{cases}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. On a de même

$$\begin{cases}\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi\right) = 0\\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi\right) = 1\end{cases}$$

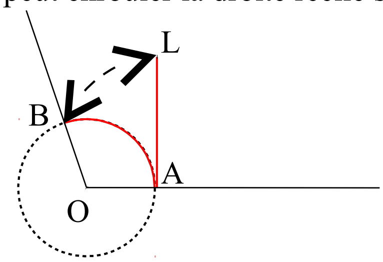
ainsi que

$$\begin{cases}\cos\left(\pi + 2\,k\,\pi\right) = -1\\ \sin\left(\pi + 2\,k\,\pi\right) = 0\end{cases}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$.

❺ Les résultats précédents restent vrais pour $k \in \mathbb{Z}$. On a de plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ et donc $-1 \leq \cos t, \sin t \leq 1$. Pour $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi\,;\, \dfrac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$, on a $\cos t = \sqrt{1 - sin^2 t}$ et, pour $t \in [2k\pi, \pi + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$, $\sin t = \sqrt{1 - cos^2 t}$, etc.

Pour mesurer un angle, l'idée de base, on l'a dit dans une séance antérieure du séminaire, est de mesurer la longueur de l'arc qu'il intercepte sur un cercle de rayon R centré en son sommet. Bien entendu, et comme le suggère la figure ci-après, admettre que l'opération est possible, c'est essentiellement admettre qu'on peut enrouler la droite réelle sur un cercle…

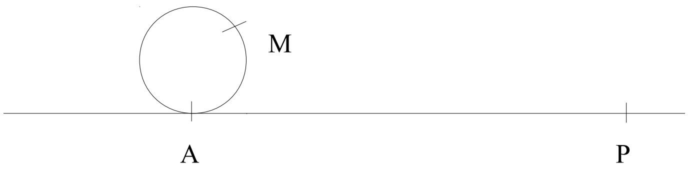


Il reste à déterminer un problème qui motiverait l'enroulement de la droite réelle sur un cercle.

Examinons la situation suivante :

Pour monter un numéro autour du parcours d'une piste linéaire par un monocycle, un duo de clowns cherche comment placer une marque sur la roue de façon à ce que la roue s'arrête sur cette marque lorsque l'on atteint un point fixé de la piste.

Un premier travail de modélisation permet d'aboutir au modèle géométrique suivant, où A est le point de départ sur la piste, P le point d'arrivée et M la marque posée sur la roue.



En supposant que l'on connaisse le rayon du monocycle, R, et que AP soit donnée, il suffit de diviser AP par $2\pi R$ et de la mettre sous la forme $n + \alpha$, avec n entier et α compris entre 0 et 1 : $2\pi R\alpha$ donne alors la longueur de l'arc AM. Le problème est que cette technique ne peut pas être mise en place par les clowns en situation, et même la préparation de marques s'avère peu aisée (il faut enrouler une ficelle autour de la roue en faisant plusieurs tours). Plusieurs voies d'exploration peuvent alors être envisagées : on peut déterminer les points d'arrivées possibles pour arriver sur une marque M simple à repérer : le quart de la roue, la moitié, ... puis envisager d'exploiter les rayons de la roue, etc. ; on peut également chercher à déterminer M pour qu'il coïncide avec P.

À suivre

2. Problématique et fonctionnement du séminaire

1.1. La prochaine séance a lieu le 4 mai 2010. Celle séance sera suivie d'un TD TICE pour le deuxième groupe et verra une rubrique de recherche dans les archives.

a) Une première recherche dans les *Archives* tentera de répondre à la question suivante :

Que nous disent les Archives du Séminaire sur la question de ***la gestion de l'hétérogénéité et de la diversité*** ?

• Le compte rendu de la recherche s'efforcera de présenter (en les choisissant adéquatement) des matériaux pour une réponse aux questions de la semaine ci-après éventuellement présents dans les *Archives*.

1. J'ai une poignée d'élèves que je dois motiver constamment et pour qui les maths sont diaboliques. Le problème c'est que si je leur consacre du temps, certains de mes élèves intéressés s'ennuient et réciproquement, si j'essaie de faire des choses un peu évoluées, certains décrochent. Comment gérer cette hétérogénéité à travers les exercices, les activités ? (RB, 7)
2. Au cours d'un chapitre, vient un moment où seule une partie des élèves a compris le cours (disons la moitié de la classe). Comment gérer l'hétérogénéité du groupe ? (SB, 2)
3. Comment gérer l'hétérogénéité de la classe lorsque l'on fait une séance d'exercices ? (SC, 2)
4. Comment gérer l'hétérogénéité d'une classe ? Certains comprennent vite et finissent les planches d'exercices alors que d'autres ne maîtrisent toujours pas les notions. Faut-il donner des exercices supplémentaires à ceux qui ont fini avant les autres ou prendront-ils ça comme une injustice d'avoir des exercices en plus ? Faut-il passer moins de temps à expliquer à ceux qui ne comprennent toujours pas ? (FD, 3)
5. Quels moyens peut-on mettre en place au moment de l'OM lorsqu'on a une classe hautement hétérogène pour que les meilleurs ne s'ennuient pas et ne pas « lâcher » les plus faibles .

Dernier DS :	étendue :	0 → 19,5	
	répartition	14 élèves : note < 7	
		11 élèves : note >= 12	
		9 élèves : 7 <= note < 12	(JLH, 14)

6. Comment gérer l'hétérogénéité des niveaux dans une classe au cours d'une activité ou d'une séance d'exercices d'application ? (PR, 4)
7. Dans une classe, j'ai de très bons élèves qui terminent les activités et les exercices très rapidement. Dois-je leur donner des exercices supplémentaires pour qu'ils attendent sachant que les autres n'auront pas le temps de les faire ? (TL, 2)

b) La deuxième recherche dans les *Archives* aura trait à la question suivante :

Que nous disent les Archives du Séminaire sur la manière de terminer l'année et en particulier de ***finir le programme*** ?

• Le compte rendu de la recherche s'efforcera de présenter (en les choisissant adéquatement) des matériaux pour une réponse aux questions de la semaine ci-après éventuellement présents dans les *Archives*.

1. Est-ce « mal vu » de finir le programme de quatrième par les thèmes Statistique et Volume, sachant qu'ils sont considérés comme "moins importants" que les autres par les collègues ? (GS, 11)

2. D'après ma progression et ce que j'ai fait comme chapitre depuis septembre, je pense que je ne vais pas finir le programme car il me manque une semaine à peu près. Quels sont les moyens pour y remédier ? (AB, 13)

3. Le programme de quatrième me semble énorme et je crains déjà de ne pas pouvoir le finir (alors que je ne m'estime pas en retard par rapport à mon PCP ni aux autres collègues). Est-il judicieux de choisir un chapitre (avec les collègues) que l'on ne traitera pas afin que les élèves arrivent en troisième avec les mêmes bases ? (AM, 15)

4. Lorsqu'on sent qu'on est en retard dans le programme, faut-il privilégier certains chapitres ? (ME, 13)

1.2. Faisons le point !

Se former

Questions sur la formation : Pourquoi ne sont pas développés les points suivants : gestion de classe avec mise en situation, jeux de rôles ; psychologie de l'adolescent / développement ; partenaires de l'Éducation Nationale / organismes sociaux ; comment organiser une séance (plusieurs stagiaires de différentes disciplines ont des feuilles d'élaboration et d'analyse de séance avec chronologie, objectifs, dispositifs, etc.) ? Certains points sont vaguement abordés en FIT mais, à mon goût , trop de choses restent à la charge autodidacte des stagiaires.

1. Il y a beaucoup de points qui devraient être davantage développés dans la formation d'un professeur : les choix faits relèvent de conditions et de contraintes de niveaux quelquefois « élevés » dans l'échelle de codétermination, et par exemple le temps que la société décide d'allouer à la formation d'un élève professeur. Il n'en reste pas moins que, même dans un cas plus favorable où il y aurait davantage de temps de formation, ce métier nécessite d'acquérir une capacité à se former que matérialise la dixième compétence du cahier des charges. Les outils

théoriques que nous avons étudiés donnent des outils pour cela : nous y reviendrons dans la suite du séminaire (Notice questions & réponses). Nous apporterons ici des commentaires sur deux sujets évoqués par la question : la gestion de la classe et l'organisation d'une séance.

2. Du point de vue de la gestion de la classe, les éléments technologico-théoriques « génériques » sont étudiés en séminaire de DDM et en FIT en montrant comment ils peuvent produire des techniques. La mise en situation se fait toutes les semaines en classe, dans le stage en responsabilité, avec le maître de stage pour analyser les techniques mises en place, les évaluer, donner des conseils pour les développer. La première visite permet de faire un point sur le travail accompli depuis le début de l'année et de donner des éléments complémentaires. Faire des jeux de rôles n'apporterait pas grand chose de plus à la grande majorité des élèves professeurs qui apprennent la gestion de la classe avec le dispositif décrit précédemment : c'est un dispositif utile lorsque l'on ne peut pas avoir accès à des expérimentations « directes ». Pour la petite partie restante qui a des difficultés de ce point de vue, les problèmes rencontrés tiennent à beaucoup de facteurs dont certains sont assez liés aux éléments technologico-théoriques des praxéologies qui ne seraient pas battus en brèche par un jeu de rôles :une partie de ces élèves professeurs par exemple pensent qu'ils n'ont pas à sévir, ou que c'est trop coûteux, etc. ou encore ont des difficultés plus personnelles qui auraient beaucoup de mal à s'exprimer dans le cadre d'un jeu de rôles. Il ne faut en outre pas négliger la part importante de gestion de la classe liée à la fabrication et à la réalisation de l'OD, tout comme celle liée à l'état de la société qui semble prendre davantage d'importance ces dernières années au sens où l'on a affaire à des changements importants.

3. Du point du vue de l'organisation d'une séance, nous avons donné dès le début de l'année des outils pour analyser une séance, certes sans donner une structuration en fiches parce qu'elle a l'inconvénient de renforcer le point de vue culturel qui met en avant la structure en masquant les fonctions. Nous avons introduit quatre rubriques :

1. Structuration et contenu de la séance

2. Organisation mathématique

3. Organisation didactique

4. Gestion de la séance

À l'exception de la quatrième qui est relative à l'analyse et à l'évaluation, les trois premières sont également relatives à la préparation de la séance. Nous avons enrichi le travail en détaillant les ingrédients de l'organisation mathématique et de l'organisation didactique à préparer et à mettre en place, et notamment pour l'organisation de l'étude les moments de l'étude qu'il s'agit de réaliser, la manière de les réaliser en s'assurant qu'il y a suffisamment de *topos* et de milieu pour cela (et notamment en préparant une arborescence de questions cruciales). Bien entendu, le GFP a passé du temps, et notamment au début de l'année, à travailler sur ce type de tâches et le mémoire participe de ce travail. On notera cependant que l'échelle de la séance n'est pas le meilleur étalon et c'est à l'échelle de la séquence qu'il faut travailler, la préparation de la séance se découpant dans celle de la séquence. Nous avons synthétisé une partie de ce travail dans la séance 12 du séminaire et on pourrait le structurer en « fiche de préparation » dans un premier temps de la façon suivante.

Préparation de l'étude sur le thème thêta

1. Structuration et contenu de la séquence

1.1. Secteur et domaine dans lequel s'insère le thème ; éventuellement lien avec d'autres domaines ou secteurs. Reprise de l'étude.

Extraits de programmes pertinents

1.2. Programmation de l'étude

Du lundi 26 avril 2010 au jeudi 26 mai 2010 ; traité en parallèle avec le thème thêta'

Lundi 26 avril 2010 : test d'entrée ;

jeudi 29 avril 2010 : travail transitionnel sur le test d'entrée et début de l'AER ; travail à faire pour le lundi 31 mai 2010.

etc.

2. Organisation mathématique

Types de tâches : T1, T2, T3.

Articulation des types de tâches.

Techniques :

Prévoir des étapes de contrôle dans les techniques et examiner la portée des techniques

Environnement technologico-théorique

Les éléments technologiques ; leur déduction possible.

Raisons d'être de l'organisation mathématique

3. Organisation de l'étude

3.1. AER 1 : permet de réaliser le moment de première rencontre, le moment exploratoire et le moment technologico-théorique relatifs à l'OM fabriquée autour de T1 et T3.

Problème

Réalisation du moment de la première rencontre

Réalisation du moment exploratoire :

Questions cruciales ;

Milieu nécessaire ;

etc.

Réalisation du moment technologico-théorique :

Est-ce que l'ingrédient de technique mis en place est valide ? , Qu'est-ce qu'il faudrait vérifier pour qu'il le soit ?

Émergence de θ_1 ; Est-ce vérifié ?

Prévoir la vérification expérimentale (TICE ; en collectif ou en binômes) ;

Peut-on le déduire de la théorie disponible ?

Bilan d'étape : institutionnalisation contextualisée de l'OM relative à T1 et T3.

3.2. Travail de l'organisation mathématique relative à T1 et T3

Exercices 1 et 2 de la feuille 1.

etc.

À suivre

3. Orientation : les enjeux de l'orientation

Deux autres rapports ont étudié et évalué la question de l'orientation. Le premier (chronologiquement) émane, lui aussi, du Haut Comité pour l'Évaluation de l'École et son titre est « L'évaluation de l'orientation à la fin du collège et au lycée » et dont le sous-titre est, significativement « Rêves et réalités de l'orientation » (rapport Hénoque - Legrand, mars 2004).
Dès la premier chapitre, ce rapport souligne la difficulté de l'orientation à concilier deux tâches parfois contradictoires, qui lui sont confiées. En effet, le mot « orientation » désigne d'une part, le processus qui répartit les élèves dans différentes voies de formation, filières et options et, d'autre part, l'aide aux individus dans le choix de leur avenir scolaire et professionnel.
Dans ce chapitre, intitulé « *Deux objectifs qui s'entrecroisent en permanence : gestion des flux et projet individuel*. », il est précisé :

> Nous sommes certes conscients, pour reprendre la formule utilisée par de bons auteurs, que « l'orientation n'est pas un mécanisme scolaire en soi, (qu') elle n'est que la projection dans l'espace scolaire d'enjeux extérieurs à l'École »; ou, pour citer encore Jean Michel Berthelot, que « l'orientation formelle est inscrite dans un processus sociétal qui la détermine le plus souvent ».

Pour l'essentiel, ce rapport montre que les lois et réformes vont aller, des années 50 à aujourd'hui, de plus en plus vers « le projet individuel » et laisser de côté « la gestion des flux ».
Cette dernière période en particulier est dominée par la notion de « projet » de l'élève et celle d'éducation à l'orientation (EAO) avec ses trois composantes : connaissance de soi, connaissance des métiers, connaissance des filières. Le rapport émet quelques critiques à ce sujet :

> D'une part, c'est aux élèves le plus en difficulté que l'on demande paradoxalement une maturité que l'on n'exige pas des autres. L'expression même « d'éducation à l'orientation » est ambiguë, car elle peut être perçue comme une volonté de rendre les jeunes gens responsables de leur situation, éventuellement de leur échec, voire de leur situation de chômeur, au motif qu'ils auraient fait un mauvais usage de leur autonomie. Elle peut être aussi entendue comme le moyen de faire accepter par l'élève les choix en réalité décidés par l'institution elle même. L'EAO, indique la circulaire du 31 juillet, « n'évite pas la confrontation des désirs des élèves avec les exigences des formations et les contraintes de l'affectation ». Comme l'écrivent Dubet et Martinelli reprenant des constatations largement faites par les spécialistes, le projet concerne surtout les élèves en difficulté : « Ils doivent transformer en projet personnel leur orientation vers des filières non choisies, pour lui donner quelque sens ». C'est, ajoutent-ils en soulignant la coexistence entre un discours officiel sur le projet de l'élève et des pratiques clairement contradictoires des enseignants et des élèves », l'obligation d'« accommoder au mieux ce qui reste possible après l'échec ».

Les sous-titres du paragraphe consacré au « projet » sont assez parlant : *Une trop grande polysémie du terme; Des relations bien complexes entre projet et orientation ; Quelle réalité pour un projet établi sous injonction ?*
De même, la conclusion de ce paragraphe :

> Est-il éducatif ou paradoxal d'inciter les élèves à se construire un projet personnel dès lors que les contraintes qu'ils subissent restreignent constamment le champ des possibles : l'environnement n'est plus ouvert. A moins bien sûr que la rhétorique du projet ne poursuive un autre objectif ; celui de faire accepter les contraintes par les étudiants eux-mêmes, voire de les en rendre responsables. L'injonction au projet se justifierait alors par le souci de convaincre les vaincus qu'ils sont les auteurs de leur échec. Ce n'est pas l'opinion des auteurs qui n'acceptent pas cette interprétation mais restent prudents voire dubitatifs quant à l'utilisation faite du «

> projet » et souhaitent que cet aspect soit aussi évalué dans le futur.

Après avoir étudié la question de l'information et ce qui se passe chez nos voisins, le rapport propose dans un dernier chapitre « Quelques outils et procédures à mettre en œuvre ».
La première recommandation porte sur la nécessité d'un pilotage politique :

> Le pouvoir politique ne peut pas faire l'économie de définir lui-même ce qu'est une « orientation réussie ». Il doit rappeler que ce n'est pas nécessairement celle qui a été rêvée, ou celle qui est d'emblée la mieux acceptée, mais que c'est celle qui concilie au mieux les aptitudes et la motivation de l'élève, pour faciliter sa meilleure insertion professionnelle possible. Le premier des courages serait de rappeler à tous les acteurs que choisir, c'est d'abord renoncer et que tout choix implique difficulté par sa confrontation au réel.

Il suggère ensuite, afin d'améliorer le fonctionnement du système de « Définir plus clairement le pouvoir et les compétences des acteurs du système » et de « Renforcer la coordination entre les différents services publics s'occupant d'orientation ». C'est évidemment du lien entre professeurs en Conseillers d'Orientation Psychologue dont il est particulièrement ici question.

On poursuit notre instruction en prenant connaissance de plusieurs passages d'un ouvrage consacré à l'école en général par un observateur extérieur mais familier du monde scolaire et, dans l'ensemble, plutôt bienveillant à son endroit, Hervé Hamon. À l'origine professeur de philosophie devenu journaliste et écrivain, Hervé Hamon a été membre du Haut Conseil de l'évaluation de l'école et a tenu pendant des années une chronique dans le Monde de l'éducation. Auteur d'un premier ouvrage remarqué, *Tant qu'il y aura des profs* (1984), il a publié vingt ans après *Tant qu'il y aura des élèves* (Seuil, Paris, 2004), livre désormais disponible en poche, où il revisite le système éducatif français et dans lequel il s'arrête longuement sur la question de l'orientation.

• Le premier extrait que l'on parcourra (*op. cit.*, pp. 98-99) souligne ce qui apparaît à l'auteur comme une « anomalie » française.

> Le chapitre le plus sensible de ce dossier tourmenté, c'est, fatalement, l'orientation des élèves. Si le label des diplômes est aussi crucial, si le cursus des années de formation annonce à ce point la configuration d'une vie, alors, logiquement, le moment de l'orientation est une étape très lourde de conséquences scolaires et extrascolaires. C'est celui où l'école agit directement, explicitement, sur la condition présente et future de l'élève, où l'on ne saurait se borner à dire qu'elle est passive, involontairement tributaire de son environnement, traversée par des forces qui lui sont étrangères.
> Le choix français, en la matière, est une fois encore assez singulier : il confère à cette école, et aux enseignants, la charge quasi exclusive d'une décision qui, en elle-même, n'est pas incluse dans le contrat du maître, lequel revient à instruire et à éduquer. Les chercheurs insistent volontiers sur cette anomalie, soulignant que « l'orientation n'est pas un mécanisme scolaire en soi : elle n'est que la projection dans l'espace scolaire d'enjeux extérieurs à l'école [1. Marie Duru-Bellat, Jean-Pierre Jarousse et Georges Solaux, « S'orienter et élaborer un projet au sein d'un système hiérarchisé : une injonction paradoxale ? », in L'Orientation scolaire et professionnelle, 1997] » Il n'empêche : la France qui s'identifie passionnément à son système éducatif, qui aurait pu déléguer à des instances autres, professionnelles ou étatiques, le soin d'exploiter l'information transmise par les enseignants, reste farouchement adepte du « tout à l'école ». Celle-ci, note un spécialiste averti, Bernard Charlot, « fonde de plus en plus sa légitimité sur son propre fonctionnement, justifiant ce qu'elle propose à un niveau par ce qu'elle impose au niveau supérieur. Dès lors, le sens de l'école devient l'école elle-même, plus d'école encore, passer dans la classe supérieure, le bon cycle, la bonne section, la bonne option [2. Bernard Charlot, L'École en mutation, Paris, Payot, 1987]. » En termes vulgaires, l'école contrôle simultanément le terrain, les règles du jeu, la partie, les joueurs, les spectateurs et

l'arbitre.

• Traditionnellement, l'orientation scolaire opère par soustraction par rapport à un modèle idéal, et non par composition de qualités (ou de potentialités) reconnues à l'élève (ou conjecturées en lui) : elle est une orientation « négative » *(ibid.*, pp. 100-101).

> Indépendante, l'école l'est peut-être (et peut-être à l'excès). Juste et performante quand elle prononce des orientations, elle ne l'est certainement pas. Hors les murs, le fait n'est avoué que du bout des lèvres. En interne, c'est le secret de Polichinelle. Combien de professeurs, parmi mes interviewés, ont exprimé, là-dessus, plus qu'un trouble ? Combien disent leur doute et leur scrupule à l'issue des conseils de classe ? Une ample majorité – tant que les parents ne sont pas là pour les entendre.
> Pourquoi ? Parce que le « roc » n'est pas si ferme, ou que s'il l'est, ce n'est pas, en maintes circonstances, au bénéfice de l'élève. Le « tout à l'école » devrait offrir une garantie d'équité. Mais nous sommes loin du compte. Car l'orientation, depuis toujours, est obstinément « négative ». Orienter un élève, le plus souvent, n'est pas détecter ses aptitudes mais ses inaptitudes. L'école, écrit Robert Ballion [1. L'Évolution de la fonction d'orientation, rapport à la Commission des communautés européennes, octobre 1987], observateur pénétrant, « sanctionne l'adéquation des performances de l'élève aux exigences de l'institution, ou plutôt l'inadéquation de ses performances, dans la mesure où, en règle générale, l'orientation est négative : l'élève orienté étant l'élève qui n'est pas jugé apte à suivre un cursus donné ».
> Comme il existe, au Conservatoire des poids et mesures, un mètre étalon fixant une fois pour toutes le gabarit de tous les mètres, on peut imaginer qu'il existe, dans l'imaginaire collectif de la planète scolaire, un élève étalon : celui qui sera reçu premier à l'école des Mines et à celle des Ponts et Chaussées, ou bien à Polytechnique et à l'ENA réunies. Cet élève étalon, toujours dans l'imaginaire collectif, n'est pas l'exception. Il fixe la norme. Et tout élève en chair et en os se présentant à la porte de son collège ou de son lycée est cet élève-là moins quelque chose. Il ne sera pas défini par ses qualités, il sera défini par ses carences. L'orienter ne consistera pas à inventer avec lui la trajectoire la plus appropriée, mais à l'écarter, vu ses manques, de la trajectoire parfaite, celle que trace l'élève étalon.

• L'orientation pratiquée à l'école n'est pas seulement vécue par les professeurs comme une réalité plus ou moins douloureuse ou malheureuse. Des observateurs dont la mission n'est nullement de « charger » l'école, les corps d'inspection, les rejoignent sur un constat qui, semble-t-il, n'épargne personne (*ibid.*, pp. 107-108).

> … les phrases les plus sévères émanent d'une institution à laquelle on prête volontiers un langage feutré : l'Inspection générale. Dans un document de synthèse –non public – destiné au ministre, au cabinet, aux directeurs de la Centrale et aux recteurs, et rassemblant les observations des inspecteurs de terrain, en particulier départementaux, le jugement porté sur le dispositif d'information et d'orientation oublie totalement d'arrondir les angles [1. Les Académies sous le regard des inspections générales, bilan des dix premières évaluations de l'enseignement en académie, cosigné par l'Inspection générale de l'Éducation nationale (IGEN) et l'Inspection générale de l'administration de l'Éducation nationale et de la Recherche (IGAENR) – quatre rédacteurs par corps –, non publié, juin 2003] : « Tous les rapports d'évaluation soulignent la mauvaise qualité de l'orientation et de tout ce qui touche à la construction du projet personnel de l'élève. Ils relèvent le manque d'investissement des professeurs principaux, des chefs d'établissement, parfois des conseillers d'orientation psychologues (COP) eux-mêmes. Quant à son contenu, l'orientation reste dominée par les parcours traditionnels et offre peu d'alternatives aux élèves. »
> À l'appui, le document cite les comptes rendus académiques. « Le rapport Créteil note que les enseignants sont "relativement indifférents à leur responsabilité en ce domaine comme aux conséquences de leurs décisions". Le rapport Nice conclut : "L'orientation fonctionne bien là où elle est la moins nécessaire : dans les établissements où les élèves obtiennent de bons résultats

> et où leurs familles savent trouver les informations. En revanche, dans les secteurs défavorisés économiquement, le travail à faire reste important pour que des jeunes ne se retrouvent pas abandonnés à eux-mêmes..." Les observations conduites dans l'académie d'Orléans-Tours ont montré que les COP et les professeurs principaux s'en remettent, en matière d'éducation à l'orientation, aux outils de l'ONISEP [1. Office national d'information sur l'enseignement et les professions, créé en 1970], bien davantage qu'à leur propre connaissance du contexte économique et professionnel, local et national, qu'ils estiment eux-mêmes limitée. Le même constat vaut pour les chefs d'établissement… »

Enfin, un dernier rapport sur l'orientation, celui de M. Duru-Bellat qui date de février 2007, se conclut par un constat :

> En bref, l'orientation apparaît donc inégalitaire - de part la réussite inégale qu'elle sanctionne et les inégalités de demande qu'elle entérine -, incohérente - car non fondée sur des estimations standardisées de la valeur scolaire et affectée par des contingences locales dont l'offre existant sur place -, uniquement scolaire, passive - ou réactive, au sens de non active - et non pilotée.

quelques pistes soumises au débat :

> 1) Asseoir les orientations sur un socle commun solide effectivement maîtrisé par tous rendrait les choix moins inégaux et moins irréversibles.
> 2) Tenir compte, dans les décisions d'orientations, de mesures objectives de la valeur scolaire
> (partie commune du brevet, par exemple) rendrait l'orientation moins incohérente.
> 3) Rééquilibrer le poids des critères scolaires par une prise en compte plus forte, plus active, de la connaissance du monde des professions (elle-même assez précoce pour motiver les élèves à se doter du niveau scolaire nécessaire) rendrait l'orientation plus pertinente. Plutôt que des questionnaires d'intérêts, mieux vaudraient de vrais mini-stages, encadrés et évalués. Une chose est sûre, il convient de donner à ce type d'activités l'importance qu'elle mérite, avec des intervenants qui soient de « vrais » professionnels et non des spécialistes du projet personnel ; pourquoi ne pas mobiliser pour ce type d'activités des retraités de tous horizons…
> Il reste que l'école elle-même n'est pas dépourvue de responsabilités en la matière : tant le rapport de la commission Hetzel que le dernier rapport du HCEE préconisent le rétablissement des TPE (travaux pédagogiques encadrés) pour développer le travail sur projet,
> une certaine pluridisciplinarité, et, pourquoi pas, une ouverture systématique à une problématique professionnelle.
> 4) Repenser les itinéraires, avec des filières moins spécialisées, des orientations moins irréversibles, des passerelles plus nombreuses à tous les niveaux, ce qui suppose un niveau scolaire minimum (cf. point 1) permettrait de mieux mobiliser tous les talents. Il est certain que tant que les formations continues resteront dans notre pays si peu répandues (et accessibles surtout aux plus instruits), les questions d'orientation scolaire resteront des plus tendues – il ne faut pas laisser passer sa chance puisqu'on ne peut rejouer l'épreuve - et donc d'autant plus délicates.

et se termine par ces mots :

> Une politique de l'orientation des jeunes, c'est donc aussi une politique de l'accueil des jeunes dans le monde du travail et cela devient vite, aussi et plus largement, une politique de la répartition (juste et efficace) des emplois et des conditions de travail. L'orientation oblige l'école à se confronter au vaste monde et ce n'est pas l'enjeu le plus facile !

qui nous rappelle l'échelle de codétermination didactique.

4. Notice Questions & Réponses

On examinera ici la 6e partie de la notice Questions & réponses, que nous reproduisons ci-dessous.

6. Produire une réponse : vers une nouvelle épistémologie scolaire

6.1. Apporter une réponse R à une question Q, ou, comme on le dira aussi, ***développer*** une telle réponse [32], se réalise sous des conditions et des contraintes qui dépendent de manière ***spécifique*** du contenu de la question Q : on ne répond pas à la question « Comment déterminer le nombre de boîtes de 6 œufs juste suffisant pour transporter 250 œufs ? » comme on répond à la question « Quel jour de la semaine était le 16 octobre 1843 ? », par exemple. Pourtant, dans tous les cas, les « étudiants [33] » x qui tentent de construire R doivent se plier à une ***discipline*** minimale : rechercher – et exploiter adéquatement – les ***ressources didactiques*** qui pourraient permettre d'élaborer une réponse R idoine. Ces ressources comportent essentiellement des ***connaissances*** et des ***savoirs***, des ***outils d'expérimentation, de raisonnement et de calcul***, toutes réalités qu'on rangera dans la catégorie très large des ***œuvres***, produits intentionnels de l'activité humaine (quand bien même leurs effets ***réels*** ne seraient pas ***tous*** délibérés), et plus particulièrement dans cette sous-catégorie essentielle des œuvres susceptibles de fonctionner comme ***outils de création d'autres œuvres***.

6.2. Par un phénomène de ***méprise épistémologique***, la construction d'une réponse R à une question Q vient généralement buter sur le problème de l'identification des œuvres susceptibles d'apporter à cette entreprise des matériaux et des outils pertinents. Un épisode bien documenté de la guerre des codes secrets fournit de ce type d'obstacles un exemple frappant : avant la Seconde Guerre mondiale, les services britanniques chargés de « casser » les codes employés par l'armée allemande, qui utilisait la fameuse machine *Enigma*, avaient cru bon de recourir à des… épigraphistes, spécialistes des langues anciennes, lesquels, par une identification culturelle trop rapide, furent regardés en un premier temps comme les mieux à même de déchiffrer les messages interceptés [34]. Dès 1932, les services de renseignement de divers pays (France, Grande-Bretagne, Pologne) disposèrent des instructions d'utilisation de la machine, qui devaient permettre d'en inférer les câblages. Seuls les Polonais y parvinrent, pour une raison qu'un historien de ce domaine rapporte dans les termes suivants [35] :

> The difference was that the Polish department employed three energetic mathematicians, who were able to use the papers to deduce the wirings. Highly ingenious observations, good guessing, and the use of elementary group theory, produced the rotor wirings.

Dès la fin des années 1920, les services polonais avaient en effet recruté trois étudiants en mathématiques, dont l'un fut d'ailleurs envoyé se former à l'université de Göttingen, haut lieu des mathématiques allemandes, dont David Hilbert (1862-1943) était alors le chef de file incontesté. Par contraste, ce n'est qu'en 1938, à la veille de la guerre, que les services britanniques feront appel à des mathématiciens de haut niveau, dont surtout Alan Turing (1913-1954), qui réussit (avec W. G. Welchman) à percer le code allemand et joua ainsi, indirectement, un rôle décisif dans l'issue de la bataille de l'Atlantique. Les savoirs pertinents étaient en l'espèce des savoirs de mathématicien plutôt que des savoirs d'helléniste ou de latiniste.

6.3. La capacité à reconnaître les sous-tâches t de nature essentiellement mathématique qui peuvent surgir dans l'accomplissement d'une tâche donnée reste faiblement développée dans la culture scolaire actuelle. En outre, même lorsqu'une telle sous-tâche est facilement identifiable, le problème de la capacité à mobiliser

32 En un sens technique du mot, développer c'est ***concevoir, créer, mettre au point un « produit »***, quelle que soit la nature – matérielle ou immatérielle – de l'entité à produire.

33 En français, le mot d'étudiant a pris une acception restrictive, ce qui n'est pas le cas en anglais par exemple, où l'on parle aujourd'hui encore de *student of topology* pour désigner un spécialiste de topologie ; le castillan, lui, distingue l'*estudiante*, l'étudiant au sens français du terme, de l'*estudioso*, l'étudiant au sens large, ***celui qui étudie*** une question ou un domaine de questions. C'est en un tel sens élargi que ce mot est pris ici : il s'applique au « savant » comme à l'élève de l'école primaire.

34 L'épigraphie a pour objet l'étude des inscriptions gravées sur pierre, métal, etc. Son apport est essentiel dans la connaissance des sociétés antiques, et cela pour une double raison : parce que les archives plus périssables qui pourraient témoigner de ces cultures ont en grande partie disparu ; parce que l'usage de graver des inscriptions (dans la pierre notamment) jouait dans l'antiquité un rôle beaucoup plus important que de nos jours, ce qui explique le grand nombre de documents de cette sorte parvenus jusqu'à nous.

35 Andrew Hodges, *Alan Turing, The Enigma of Intelligence* (Unwin Paperbacks, Londres, 1985), p. 170.

des outils mathématiques idoines reste largement non résolu. Quelles « œuvres » mathématiques, s'il en existe, seraient ainsi les plus à même de permettre de déterminer quel jour de la semaine tombait le 16 octobre 1843 ou le 14 juillet 1789 ? Il est rare que l'éducation scolaire ou universitaire se penche sur ce genre de questions. De plus, même lorsque les difficultés de nature mathématique inhérentes à une tâche sont reconnues et résolues, d'autres sources de problématicité, ***relevant d'autres domaines de connaissance***, peuvent rester ignorées. De quelle « science » relèvent par exemple les informations en matière de ***calendrier*** sans doute nécessaires pour parvenir à une réponse satisfaisante à la question du jour de la semaine ? Existe-t-il une « science des calendriers » ? Ou bien ces informations sont-elles à chercher dans une discipline de connaissance plus vaste dont elles ne seraient qu'un sous-produit ? En chaque cas, une enquête épistémologique s'impose.

6.4. Pour beaucoup de questions Q auxquelles on est amené à vouloir apporter une réponse, le champ de l'enquête épistémologique à conduire est *a priori* immense. Ainsi l'étude de la question « Comment assurer la paix et le calme, le respect et la convivialité dans une classe de collège ? » semble-t-elle devoir rechercher ses matériaux et ses outils à travers tout le continent des ***sciences humaines et sociales*** – psychologie de l'adolescent, psychologie sociale, sociologie, etc. Il est possible toutefois, sinon de réduire, du moins de ***baliser*** l'espace des œuvres à explorer en y recherchant prioritairement des réponses (ou des esquisses de réponses) $R^{\Diamond}$ afin d'alimenter le travail de développement de la réponse $R^{\heartsuit}$ souhaitée (que l'on notera R pour simplifier). Un tel travail, en effet, se bâtira à partir des quatre « gestes » cardinaux que sont l'***observation*** des réponses $R^{\Diamond}$ repérées et de la réponse R en construction, leur ***analyse***, leur ***évaluation*** et, finalement, la ***« publication »*** de la réponse R élaborée [36]. Bien entendu, la teneur en réponses $R^{\Diamond}$ du travail à conduire comme l'originalité de la réponse R produite peuvent varier beaucoup : dans quelques cas, R pourra (ou devra) être élaborée presque *ex nihilo* – « en partant de zéro » ou, comme on le dit en anglais, *« from scratch »*, sans emprunter aucun matériau à des réponses $R^{\Diamond}$ introuvables (ou non trouvées !) ; dans d'autres cas, au contraire, la réponse R sera obtenue quasiment par le pur « recopiage », fréquemment peu critique, de l'une des réponses $R^{\Diamond}$ recueillies.

6.5. Le schéma précédent vaut pour toute ***situation d'étude et de recherche***, dans laquelle on cherche à apporter une réponse R à une question Q, ce qu'on notera ainsi : Q R. Plus précisément, on pourra faire apparaître sous la forme suivante les réponses , , …, utilisées comme points d'appui de la construction de R : Q|, , …, R (ce qu'on peut lire : « Q connaissant , , …, mène à R ». Plus complètement, on introduira le collectif X des « étudiants » (au sens vu plus haut), le collectif Y des ***« aides à l'étude »*** (formateurs, professeurs, etc.), et l'on écrira $S(X\,;\,Y\,;\,Q)$|, , …, R, où $S(X\,;\,Y\,;\,Q)$ est le ***système didactique*** constitué par les collectifs X et Y « autour » de la question Q. (On peut évidemment avoir $Y = \emptyset$, mais on ne peut avoir $X = \emptyset$: dans le cas le plus simple, X est un singleton.) Ce schéma doit en général être compliqué pour rendre compte de manière plus juste des pratiques effectives d'étude. Dans un certain nombre de cas, en effet, on ne trouvera pas facilement de réponses $R^{\Diamond}$ toutes faites à la question Q que l'on entend étudier ; ainsi qu'on l'a vu plus haut à propos de l'exemple du gâteau carré, on va alors étudier une succession de « questions cruciales » $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p$, ce qu'on notera : Q Q_1 Q_2 … Q_p. C'est alors aux questions Q_i $(1 \leq i \leq p)$ que l'on trouvera éventuellement des réponses disponibles dans la culture, enchâssées dans des œuvres O_i mathématiques ou non. Si une question Q_i n'a pas une ou des réponses « bien connues » dans la culture, on tentera d'amorcer une « régression cruciale » Q_i Q_{i1} Q_{i2} … Q_{ik} ; et ainsi de suite. Pour résumer les différents « arbres cruciaux » possibles, on se contentera le plus souvent d'indiquer les œuvres $O_1, O_2, \ldots, O_m$ que, ***en fin de compte***, l'élaboration de la réponse R aura mobilisées d'une manière ou d'une autre ; ce qu'on peut noter :

$$S(X\,;\,Y\,;\,Q)|O_1, O_2, \ldots, O_m \text{ } R.$$

Pour ne prendre ici qu'un seul exemple, si l'on découvre qu'une certaine réponse, , à la question Q relative à la tâche t_3 ci-dessus – « Comment graduer la baguette ?… » – est fournie par la formule

$$v = 1080$$

qui, pour une hauteur h mesurée en centimètres (avec $0 \leq h \leq 60$), donne le volume v en litres (plus exactement, en dm^3), on pourra conclure que, parmi les œuvres mathématiques mobilisées pour produire

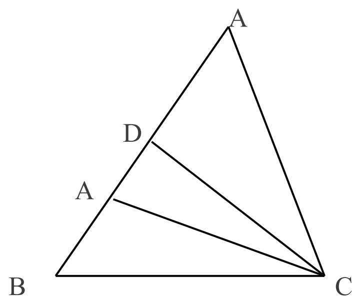
36 Le latin tardif *publicatio* désigne l'action de dévoiler. C'est en ce sens qu'il convient d'entendre le mot ici : la « publication » de R renvoie au fait de faire connaître, de faire reconnaître, de mettre en débat, de défendre et d'illustrer la réponse R élaborée.

cette réponse, figure la ***trigonométrie*** et, plus particulièrement, la « théorie » des fonctions trigonométriques ***inverses*** (théorie qui, en France aujourd'hui, ne s'étudie pas au secondaire). On supputera aussi qu'a été sollicitée une certaine connaissance, sans doute un peu sibylline pour maint lecteur – que signifie par exemple la précision « en litres (plus exactement, en dm^3) » ? – des ***unités de volume***, ce qui relève d'une « œuvre » mal aimée de l'enseignement scientifique français, la ***métrologie***. Mais si l'on rencontre pour seule réponse à la question Q la réponse consistant en une ***table*** dont un extrait est reproduit ci-après, table qui permettra à l'intendant de graduer sa jauge et répond donc à la question soulevée, on voit que l'analyse des œuvres « cristallisées » sera un travail véritable, dans la mesure où de telles œuvres n'affleurent plus dans la réponse observée.

4 cm	7 cm	10 cm	17 cm
35 litres	80 litres	135 litres	295 litres

6.6. Il faut s'habituer à penser sous le schéma présenté jusqu'ici un ensemble de types de situations regardés – pour des raisons plus culturelles ou institutionnelles que scientifiques – comme disparates. Le premier type de situations est celui qui prévaut ordinairement dans la classe de mathématiques non rénovée : la question ***mathématique*** Q n'est posée qu'***implicitement***, dans l'« énoncé » du problème (éventuellement présenté comme « activité ») proposé à la classe ; le ***topos*** des élèves – leur marge d'autonomie didactique – est très chichement déterminé par le découpage de l'énoncé, qui fait de l'élève un aide-mathématicien plutôt que le protagoniste de l'étude de la question Q – question dont, sauf exception, l'élève n'a que faire et n'a pas même conscience ; la responsabilité de la production de R est laissée au professeur – qui fournira le « corrigé » final ; etc. Par contraste, le schéma explicité jusqu'ici permet de situer cette geste traditionnelle dans un cadre large, qui autorise et appelle une évolution vers l'optimum : la question Q doit être clairement énoncée et la ***responsabilité*** de son étude ***dévolue à la classe*** ; l'élaboration de R peut prendre appui sur l'observation, l'analyse, l'évaluation de réponses $R^\Diamond$ rencontrées « dans la littérature » ; la formulation de R et sa « publication » (dans le cadre d'une synthèse écrite appropriée) doivent être clairement prises en charge par la ***classe*** travaillant sous la direction du professeur ; etc. Si, par exemple, la classe se demande comment démontrer la ***réciproque*** du théorème de Pythagore (après un travail collectif qui aurait révélé une confusion spontanée entre la propriété directe, antérieurement établie dans la classe, et sa réciproque, non encore officiellement rencontrée), elle pourra, retrouvant ainsi un geste ***authentique*** du travail mathématique, étudier sous la direction du professeur la démonstration suivante, « toute faite », qu'un élève ou une équipe d'élèves aura rapportée d'une recherche documentaire.

Dans ce qui suit, on suppose connu le théorème de Pythagore et on démontre sa réciproque.
Pour cela, on démontre que, si le triangle ABC n'est pas rectangle en A, alors $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$.
Dans ce but, on introduit un point D tel que l'angle soit ***droit*** ;on va alors démontrer que l'on a : $AB^2 + AC^2 \neq DB^2 + DC^2$.



Pour choisir D, observons que, dans un triangle quelconque, au plus ***un*** des angles est droit ou obtus. Des deux angles et , l'un au moins est donc aigu : on suppose ici que c'est . Soit alors D l'intersection avec]BA) de la perpendiculaire à (AB) passant par C. (Si D n'était pas sur la demi-droite]BA), comme est nécessairement aigu comme angle non droit du triangle rectangle DBC, on aurait obtus, contrairement au choix de B.)

Pour conclure, on procède alors à une ***disjonction de cas***.

– Si D $\in$]BA[, on a AB > DB ; comme AC > DC (d'après le théorème de Pythagore), on a donc $AB^2 + AC^2 > DB^2 + DC^2$.

– Si A $\in$]BD[, on a : $AB^2 + AC^2 = (DB - DA)^2 + (DA^2 + DC^2) = (DB^2 + DC^2) + 2DA^2 - 2DA \times DB = (DB^2 + DC^2) - 2DA \times (DB - DA) = (DB^2 + DC^2) - 2DA \times AB < DB^2 + DC^2$.

Bien entendu, le travail de la classe sur cette démonstration $\partial^\Diamond$ devra aboutir à une démonstration $\partial^\heartsuit$ « améliorée » – par exemple plus intelligible pour des élèves de 4^e –, qui sera alors « publiée » dans la synthèse relative au thème d'études travaillé – le « théorème de Pythagore ». L'intégration dans les ressources de travail de la classe de réponses $R^\Diamond$, envisagée ici ***en amont*** de la production de R, pourra aussi se faire ***en aval***, afin notamment d'***évaluer*** la réponse R élaborée en la comparant, de plusieurs points de vue (intelligibilité, cohérence, complétude, etc.), à des réponses $R^{\lozenge}$ préexistantes – dont, au demeurant, on ne supposera pas *a priori* qu'elles sont en tous points meilleures que la réponse R de la classe.

6.7. L'emploi du schéma conceptuel que résume l'écriture $S(X ; Y ; Q) | O_1, O_2, \ldots, O_m$ R paraît sans doute plus évident dans le cas des IDD (itinéraires de découverte, en 5e et en 4e) et des TPE (travaux personnels encadrés, dans les classes de première). Dans chacun de ces cas, en effet, le ***sujet*** (de l'IDD ou du TPE) peut s'identifier à une ***question*** Q dont l'étude se fera dans une ***problématique*** en partie déterminée par l'inscription du sujet retenu dans un cadre plus large formé, pour ce qui est des IDD, par le choix d'un ***thème*** d'études découpé à l'intérieur de l'un des quatre ***domaines*** d'étude permanents officiellement désignés [37], et, pour ce qui est des TPE, d'un ***sous-thème*** découpé dans l'un des six ***thèmes*** d'études nationaux de l'année [38]. Relève encore de ce même paradigme d'étude ce que le programme de mathématiques de la classe de 2de nomme ***thèmes d'étude*** et qu'il vaudrait mieux appeler thèmes d'études ***libres*** (TEL), par contraste avec les thèmes d'études ***imposés*** (TEI) traditionnels [39]. De manière plus rigide peut-être que dans le cas des IDD ou des TPE (où l'on peut envisager de partir d'une question Q que l'on situera alors, selon le cas, dans un thème ou un sous-thème, lui-même inséré en un domaine ou un thème), la classe part, dans le cas des TEL, non d'une question Q, mais d'un thème θ qu'il s'agira alors de questionner, de « mettre en question(s) ». À propos par exemple du TEL « Caractérisation des éléments de $\mathbb{D}$ et de $\mathbb{Q}$ » (qui s'inscrit dans le domaine *Calcul et fonctions*, l'un des trois en lesquels se scinde le programme de 2de), on pourra se demander comment, étant donné une fraction a/b (où $a, b \in \mathbb{N}^*$), on peut prévoir que son développement décimal sera ***fini*** (il s'agit alors d'un ***décimal***), ou infini ***sans partie apériodique***, ou infini ***avec*** partie apériodique de longueur ***tant***, et comment encore il serait possible de prédire la longueur de la ***partie périodique*** du développement décimal – autant de questions en lesquelles pourra se déployer l'étude du TEL choisi. Bien entendu, la différence entre IDD et TPE d'une part, et TEL d'autre part, tient *a priori* à ce que l'étude d'une question Q fera appel, dans le premier cas, à des connaissances et savoirs relevant de ***plusieurs disciplines***, tandis que, dans le second cas, elle ne mobilisera guère, en principe, que des ressources fournies par une discipline, qui est toutefois une discipline ***plurielle***, ***les*** mathématiques. On verra que cette différence peut, à nouveau, être subsumée sous un schéma commun.

Prochaine séance : le mardi 4 mai 2010

37 Ces domaines sont les suivants : *La nature et le corps humain*, *Les arts et les humanités*, *Les langues et les civilisations*, *La création et les techniques* (Voir http://www.eduscol.education.fr/D0072/default.htm.)

38 Deux de ces thèmes sont renouvelés chaque année. En 2005-2006, et pour la 1re S par exemple, la liste des thèmes comporte, outre deux thèmes communs aux 1res L, ES et S (*L'homme et la nature* ; *Ruptures et continuités*), quatre thèmes propres à cette classe (*Modèles, modélisation* ; *Croissance* ; *Risques naturels et technologiques* ; *Sciences et aliments*). (Voir http://www.education.gouv.fr/bo/2004/18/MENE0400771N.htm.)

39 Pour la liste des TEL, voir le programme de 2de : http://www.education.gouv.fr/bo/2001/hs2/default.htm.

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 23 : mardi 4 mai 2010

Programme de la séance. 1. Expérimentation et théorisation // 2. Forum des questions // 3. Notice Éducation mathématique & citoyenneté // 4. Jury d'enseignement // 5. Recherches dans les archives

À noter : prochaine et dernière séance de travail, le 18 mai 2010 ;
séance de bilan : le 18 juin 2010

1. Expérimentation et théorisation : reprise des travaux dirigés

Lors de la dernière séance de travaux dirigés, nous avions étudié la situation suivante :

À l'occasion du travail d'un devoir à faire hors classe, deux élèves munis de calculatrices s'intéressent aux quotients des entiers par 7. Voici un extrait de leur dialogue :

– Tu as vu que 1/7 et 8/7 ça donne la même chose après la virgule ?
– Non, je ne l'avais pas vu, mais t'as raison. Moi, ce que j'avais vu, c'est qu'après la virgule, il y a toujours 6 chiffres différents et qui se répètent dans le même ordre...
– Six chiffres, c'est normal, dans la division par 7, il y a 6 restes possibles : 1, 2, 3, 4, 5 et 6.
– Heu... Et zéro alors ?
– Ben, il y est pas, sinon ça serait un multiple de 7...
– Ouais... Ce qui est drôle, c'est que pour 3/7 c'est les mêmes chiffres, mais décalés d'un rang...
Ça devrait être pour 2/7... Mais pour 2/7, c'est les mêmes chiffres mais décalés de deux rangs.
– Ça alors !

Pour en avoir le cœur net, ils demandent à leur professeur de mathématiques si ce qu'ils ont cru observer pour 7 est généralisable et, si oui, comment on peut connaître le décalage. Le professeur décide alors de mettre à l'étude dans une séance ultérieure la question suivante :

Q : Est-il possible, et si oui comment, de déterminer le développement décimal d'un rationnel de la forme p/q, où q est un nombre premier, à partir du développement décimal de $1/q$?

Chaque binôme fabriquera ***expérimentalement*** des éléments techniques pour déterminer, si c'est possible, le développement décimal d'un rationnel de la forme p/q, où q est un nombre premier, à partir du développement décimal de $1/q$, et dégager un ou des éléments technologiques les justifiant en précisant s'il est considéré comme expérimentalement avéré ou encore conjectural.
On fabriquera un dispositif permettant de garder la trace des expériences (couronnées de succès ou pas) effectuées, et on rendra les traces du travail effectué à l'issue de la séance en les envoyant par mel à l'adrel m.artaud@aix-mrs.iufm.fr.

On notera que :
1) On se place dans la position du professeur qui a à anticiper le travail possible effectué par des élèves. On se gardera donc, dans le temps du TD, d'élucider théoriquement le problème posé et on restera délibérément dans le cadre de l'exploration et de la justification expérimentale ; en outre on pourra, suivant l'avancée du travail, explorer plusieurs voies.

2) Outre la constitution d'une clinique de l'expérience de façon à pouvoir en mettre en place adéquatement avec les élèves, il s'agit également de se créer une clinique de la tenue des traces écrites : on ne négligera donc pas la mise en forme des résultats expérimentaux.

Pour les besoins du travail, on pourra recourir à des calculatrices en ligne, comme par exemple celle accessible par le lien ci-dessous : http://wims.univ-mrs.fr/wims/wims.cgi?session=DNFE1EC65E.2&+lang=fr&+module=tool%2Fnumber%2Fcalcnum.fr

Nous travaillerons ici à partir des matériaux produits lors de cette séance : ceux-ci dénotent encore un rapport inadéquat à la dialectique entre expérimentation et théorisation tout comme à l'expérimentation elle-même. On trouvera ci-dessous quelques indicateurs sur 10 fichiers analysés qui parlent d'eux mêmes.

Dénominateurs testés : 7 : 9 fois ; 11 (7 fois) ; 13 (5 fois) ; 3 (3 fois) ; 5, 9 et 17 : 2 (fois) ; 19, 43, 23, 67, 59, 733, 93 (1 fois).
La moyenne du nombre de dénominateurs autres que 7 testés est 2,7, la médiane 3,5.

On notera que dans la liste précédente figurent deux intrus : 9 et 93 ne sont pas premiers puisqu'ils sont manifestement divisibles par 3...

On n'a donc pas suffisamment de données expérimentales, et cela influe sur la dialectique expérimentation / théorisation.

Voyons les éléments d'organisation mathématique mis en évidence.
Sept travaux mettent portent la trace d'une technique que l'un d'entre eux décrit ainsi :

À partir du développement décimal de $1/q$, on prend les $q - 1$ premières décimales et en multipliant par p cette « période » on obtient une période du développement décimal de p/q.

En voici une autre description :

Pour déterminer la période du développement décimal de p/q avec q premier et $p < q$, on multiplie la période de $1/q$ par p.

Lorsque p=q, on a p/q=1 mais la période que l'on obtient par le développement décimal de 1/q est 99 donc on a p/q=0 ,9999999999…

Lorsque p>q, il existe a dans N et 0< p'<q tels p/q=a+p'/q et donc la période de p/q est la même que celle de p'/q.

Et une troisième :

<u>1ère remarque</u> : Puisque 8/7 = 1 + 1/7, on obtient le même développement décimal pour 1/7 et 8/7. Ainsi, il suffit d'expérimenter jusqu'à (q-1)/q.

<u>2ème remarque</u> : Si on multiplie la période de 1/7 par 2, alors on obtient la période de 2/7. De même, si on multiplie la période de 1/7 par 3, alors on obtient la période de 3/7. Ainsi, on conjecture que pour obtenir la période de p/q, il faut multiplier la période de 1/q par p.

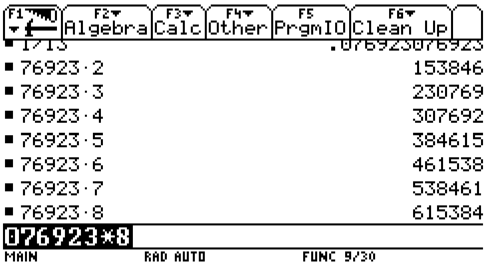
Puis encore une quatrième :

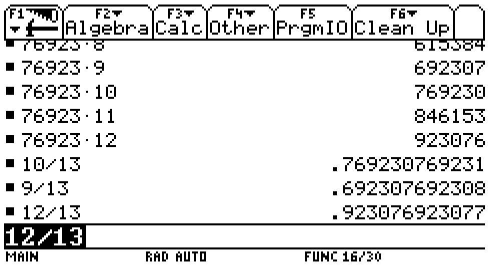
On conjecture donc la technique suivante, pour un quotient de type p/q
avec q premier et 1<=p<q connaissant le développement de 1/q:
1) isoler les q-1 premiers chiffres du développement de 1/q.
2) les multiplier par p.

3) former un décimal en répétant à l'infini le nombre obtenu.

Tous n’identifient pas les éléments technologico-théoriques sur laquelle elle repose. Par exemple, l’élément technoqlogique que l’on a vu formulé ainsi « Lorsque p>q, il existe a dans N et 0< p’<q tels p/q=a+p’/q et donc la période de p/q est la même que celle de p’/q. » est mentionné par quatre comptes rendus, sous des formes diverses, tandis qu’une « définition » de ce qui est appelé période est donné par deux comptes rendus.

Le problème de la technique précédente, en dehors de sa validité qui reste à éprouver, est qu’elle est peu différente de la technique qui consiste à calculer p/q à la calculatrice : l’avantage procuré est le fait que, comme elle permet de travailler en nombre entiers, elle est utilisable avec des calculatrices du type V200 dès lors que l’on a la séquence des $q-1$ chiffres de la partie décimale de $1/q$. Voici un exemple avec $q = 13$





Mais elle ne répond pas véritablement au problème posé par les élèves, à savoir de pouvoir le faire « sans calcul », en se servant de « décalages ».

Un binôme propose une technique plus apte à répondre à ce problème dont il fournit la description suivante :

Test de la méthode mise à jour expérimentalement pour 1/17 :

1/17 = 0,0588235294117647 0588235294117647

Les premiers chiffres des périodes que l’on cherche correspondent aux chiffres de la période de 1/17 rangés dans l’ordre croissant.

La période de 2/17 commencera par le plus petit chiffre de la période après 0, donc 1.

Comme il y a deux occurrences du 1 dans notre période, on regarde le chiffre suivant les 1 dans la période de 1/17 et ce sera le plus petit qui nous donnera le début de la période correspondante à 2/17 : 11 ou 17. On décale la période de 1/17 pour qu’elle commence par 11.

2/17 1176470588235294

La période de 3/17 commencera par 17 :

3/17 1764705882352941

La période de 4/17 commencera par le plus petit chiffre de la période après 1, donc 2.

Comme il y a deux occurrences du 2 dans notre période, on regarde le chiffre suivant les 2 dans la période de 1/17 et ce sera le plus petit qui nous donnera la période correspondant à 4/17 : 23 ou 29. On décale la période de 1/17 pour qu’elle commence par 23.

4/17 2352941176470588

5/17 2941176470588235

La période de 6/17 commencera par le plus petit chiffre de la période après 2, donc 3.

6/17 3529411764705882

La période de 7/17 commencera par le plus petit chiffre de la période après 3, donc 4.

Comme il y a deux occurrences du 4 dans notre période, on regarde le chiffre suivant les 4 dans la période de 1/17 et ce sera le plus petit qui nous donnera la période correspondant à 7/17 : 41 ou 47. On décale la période de 1/17 pour qu'elle commence par 41.

7/17	4117647058823529
8/17	4705882352941176
9/17	5294117647058823
10/17	5882352941176470
11/17	6470588235294117
12/17	7058823529411764
13/17	7647058823529411
14/17	8235294117647058
15/17	8823529411764705
16/17	9411764705882352

On notera que c'est le seul compte rendu où le calcul des p/q, avec p compris entre 1 et $q - 1$ a été systématiquement réalisé.

Mettons cette technique à l'épreuve pour $q = 19$:

1/19 = 0.0526315789473684210526315789474	15 ou 10 donc 105263157894736842
2/19 = 0.105263157894736842105263157895	15 : 157894736842105263
3/19 = 0.157894736842105263157894736842	26 ou 21 donc 210526315789473684
4/19 = 0.210526315789473684210526315789	26 : 263157894736842105
5/19 = 0.263157894736842105263157894737	31 : 315789473684210526
6/19 = 0.315789473684210526315789473684	36 : 368421052631578947
7/19 = 0.368421052631578947368421052632	42 : 421052631578947368
8/19 = 0.421052631578947368421052631579	47 : 473684210526315789
9/19 = 0.473684210526315789473684210526	52 : 526315789473684210
10/19 = 0.526315789473684210526315789474	57 : 578947368421052631
11/19 = 0.578947368421052631578947368421	63 : 631578947368421052
12/19 = 0.631578947368421052631578947368	68 : 684210526315789473
13/19 = 0.684210526315789473684210526316	73 :736842105263157894
14/19 = 0.736842105263157894736842105263	78 : 789473684210526315
15/19 = 0.789473684210526315789473684211	84 :842105263157894736
16/19 = 0.842105263157894736842105263158	89 :894736842105263157
17/19 = 0.894736842105263157894736842105	94 : 947368421052631578
18/19 = 0.947368421052631578947368421053	

Testons-la maintenant sur $q = 31$

1/31 = 0.0322580645161290322580645161 29

2/31 = 0.064516129032258064516129032258 1

3/31 = 0.0967741935483870967741935483871

4/31 = 0.129032258064516129032258064516

5/31 = 0.161290322580645161290322580645

6/31 = 0.193548387096774193548387096774

7/31= 0.225806451612903225806451612903

8/31 = 0.258064516129032258064516129032

9/31 = 0.290322580645161290322580645161

10/31 = 0.322580645161290322580645161290

11/31 = 0.354838709677419354838709677419

12/31 = 0.387096774193548387096774193548

13/31 = 0.419354838709677419354838709677

14/31 = 0.451612903225806451612903225806

15/31 = 0.483870967741935483870967741935

16/31 = 0.516129032258064516129032258065

17/31 = 0.548387096774193548387096774194

18/31 = 0.580645161290322580645161290323

19/31= 0.612903225806451612903225806452

20/31= 0.645161290322580645161290322581

21/31 = 0.677419354838709677419354838710

Travail collectif

Le travail a permis de faire émerger une évolution de la technique que l'on peut décrire ainsi :

Lorsque l'on a deux séquences de chiffres distinctes qui se répètent dans les développements, on considère la séquence correspondant à $1/q$ et la première apparition de la deuxième séquence, ici 032258064516129 et 096774193548387. Le développement de p/q sera déterminé de la façon suivante : on considère le premier chiffre du développement de $(p\text{-}1)/q$, k.

Si k est présent dans les deux séquences, on considère le plus petit chiffre qui suit k dans la première séquence, i, et le plus petit chiffre qui suit k dans la deuxième séquence, j ; si $i < j$, on prend la première séquence et on l'écrit à partir de i ; si $j < i$, on prend la deuxième séquence et on l'écrit à partir de j.

On peut penser que cette technique se généralise si l'on a plus de deux séquences.
En revanche, pour la mettre véritablement en pratique, il faudrait au moins que l'on puisse savoir le nombre de séquences différentes de chiffres qui se répètent dans les développements.

Ces éléments sont à étudier expérimentalement pour la prochaine séance.

2. Forum des questions

Systèmes d'équations – fabrication d'une organisation mathématique

Dans le programme de 2^{de}, sur les droites, il y a en commentaire : ce sera l'occasion de revoir les systèmes linéaires. Étant donné qu'on ne voit que les équations réduites, à quel moment doit-on les revoir ? Est-ce dans le type de tâches : déterminer l'équation d'une droite à partir de deux points ? Par exemple, soit A(2;-3) et B(1;4)deux points ; comme $x_A \neq x_B$, (AB) : $y = ax + b$; A ∈ (AB) donc $-3 = 2a + b$; B ∈ (AB) donc $4 = a + b$; on résout le système pour trouver a et b. Seulement ici c'est un système particulier car l'inconnue b est facilement « isolable ». De plus, il y a une autre technique, qui me semble plus facile, pour résoudre ce type de tâches (calculer le coefficient directeur avec la formule, puis se servir d'un des points A ou B pour calculer b). (FD, 2^{de}, 18)

Dans le chapitre « Droites », seules les équations réduites sont au programme. Pourtant, il est inscrit dans le programme que, dans le cadre de la recherche du point d'intersection de deux droites, on pourra résoudre des systèmes linéaires ce qui est intéressant lorsque les équations ne sont pas réduites. Dans ce cadre, j'ai simplement montré comment le faire sur un ou deux exemples. Était-ce bien cela l'esprit du programme ? (MH, 2^{de}, 19)

Dans la méthode de résolution par combinaisons linéaires d'un système de deux équations à deux inconnues, peut-on évoquer le « pivot de Gauss »? (Pour donner les écritures $[L_1 \leftarrow L_1 + 2\,L_2]$ par exemple.) Ou dire « algorithme de Gauss » ce qui est peut-être plus adapté au programme ? (MAC, 2^{de}, 20)

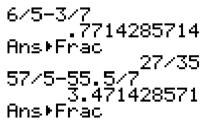
Lors d'une AER sur les systèmes en classe de troisième, j'avais prévu une liste de questions cruciales pour amener une résolution par substitution (dans un premier temps). Mais une élève a proposé une méthode mêlant substitution et combinaison qui aboutit correctement. Comment peut-on justifier le fait d'utiliser pour la suite, l'une ou l'autre des méthodes et pas les deux à la fois mis à part le souci de distinguer clairement les méthodes ? D'autre part, les programmes n'exigent pas de faire telle ou telle méthode. (AL, 3^e, 21)

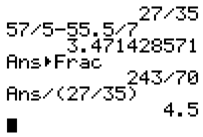
Voici d'abord ce que contient le programme de seconde à propos des systèmes d'équations :

Droites Droite comme courbe représentative d'une fonction affine. Équations de droites. Droites parallèles, sécantes.	• Tracer une droite dans le plan repéré. • Interpréter graphiquement le coefficient directeur d'une droite. • Caractériser analytiquement une droite. • Établir que 3 points sont alignés, non alignés. • Reconnaître que deux droites sont parallèles, sécantes. • Déterminer les coordonnées du point d'intersection de deux droites sécantes.	On démontre que toute droite a une équation soit de la forme $y = mx + p$, soit de la forme $x = c$. On fait la liaison avec la colinéarité des vecteurs. C'est l'occasion de résoudre des systèmes d'équations linéaires.

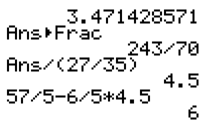
Il s'agit donc d'élucider ce que le programme entend par la liaison faite entre les deux types de tâches T_D : « Déterminer les coordonnées du point d'intersection de deux droites » et T_S : « Résoudre un système d'équations linéaires ». On peut voir d'abord le fait que déterminer les coordonnées du point d'intersection de deux droites conduit à résoudre un système de deux équations linéaires à deux inconnues, ce qui veut dire que T_S apparaît comme un ingrédient de la technique relative à T_D, ce que l'on peut noter $T_S \Rightarrow T_D$. Il semble cependant que le travail sur les systèmes est alors simplifié par le fait que le coefficient de l'ordonnée est 1. Peut-on alors envisager un autre lien qui puisse enrichir le travail à effectuer ? Le petit formalisme introduit suggère de considérer la « réciproque », à savoir une technique de résolution des systèmes dans laquelle apparaisse la détermination du point d'intersection de deux droites sécantes.

Considérons ainsi le système : $\begin{cases} 6\,x+5\,y=57 \\ 3\,x+7\,y=55{,}5 \end{cases}$. Il est équivalent au système suivant : $\begin{cases} y=\dfrac{57}{5}-\dfrac{6}{5}\,x \\ y=\dfrac{55{,}5}{7}-\dfrac{3}{7}\,x \end{cases}$. Il s'agit donc de déterminer le point d'intersection éventuel des deux droites D d'équation $y=\frac{57}{5}-\frac{6}{5}\,x$ et D' d'équation $y=\frac{55{,}5}{7}-\frac{3}{7}\,x$. Les coefficients directeurs des deux droites étant différents, ces droites ne sont pas parallèles et le point d'intersection existe. On détermine son abscisse en résolvant l'équation $\frac{57}{5}-\frac{6}{5}\,x=\frac{55{,}5}{7}-\frac{3}{7}\,x$. On obtient (6/5-3/7)*x=(57/5-55,5/7) soit encore $\frac{27}{35}\,x=\frac{243}{70}$ et $x = 4{,}5$.

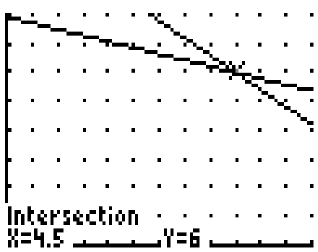


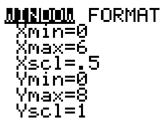


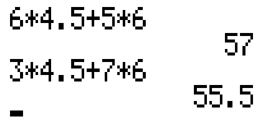
L'ordonnée est alors donnée par $y=\frac{57}{5}-\frac{6}{5}\times 4{,}5=6$.



On vérifie alors la correction des calculs effectués :







On voit ainsi que la liaison entre systèmes d'équations et droites peut inclure la reconnaissance que deux droites sont parallèles ou sécantes, ce qui permet d'alléger la technique de résolution par substitution et de savoir déterminer quand le système a une seule solution.

On aboutira ainsi à la technique suivante relative à T_S :

Si les coefficients de *y* ne sont pas nuls, mettre le système sous la forme $\begin{cases} y=mx+p \\ y=m\,'\,x+p\,' \end{cases}$.

Si $m\neq m\,'$, ce système a une solution unique qui est le point d'intersection des droites d'équation $y=mx+p$ et $y=m\,'\,x+p\,'$; on détermine ses coordonnées en résolvant l'équation $mx+p=m\,'\,x+p\,'$ et en remplaçant la valeur de *x* ainsi déterminée dans l'une des deux équations pour obtenir *y*. On trace les droites obtenues à la calculatrice et on vérifie les coordonnées du point d'intersection & on contrôle que *x* et *y* vérifient le système initial.

Si $m = m'$, les deux droites sont parallèles et il n'y a pas de solution quand $p \neq p'$, une infinité de solutions quand $p = p'$, qui sont données par les coordonnées des points de la droite d'équation $y = mx + p$.On trace les droites obtenues à la calculatrice et on vérifie le parallélisme. On contrôle avec le système initial.

Si l'un des coefficients de y est nul, le système se met sous la forme $\begin{cases} x = d \\ y = mx + p \end{cases}$; les deux droites sont donc sécantes et on obtient la solution par (d ; md + p). On trace les droites obtenues à la calculatrice et on vérifie les coordonnées du point d'intersection & on contrôle que x et y vérifient le système initial.

Si les deux coefficients de y sont nuls, le système est équivalent à $\begin{cases} x = d \\ x = d \end{cases}$,. Ces deux droites sont parallèles et on n'a pas de solution si $d \neq d'$, et une droite de solutions si $d = d'$.

Comme le rappelle la dernière question, les élèves ont appris à résoudre les systèmes d'équations linéaires en troisième : comme ils ne disposaient pas de la notion d'équation de droite, mais du fait que la représentation graphique d'une fonction affine est une droite, ils n'ont résolu et interprété graphiquement en troisième que la résolution de systèmes du type $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c \end{cases}$,, où b et b' sont non nuls, avec de plus $\frac{a}{b} \neq \frac{a'}{b'}$. Il s'agit donc en classe de seconde d'étendre la technique mise en place en utilisant l'environnement technologique des droites et de leurs équations.

Il n'est pas utile de parler de pivot de Gauss dans le cas de système de deux équations à deux inconnues, voire d'algorithme de Gauss : on surcharge l'environnement technologico-théorique dans qu'il y ait de véritable raison.

La dernière question met en évidence la confrontation entre deux rapports à la mise en place d'une organisation mathématiques : lorsque l'on donne du *topos* aux élèves dans la fabrication de l'OM, il n'est pas rare que l'OM qui émerge ne soit pas « millimétriquement » celle qui a été prévue. La conduite à tenir dans ce cas-là est d'enregistrer l'OM qui a émergé et, si nécessaire, la faire travailler pour la faire évoluer. Ou encore, si l'évolution n'est pas nécessaire, de confronter la réponse R♥ produite par la classe à celles disponibles dans le manuel de la classe par exemple.

Du point de vue de la technique évoquée par la question, on peut penser qu'il s'agit de la technique suivante, que l'on explicitera à propos du système précédent :

$$\begin{cases} 6x + 5y = 57 \\ 3x + 7y = 55{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 5y = 57 \\ 6x + 14y = 111 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 5y = 57 \\ 57 - 5y + 14y = 111 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 5y = 57 \\ 9y = 54 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 6x + 5y = 57 \\ y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 30 = 57 \\ y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{27}{6} = 4{,}5 \\ y = 6 \end{cases}.$$

```
6*4.5+5*6
                 57
3*4.5+7*6
               55.5
```

Il y a peu de différence avec la technique dite de combinaison, qui conduirait à écrire que :

$$\begin{cases} 6x + 5y = 57 \\ 3x + 7y = 55{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 5y = 57 \\ 6x + 14y = 111 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 5y = 57 \\ 6x + 14y - 6x - 5y = 111 - 57 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 5y = 57 \\ 9y = 54 \end{cases}$$

etc.

Les deux techniques sont en revanche plus fiables dans ce cas que la technique de substitution qui conduit à travailler avec des fractions. La voie à suivre est ainsi de fabriquer une technique qui agrège la technique de combinaison « pure » ou « mixte » et la technique de substitution selon leur efficacité, et qui intègre une étape de contrôle des calculs. [développé oralement]

Institutionnalisation des techniques

Peut-on institutionnaliser à l'aide d'un exemple uniquement ? Par exemple, lorsqu'on veut institutionnaliser une méthode graphique il est plus facile de la présenter sur un exemple de courbe que d'énoncer des phrases générales. Mais dans l'activité, à l'aide des bilans, on aura déjà institutionnalisé la méthode sur un exemple. Est-ce bizarre de faire un autre exemple en synthèse, cela ne gâche-t-il pas le rôle de l'activité ? (ÉF, 2[de], 18)

Est-ce qu'un (des) exemple(s) dans la synthèse suffit à institutionnaliser les types de tâches et les techniques où l'on doit formaliser en écrivant : « méthode : pour étudier... il faut.... », en plus de l'exemple ? (ÉF, 2[de], 19)

En classe de 6[e], thème géométrie. Comment décrire une technique répondant à un type de tâches tel que « construire la bissectrice d'un angle à la règle et au compas » ? En effet, mes élèves ont trouvé la justification technologico-théorique de cette construction par la symétrie axiale mais ils ont du mal à trouver un intérêt dans l'écriture de la technique, du style : prendre le compas, placer la pointe sur le sommet de l'angle,...Est-on obligé de toujours formuler la technique ? (JBM, 6[e] & 3[e], 20)

S'il faut formuler les types de tâches, notamment parce que c'est la « porte d'entrée » des élèves dans l'activité mathématique et qu'on leur donne donc par là un instrument essentiel, il ne faut pas faire de la formulation des techniques un absolu : il y a des cas où il est plus simple d'exhiber un exemple. Mais il y a des inconvénients au fait de ne pas formuler les techniques, et notamment dans le cas où les types de tâches en jeu ne sont pas élémentaires : au-delà du travail de la formulation en elle-même, en effet, la formulation des techniques permet en particulier de repérer les différents sous-types de tâches et la façon dont sont amalgamées les techniques élémentaires. Par exemple, dans le cas de la technique de résolution des systèmes linéaires en classe de seconde envisagée précédemment, il faudrait non seulement donner trois exemples correspondant aux trois cas envisagés mais aussi expliciter les sous-types de tâches de manière à faire ressortir les aspects génériques des exemples – ce que l'on n'aura pas fait sans doute à l'issue de l'AER, le bilan d'étape n'ayant pas vocation à mettre en forme l'ensemble de l'organisation mathématique.

Si l'on formule les techniques, il faut les formuler avec les élèves et suivre leurs demandes à cet égard : pour le dire autrement, il faut adapter le niveau de formulation aux besoins des élèves. Ainsi, dans l'exemple évoqué dans la dernière question, on peut envisager d'adopter la formulation suivante :
On trace un cercle de centre le sommet de l'angle, O, qui coupe les côtés de l'angle en deux points I et J. On construit un point de la médiatrice du segment [IJ], R. La demi-droite [OR) est la bissectrice de l'angle $\widehat{IOJ}$.
Cela suppose connue la technique de construction de la médiatrice. Telle classe de 6[e] pourra vouloir détailler la technique de construction de R, et on développera la formulation par exemple comme suit :

On trace un cercle de centre le sommet de l'angle, O, qui coupe les côtés de l'angle en deux points I et J. On construit un point de la médiatrice du segment [IJ], R.
Pour cela, on trace un cercle de centre I et de rayon IJ, puis un cercle de centre J de rayon IJ, et on prend pour R le point d'intersection le plus éloigné du sommet de l'angle.
La demi-droite [OR) est la bissectrice de l'angle $\widehat{IOJ}$.

Il paraît en revanche effectivement inutile de détailler la façon de tracer un cercle : cela doit, sauf exception, faire partie du milieu en classe de 6[e].

En AER, pour faire émerger les variations de la fonction $x \mapsto x^2$, j'ai demandé aux élèves de comparer $2\sqrt{3}$ et $3\sqrt{2}$ sans calculatrice. Après des essais qui n'ont pas abouti, les élèves ont pensé à comparer (2

$\sqrt{3}$)² et (3 $\sqrt{2}$)².La rédaction finale a été la suivante : « 12<18 or la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur [0, +∞[, donc 2 $\sqrt{3}$ < 3 $\sqrt{2}$. » (Une deuxième question demandait de comparer deux nombres négatifs.) On m'a fait remarquer que cette rédaction posait problème car elle repose sur la bijectivité, ce qui n'est pas à la portée des élèves, et qu'il fallait raisonner par l'absurde. Est-ce gênant de valider cette rédaction ? Faut-il la faire reformuler par l'absurde ? (MP, 2$^{\text{de}}$, 21)

La question a été précisée par mel ainsi :

Ma question de la semaine dernière était survenue après une discussion avec une autre stagiaire, qui avait fait la remarque suivante : la propriété connue des élèves est : ($a < b$ et f croissante sur [a ; b]) ⇒ ($f(a) < f(b)$), or le raisonnement de ma classe utilise la propriété : ($f(a) < f(b)$ et f croissante sur [a ; b]) ⇒ ($a < b$). Sur le moment, notre réflexion n'étant qu'orale, nous avions pensé que la seconde propriété reposait sur un argument d'injectivité. Nous en avons reparlé, l'injectivité n'a pas d'influence, et la seconde propriété découle de la première. Ceci se montre par un raisonnement par l'absurde. Ma question devient alors : Faut-il, pour la réponse corrigée au tableau, préférer un raisonnement par l'absurde à la rédaction proposée par mes élèves ?

Voyons ce que serait une rédaction qui mette en œuvre un raisonnement par l'absurde. En voici un exemple.
On a 12 < 18, soit (2 $\sqrt{3}$)² < (3 $\sqrt{2}$)². Les deux nombres ne sont pas égaux parce que sinon leur carré le serait. Si 2 $\sqrt{3}$ > 3 $\sqrt{2}$, comme la fonction $f : x \mapsto x^2$ est croissante sur [0 ; +∞[, on aurait (2 $\sqrt{3}$)² ⩾ (3 $\sqrt{2}$)², ce qui n'est pas le cas. On a donc 2 $\sqrt{3}$ < 3 $\sqrt{2}$.
Si l'on la compare à la rédaction proposée par les élèves, on voit que cette dernière est « elliptique », c'est-à-dire qu'elle masque le raisonnement par l'absurde : sans doute est-ce parce qu'il s'agit en fait un raisonnement par contraposition qui est assez naturel pour les élèves – comme nous l'avions déjà noté à propos du type de tâches « montrer qu'un triangle n'est pas rectangle ». L'acceptation d'une telle formulation dépend beaucoup du moment de l'étude dans lequel on se situe et de l'OM mise en place. Si par exemple on a dans l'organisation mathématique la propriété ($f(a) < f(b)$ et f croissante sur [a ; b]) ⇒ ($a < b$), la formulation est tout à fait acceptable : elle manifeste la mise en œuvre de la propriété pour produire la technique de comparaison. Si au contraire on est en train de produire cette propriété, le raisonnement par contraposition doit être détaillé. Si le type de tâches de comparaison est un type de tâches « annexe » du travail, on acceptera, au moins dans un premier temps, la formulation pour ne pas nuire à l'avancée du travail, quitte à détailler le raisonnement par contraposition dans la mise en forme de la solution. Etc.

Les deux questions qui suivent n'ont pas eu le temps d'être examinées en séance. Elles sont à étudier hors classe.

Reprise de l'étude

À propos de la reprise de l'étude et du travail transitionnel, dans la notice « Le temps de l'étude », il est écrit, je cite, « Un travail transitionnel spécifique portera sur les types de problèmes situés à la frontière avec la classe précédente et (...). Une fois que les élèves maîtrisent les éléments des programmes antérieurs, le professeur est amené à concevoir une AER (...). » Après le travail transitionnel, comment s'assurer que les élèves « maîtrisent les éléments des programmes antérieurs » ? Par un test court de contrôle en classe ? Comptant ou non dans la moyenne trimestrielle ou non (étant donné que ce serait une évaluation sur des savoirs anciens...) ? Un court travail en classe en temps limité, corrigé par le professeur (et les élèves) mais non « noté »... ? Par ailleurs, étant donné qu'il y a un décalage entre le temps didactique et le temps d'apprentissage, les élèves maîtrisent-ils réellement les éléments des programmes antérieurs, même après le travail transitionnel ? (AMJ, 2$^{\text{de,}}$ 21)

Le sujet symétrie axiale apparaît dans le programme de 5$^{\text{e}}$ avec en dessous [reprise du programme de 6$^{\text{e}}$] alors je l'ai revu avec les élèves pour montrer le rôle de la médiatrice comme axe de symétrie du segment.

Mais faut-il la revoir plus en détail ? (TL, 5e, 20)

Le dispositif du « court test de contrôle » en classe à l'issue du travail transitionnel lorsque ce test d'entrée a révélé de « grosses lacunes » sur les éléments à maîtriser est un dispositif que l'on peut envisager quand on n'arrive pas se faire une idée de l'état de la classe par d'autres prises d'information. Mais il comporte des inconvénients majeurs et cela pour trois raisons au moins : d'abord, toute insistance par le professeur sur un sujet ou un thème donné fait apparaître ce thème comme particulièrement difficile, et nombre d'élèves, ceux qui se vivent pour des raisons diverses comme « pas bons en maths », en concluent que « ce n'est pas pour eux » ; ensuite, on a déjà dépensé du temps de l'étude sur le sujet ou le thème en question, et le temps pris à retravailler est décompté de celui alloué pour ce qui constitue le cœur du programme de la classe ; enfin pour la raison évoquée dans la question, à savoir le décalage entre le temps didactique et le temps de l'apprentissage. On évaluera donc la maîtrise des élèves sur les éléments antérieurs des programmes par l'observation clinique et à l'aune de ce qu'il est absolument nécessaire de manipuler pour le travail de l'AER envisagée, en comptant sur le travail du thème enjeu de l'étude pour permettre de poursuivre et d'améliorer la maîtrise des programmes antérieurement étudiés.

La deuxième question apparaît en décalage par rapport au temps de l'étude de ce séminaire : il devrait aller de soi que la situation évoquée relève de la reprise de l'étude, et donc nécessite un test d'entrée, mis en place lorsque l'on aborde un thème où des ingrédients de l'OM mise en place en sixième à propos de la symétrie axiale s'avèrent utiles ; et que les décisions prises de retravailler ce thème dépendent à la fois des résultats de la classe au test d'entrée et des besoins en symétrie axiale du thème enjeu de l'étude en 5e.

Langue et typographie

Dans le document sur les règles de typographie française, on trouve : « deuxième ou second : on emploie deuxième quand l'énumération peut aller au delà de deux et second quand l'énumération s'arrête à deux. ex. deuxième République, seconde mi-temps. » Par ailleurs, sur le même sujet, on peut lire sur le site internet de l'Académie française : « Longtemps, second a été la forme la plus courante, et certains grammairiens prétendaient réserver l'usage de deuxième aux cas où la série comprenait plus de deux éléments ; lorsque l'emploi de second s'est fait plus rare, on a voulu le réduire aux cas où la série ne comprend que deux éléments. Littré, déjà, contestait cette distinction qui jamais ne s'est imposée dans l'usage, même chez les meilleurs auteurs. L'unique différence d'emploi effective entre deuxième et second est que second appartient aujourd'hui à la langue soignée, et que seul deuxième entre dans la formation des ordinaux complexes (vingt-deuxième, etc.). » Dans cette situation, qui fait autorité ? (B, 5e, 21)

La situation décrite, que l'on peut vérifier aisément, relève d'un type de situations que nous avons étudiée : nous avons plusieurs $R^{\Diamond}$ et il s'agit de fabriquer une réponse $R^{\heartsuit}$ à partir des $R^{\Diamond}$. On peut chercher à augmenter la moisson de $R^{\Diamond}$. Une recherche sous google apporte quelques compléments : on voit que d'aucuns prennent acte du débat, en opposant des « grammairiens » :

http://www.langue-fr.net/spip.php?article82

J.-P. Dewals (03/11/1998). — On ne dit pas *seconde* pour indiquer une deuxième place. Dans un immeuble qui a deux étages, on peut dire, *j'habite au second*, mais s'il a trois étages, *j'habite au deuxième*. *Second* implique la fin de la série.

Luc Bentz (04 /11/1998)

« Jamais la langue n’a fait couramment entre les deux la distinction que les théoriciens ont voulu établir. *Second*, qui est apparu avant *deuxième*, se dit comme lui qu’il y ait deux termes ou plus. La seule distinction est qu’on n’emploie que *deuxième* dans les adjectifs numéraux composés : 2e, 62e, etc. Mais il ne s’impose pas si on pense à un 3e. On dit toujours : *les causes secondes, un état second, de seconde main, à nulle autre seconde* (=qui a la première place, la priorité)*, capitaine en second*. » Joseph Hanse, *Nouveau Dictionnaire des Difficultés du Français moderne* (3e édition).

« Les rapports de *second* avec *deuxième* ont fait l’objet de prescriptions arbitraires. [...] L’usage a toujours condamné ces raffinements que Littré condamnait déjà. » Grevisse, *le Bon Usage* (13e éd.,§ 581, b, 2°).

Jean-Pierre Lacroux (4/11/1998). — Mouais... On pourrait multiplier les citations... d’auteurs (estimables, comme Girodet) préconisant le respect de cette distinction arbitraire. Trois petites observations :

1. L’arbitraire n’est pas ici un critère pertinent... ou alors... faut examiner quelques conventions « indiscutées » d’un autre oeil...
2. La démonstration de Grevisse et de Hanse se fonde sur des considérations « historiques » curieusement puristes...
3. Le français et la plupart de ceux qui le pratiquent n’aiment guère les termes interchangeables. La distinction entre *deuxième* et *second* n’est certes pas d’une utilité flagrante... mais elle est plaisante, subtile. Et qui gêne-t-elle ? Pas moi, en tout cas... donc je la respecte... C’est mon usage et, selon Dauzat mais contre Grevisse, c’est également le bon...

- **Luc Bentz (4/11/1998). —** Rappel : *deuxième* n’est venu qu’après *second* (et était limité à la ... *seconde* position quand il y avait plusieurs éléments). Il est vrai qu’il vaut mieux que la distinction « nouvelle » soit respectée lorsque l’on parle de « Seconde Guerre mondiale » (qui apparaîtrait dès lors comme une expression plus optimiste que *Deuxième Guerre mondiale*).

  [À propos de : *Et qui gêne-t-elle ? Pas moi, en tout cas... donc je la respecte... C’est mon usage et, selon Dauzat mais contre Grevisse, c’est également le bon...*] De cela on peut tirer deux conclusions :
  1. Le débat continue
  2. Sur ce sujet, remettons-en nous à Rabelais : *Fais ce que voudras !*

http://fr.wikipedia.org/wiki/Adjectif_num%C3%A9ral

- On emploie plutôt « second » quand il n'y en a que deux (choses ou personnes). (Exemple : « J'ai deux fils. Le premier a quatorze ans, le second a dix ans »). Attention : Une voiture de deuxième main n'est donc pas une voiture de seconde main. Ce serait une erreur de parler de la Deuxième Guerre Mondiale (préférez-lui la Seconde Guerre mondiale) car ceci impliquerait une Troisième Guerre Mondiale. Contrairement à la Deuxième République, puisqu'en 2009, les Français en sont à la Cinquième. Il y a donc cette idée de suite.

Dans certains cas, seul un des termes peut être accepté : seul *deuxième* est utilisé dans les ordinaux composés (« vingt-deuxième », et non « vingt-second ») ; au contraire, « second », est le seul possible dans certains énoncés figés (« don de seconde vue »)[1] ; être dans un état second (path.) = anormal.

Second apparaît en 1119 et *deuxième* en 1306. Certains grammairiens ont suggéré de marquer cette distinction que déjà Littré trouvait arbitraire[2] :

> 1. Second se met toujours avant son substantif, excepté quand on parle d'un tome, d'un livre, d'un chant, où l'on peut le mettre avant ou après : le tome second, ou le second tome, le second livre ou le livre second de Télémaque, le second chant ou le chant second de l'Iliade.
> 2. Deuxième était peu employé au XVIIe siècle ; cependant on le trouve dans Balzac : Aristippe. Discours deuxième, édit. 1658 ; dans Descartes. La deuxième objection n'est qu'une supposition.... Réponse aux instances de Gassendi, 4 ; dans la Fontaine : Le premier [ail] passe, aussi fait ce deuxième, Paysan ; et dans Bossuet : Deuxième point, 1er sermon sur la Providence.
> 3. Deuxième ne se dit guère (si ce n'est dans les nombres composés : vingt-deuxième, cent-deuxième, etc.) ; c'est second qu'on emploie le plus souvent. En faveur de deuxième, on a prétendu qu'il valait mieux que second, pourvu que le nombre des objets dépassât deux, second terminant une énumération après premier, et deuxième indiquant qu'il sera suivi de troisième, etc. Mais cette raison, tout arbitraire, laisse prévaloir l'usage.

Pour l'Académie française, pour toutes les éditions du dictionnaire jusqu'à celle de 1935 on avait : « février : le second mois de l'année » et « lundi : le second jour de la semaine ». Mais à la neuvième édition, c'est *deuxième* qui s'est imposé pour ces deux entrées, car devenu désormais plus courant, *second* étant considéré comme appartement à la langue soignée. À la page *Questions de langue*, article *Deuxième, second*[3] :

> Longtemps, *second* a été la forme la plus courante, et certains grammairiens prétendaient réserver l'usage de *deuxième* aux cas où la série comprenait plus de deux éléments ; lorsque l'emploi de *second* s'est fait plus rare, on a voulu le réduire aux cas où la série ne comprend que deux éléments. Littré, déjà, contestait cette distinction qui jamais ne s'est imposée dans l'usage, même chez les meilleurs auteurs. L'unique différence d'emploi effective entre deuxième et second est que second appartient aujourd'hui à la langue soignée, et que seul deuxième entre dans la formation des ordinaux complexes (vingt-deuxième, etc.).

Pour le Trésor de la langue française[4] :

> *Second* et *deuxième* peuvent être employés l'un à la place de l'autre, sauf dans les syntagmes figés, les locutions et les adjectifs numéraux ordinaux composés (où *second* n'est jamais employé). *Second* est plus utilisé dans la langue soutenue, *deuxième* dans la langue courante ou technique. Selon certains grammairiens, *second* est préféré à *deuxième* quand il n'y a que deux personnes ou deux choses qui sont considérées (les suites du type *premier*, *deuxième*, *troisième*... sont plus fréquentes que les suites du type *premier*, *second*, *troisième*...). *Second* est plus rare que *deuxième* dans les suites strictement temporelles ou spatiales.

L'usage a toujours ignoré les raffinements des grammairiens pointilleux : dans les chemins de fer on a toujours parlé de *seconde* classe (quand il existait encore la *troisième* classe). Dans l'armée on parle d'un soldat de *deuxième* classe, et il n'y a pas de *troisième* classe. Dans les charades on dit « Mon *second*… » Très tôt dans l'automobile « on passe en *seconde* ». En mathématiques on parle d'équation du *second* degré, de dérivée *seconde*… *Le Bon usage* de Grevisse cite également de nombreux exemples historiques.

D'autres prennent un parti :
http://www.dsi.univ-paris5.fr/typo.html

deuxième, deuxièmes : 2^{e}, 2^{es}
deuxième ou second : on emploie deuxième quand l'énumération peut aller au delà de deux et second quand l'énumération s'arrête à deux.
ex. deuxième République, seconde mi-temps.

La consultation du *Dictionnaire des difficultés de la langue française* dans son édition de 1971, donne à l'entrée Deuxième – second :

> **deuxième - second.** — Ces deux mots ont exactement le même sens : « qui vient immédiatement après le premier ». Mais alors que *second* date du XIII^e siècle, *deuxième* ne fait son apparition qu'au XIV^e. Littré note qu'il était encore peu employé au XVII^e.
>
> On distingue souvent ces deux synonymes par une remarque tout arbitraire, mais qui a cependant son utilité : **deuxième** se disant lorsque l'énumération peut aller *au-delà de deux*, et **second** lorsque l'énumération *s'arrête à deux*. Ainsi, quand on dit que Marguerite de France était la seconde femme d'Edouard I^{er}, on sait, sans autre précision, que ce dernier n'a pas épousé une troisième femme, alors que *deuxième* laisserait supposer une suite. On habite au *deuxième* étage si l'immeuble en comporte plus de deux, et au *second* s'il n'en comporte que deux. On dit la *Seconde Guerre mondiale* parce qu'on espère qu'il n'y en aura pas une troisième !
>
> Cette distinction n'est pas toujours observée (quoique A. Dauzat la classe dans le bon usage), et certains écrivent indifféremment *deuxième* ou *second*.
>
> **Il faut toujours respecter les locutions consacrées, telles que *de seconde main*, *en second lieu*, etc.**
>
> — Dans le langage des chemins de fer, on dit *seconde classe* ou *deuxième classe*. (On n'écrira pas, toutefois, au pluriel : *Voyager en secondes classes, en deuxièmes classes*.)

Que prendre alors pour constituer le $R^\heartsuit$? Il appartient aux communautés « d'écrivants » de faire un choix Le dernier extrait notamment donne des éléments technologiques qui paraissent éclairants : le fait de réserver *second* au cas où les énumérations s'arrêtent à deux a une fonction, celle d'éviter des précisions qui alourdissent la rédaction. Ainsi, avec cet usage en reprenant l'exemple cité, peut-on écrire sans autres précisions que Marguerite de France était la seconde femme d'Édouard 1^{er}, tandis qu'il faudrait écrire avec l'usage alternatif que, par exemple, Marguerite de France était la deuxième femme d'Édouard 1^{er}, qui n'a eu que deux épouses, ou encore Marguerite de France était la deuxième, et dernière, femme d'Édouard 1^{er}. C'est ce qui justifie pour l'auteure de ces lignes de rédiger en respectant cette distinction.

Nous examinerons lors de la prochaine séance les questions suivantes :

Probabilités

Je vais commencer le thème des probabilités et j'aurais voulu savoir si en 3^e ils ont vu les arbres de probabilité, les tableaux et diagrammes (le programme n'est pas clair). (CG., 2^{de}, 17)

Quel problème je peux faire pour créer une séance portant sur les probabilités et sur de l'algorithme (programmation sur calculatrice) ? (CG., 2^{de}, 18)

Le thème « probabilités » en classe de seconde semble n'être qu'une reprise de l'étude du thème étudié en 3^e. Quels conseils donneriez-vous pour ne pas rendre ce thème trop monotone ? (EM, 2^{de}, 18)

En classe de 3^e, qu'entend-on par « notions élémentaires » en probabilité ? Jusqu'où aller dans ces notions ? (JBM, 6^e & 3^e, 3)

En 2^{de}, le thème « Probabilités et statistiques » est divisé en trois chapitres : statistique descriptive, probas, échantillonage. Seul le dernier constitue une réelle nouveauté par rapport à ce que les élèves ont vu au collège. Pour les deux autres, d'après ce que j'ai compris, seul l'apport des TICE pour traiter des données réelles est nouveau. Faut-il en conclure que ces deux chapitres doivent essentiellement être traités sous l'angle des TICE ? (JPB, 2de, 13)

Pendant l'étude des probabilités, je voulais faire une séance informatique simulant un jeu de pile ou face avec un gain (exactement la même idée que dans le document d'accompagnement, avec le saut de puce). N'est-ce pas trop compliqué ? Vaut-il mieux l'étaler sur deux séances informatique ou alors faire une préparation en classe avant d'aller sur les ordinateurs en introduisant l'idée des boucles « pour... » ou « si... alors... » ? (TT, 2de, 17)

3. Notice Éducation mathématique & citoyenneté

Faute de temps, cette partie n'a pas pu être abordée en séance.

Nous débutons ici l'étude d'une nouvelle notice qui sera distribuée la semaine prochaine en GFP.

1. L'École et les citoyens

1.1. L'origine de la notion de **citoyen** se trouve dans l'expérience grecque de la **démocratie**. La Cité grecque rassemble des « semblables » (homoioi) qui sont, abstraitement, des « égaux » (isoi). Dans un ouvrage fondamental, Les origines de la pensée grecque [40], l'helléniste Jean-Pierre Vernant apporte à ce propos le commentaire suivant :

> En dépit de tout ce qui les oppose dans le concret de la vie sociale, les citoyens se conçoivent, sur le plan politique, comme des unités interchangeables à l'intérieur d'un système dont la loi est l'équilibre, la norme l'égalité. Cette image du monde humain trouvera au VIe siècle son expression rigoureuse dans un concept, celui d'*isonomia* : égale participation de tous les citoyens à l'exercice du pouvoir.

1.2. Le passage de l'individu concret au citoyen va de pair avec une révolution cruciale dans l'organisation politique, sans laquelle l'idée de citoyen ne serait pas ce qu'elle est : le citoyen grec obéit, non pas à un homme, mais aux ***lois*** qu'il a concouru à établir. C'est ce qu'explique Dominique Schnapper dans le passage suivant de son livre *Qu'est-ce que la citoyenneté ?* [41] :

> Les Grecs n'ont pas seulement inventé l'idée de citoyen qui ne se confond pas avec l'individu concret ou, en d'autres termes, l'idée d'un domaine politique distinct de la société formée par les liens des hommes concrets, ils ont inventé le principe de l'État de droit. La *polis* était, pour les Grecs, fondamentalement différente des empires des Barbares, parce que les citoyens n'obéissaient pas à un homme, si puissant fût-il, mais aux lois. Condamné à mort, Socrate refusa de s'enfuir pour manifester son respect des lois de la Cité, même quand elles étaient appliquées injustement.

1.3. Le citoyen a des droits, qui sont aussi des devoirs : on appelle ***civisme***, précisément, « l'exercice du respect à l'égard de la République et de ses lois [42] ». Dans *Du contrat social* (1762), Jean-Jacques Rousseau vitupère ainsi sévèrement certaines formes de désengagement des citoyens à l'endroit des affaires publiques :

> Sitôt que le service public cesse d'être la principale affaire des Citoyens, et qu'ils aiment mieux servir de leur bourse que de leur personne, l'État est déjà près de sa ruine. Faut-il marcher au combat ? ils payent des troupes et restent chez eux ; faut-il aller au Conseil ? ils nomment des députés et restent chez eux. À force de paresse et d'argent ils ont enfin des soldats pour asservir la patrie et des représentants pour la vendre.

1.4. Les ***droits du citoyen*** vont au-delà des ***droits de l'homme*** : selon une formule du constitutionnaliste Jean Rivero, « les droits de l'homme sont des libertés, les droits du citoyen sont des pouvoirs [43] ». Le problème des ***conditions de possibilité de l'exercice effectif*** de ces pouvoirs est posé par la Révolution française et

---

40 PUF, 1962, p. 36.

41 Gallimard, 2000, p. 13.

42 On trouvera sur le site Internet de l'IUFM d'Aix-Marseille une notice éclairante sur la notion du civisme (http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/ecjs/productionsaix/civisme.htm).

43 *Libertés publiques*, PUF, 1995, t. 2, p. 54.

reçoit une solution de principe à travers la création de ***l'école de la République***– l'École. Ce que D. Schnapper explicite ainsi [44] :

> … l'éducation est au cœur du projet démocratique. Les citoyens doivent disposer des moyens nécessaires pour exercer *concrètement* leurs droits. C'est ce qui fonde l'idéologie et le rôle de l'École dans la société des citoyens : elle doit donner à tous les capacités nécessaires pour participer réellement à la vie publique.
>
> L'École, qu'elle soit directement organisée par l'État ou contrôlée par lui, est sans doute l'institution de la citoyenneté par excellence. Dans la démocratie grecque de l'Antiquité, l'absence d'école publique limitait la participation politique réelle aux citoyens riches : l'idée que chaque citoyen doit pouvoir exercer concrètement ses droits est liée à la démocratie moderne. C'est à partir de la Révolution que les maîtres d'école, en France, cessèrent d'être appelés des « régents », pour devenir des « instituteurs », parce qu'ils étaient désormais chargés d'instituer la « nation », au sens de l'article 3 de la Déclaration des droits de l'homme et du citoyen, source de la légitimité politique. Plus directement que dans d'autres pays, l'École est, en France, l'école du citoyen.

1.5. Pour user d'une formulation employée par Marie-Jean-Antoine-Nicolas de Caritat, marquis de Condorcet (1743-1794), dans son *Éloge de M. Franklin* (1789), il s'agit donc d'« éclairer les hommes pour en faire des citoyens ». L'« institution » du citoyen, de la République et de son École s'opère d'un même mouvement, réglé par les principes « fondateurs de l'esprit libre et éclairé, soucieux du vrai [45] », qui doivent guider le développement de l'***« art social »*** que Condorcet appelle de ses vœux [46].

1.5.1. Le principe de ***perfectibilité*** [47] conduit à « rompre avec tout providentialisme ou toute prédestination » et doit se traduire, au prix de ***risques calculés***, en ***perfectionnements concrets.*** Dans le premier de ses cinq *Mémoires sur l'instruction publique* (1791), Condorcet note ainsi :

> … le but de l'éducation ne peut plus être de consacrer les opinions établies, mais, au contraire, de les soumettre à l'examen libre des générations successives, toujours de plus en plus éclairées.

1.5.2. Le principe de ***collégialité*** énonce que les hommes doivent rechercher la vérité ***ensemble***, en évitant les deux écueils solidaires de l'***égalitarisme*** (entendu comme la négation de la diversité des individus concrets) et de l'***élitisme*** (qui nie autrement l'égale dignité des hommes), au profit d'une dynamique de perfectionnement, fruit de l'effort collégial d'un ensemble de citoyens.

1.5.3. Le principe de ***rationalité*** guide l'effort d'intelligibilité du monde naturel et social dans la « guerre de la raison contre les préjugés ». Contre l'opportunisme et le dogmatisme de ceux qui assignent le premier rôle soit à la vertu, soit à l'enthousiasme, Condorcet martèle : « il faut tout examiner, tout discuter, tout enseigner même ». Seule une rationalité elle-même perfectible peut, loin de tout « esprit de système », mais dans un « esprit systématique », présider au devenir « des peuples vraiment libres ».

1.5.4. Le principe de ***laïcité*** [48] vise à substituer à quelque « esprit de secte » que ce soit le seul « esprit public ». Cette exigence conduit à l'affirmation de l'indépendance de l'École par rapport à toute sujétion partisane. Dans son *Rapport et projet de décret sur l'organisation générale de l'instruction publique* (présenté à l'Assemblée nationale les 20 et 21 avril 1792), Condorcet conclut :

> L'indépendance de l'instruction publique fait en quelque sorte une partie des droits de l'espèce humaine.

Et il note encore :

> Après avoir affranchi l'instruction de toute espèce d'autorité, gardons-nous de l'assujettir à l'opinion commune : elle doit la dénoncer, la corriger, la former et non la conduire et lui obéir.

« L'École de la République, souligne Charles Coutel [49], est une École du jugement : il s'agit de confronter les faits et les situations à des lois universelles, de situer les objets dans la nature, les énoncés dans les théories et les événements dans les processus historiques. »

---

44 *Op. cit.*, p. 154. La Déclaration des droits de l'homme et du citoyen évoquée ici est celle du 26 août 1789, dont l'article 3 énonce : « Le principe de toute souveraineté réside essentiellement dans la nation. Nul corps, nul individu ne peut exercer d'autorité qui n'en émane expressément. »

45 Charles Coutel, *Condorcet. Instituer le citoyen*, Michalon, 1999, p. 16.

46 « Nous avons regardé l'art social, écrit Condorcet, comme une véritable science fondée […] sur des faits, sur des expériences, sur des raisonnements et sur des calculs […] susceptibles d'un développement infini. » Dans ce qui suit, nous empruntons l'essentiel à l'ouvrage déjà cité de Charles Coutel.

47 Le terme est alors nouveau : il apparaît dans le *Discours sur l'origine de l'inégalité* de J.-J. Rousseau, publié en 1755.

48 Le grec *laos*, à l'origine du mot « laïcité », signifie « peuple », « gens », « citoyens ».

49 *Op. cit.*, pp. 58-59.

1.5.5. Le principe d'***humanité*** est le dernier des cinq principes retenus. Charles Coutel le commente en ces termes [50] :

> L'amour de l'humanité est l'horizon éthique de la citoyenneté condorcétienne. Cet amour ouvre les grands principes précédents vers l'universalité, dont le sentiment de fraternité serait l'aspect affectif. […] Cette amplification humaniste a deux conséquences pour l'institution du citoyen : tout d'abord, dans l'Instruction publique, chaque enfant ne sera pas considéré d'abord comme « futur citoyen » et *a fortiori* comme « petit soldat » mais comme un « petit d'homme », candidat à l'humanité. Ensuite, les droits de l'homme et l'exercice des droits politiques auront l'humanité comme horizon et non la seule patrie (l'identification complète entre la nationalité et la citoyenneté est étrangère à Condorcet).

Le principe d'humanité ordonne une dialectique du même et de l'autre qui, en rompant avec toutes les formes de narcissisme naïf ou cynique, institue la République. L'estime de soi, par exemple, devient alors ***amour de l'humanité en soi-même***.

1.6. La construction de la citoyenneté est un processus toujours inachevé. Pour ne prendre ici qu'un exemple, le droit de vote, prévu dans son principe par la constitution du 24 juin 1793, mais non appliqué, fut établi pour les hommes (y compris les domestiques…) par la proclamation, le 2 mars 1848, du suffrage « universel » (masculin) [51]. Mais l'extension de ce principe aux femmes, adoptée quatre fois par la Chambre des députés entre 1919 et 1936 (par 488 voix contre une en 1936) et chaque fois rejetée par le Sénat, devra attendre l'ordonnance du 21 avril 1944 prise à Alger par le Comité français de Libération nationale [52]. En 1936, trois femmes deviennent membres du nouveau gouvernement issu des élections législatives (qui avaient donné la victoire au Front Populaire) : elles n'ont pourtant pas le droit de vote ! « Trois hirondelles ne font pas le printemps [53] », commentera la militante féministe Louise Weiss (1893-1983). Les femmes ne voteront pour la première fois qu'aux élections municipales du 29 avril 1945.

2. Mathématiques et citoyenneté : ce que disent les textes officiels

2.1. Que disent les textes gouvernant l'enseignement secondaire des mathématiques en matière de citoyenneté ? Le document d'accompagnement du programme du cycle central du collège précise ceci [54] :

> Le professeur de mathématiques peut participer à la formation du citoyen dans l'exercice même de ses fonctions, sans avoir, pour ce faire, besoin de lancer ses élèves dans des activités qui s'écarteraient par trop de sa discipline d'enseignement.

Mais quelle peut être la contribution propre des mathématiques à la formation du citoyen ? Un premier élément de réponse apparaît essentiel, même si, bien sûr, il n'est pas entièrement spécifique à la classe de mathématiques : il s'agit de la formation de l'élève à la ***« démarche scientifique »***, notamment dans sa dimension ***critique***, ainsi qu'il apparaît dans l'***Introduction générale pour le collège*** relative à l'enseignement des mathématiques :

> Au collège, les mathématiques contribuent, avec d'autres disciplines, à entraîner les élèves à la pratique d'une démarche scientifique. L'objectif est de développer conjointement et progressivement les capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique. Elles contribuent ainsi à la formation du

50 *Ibid.*, pp. 28-29.

51 « Le gouvernement provisoire [de la IIe république] arrête en principe et à l'unanimité que le suffrage sera universel et direct sans la moindre condition de cens. » Notons toutefois que le droit de vote ne sera jamais accordé pleinement aux « indigènes » des colonies de la France : sur cette question complexe et douloureuse, voir Dominique Colas, *Citoyenneté et nationalité* (Gallimard, 2004).

52 Cette ordonnance prévoyait, dans son article 1er, la convocation d'une Assemblée nationale constituante « élue par tous les Français et Françaises majeurs », tandis qu'un autre article précisait que les femmes, comme les hommes, étaient électrices et éligibles.

53 Il s'agissait de la radicale Cécile Brunschvicg, présidente de l'Union française pour le suffrage des femmes, nommée sous-secrétaire d'État à l'Éducation nationale, de la socialiste Suzanne Lacore, nommée sous-secrétaire d'État à la protection de l'enfance, enfin de la lauréate du prix Nobel de chimie 1935, Irène Joliot-Curie, nommée sous-secrétaire d'État à la Recherche scientifique.

54 La classe de mathématiques est présentée par ce même document comme devant contribuer à d'autres aspects encore de la formation du collégien : « L'enseignement des mathématiques, y lit-on ainsi, peut apporter une contribution à ces différents aspects de la formation que sont l'éducation à la citoyenneté, l'éducation à l'orientation, l'éducation à l'environnement. (Quand, ici, il est question d'environnement, il s'agit aussi bien d'environnement socio-économique que d'environnement culturel ou d'environnement naturel.) »

futur citoyen.

Ce point de vue est souligné encore par ce passage du programme du cycle central du collège :

> La démarche suivie dans l'enseignement des mathématiques renforce la formation intellectuelle des élèves et concourt à celle de citoyen, en développant leur aptitude à chercher, leur capacité à critiquer, justifier ou infirmer une affirmation, en les habituant à s'exprimer clairement aussi bien à l'oral qu'à l'écrit.

À ce point de vue fait écho le programme de 3ᵉ :

> Comme dans les classes antérieures, la démarche suivie dans l'enseignement des mathématiques renforce la formation intellectuelle des élèves, et concourt à celle du citoyen, en développant leur aptitude à chercher, leur capacité à critiquer, justifier ou infirmer une affirmation, et en les habituant à s'exprimer clairement aussi bien à l'oral qu'à l'écrit.

2.2. Constitutive par excellence d'une citoyenneté active, la capacité clé consiste à ***interroger le monde*** naturel et social, à ***soulever des questions*** à son propos, à ***tenter d'y répondre*** d'une manière bien contrôlée. Ce que le document d'accompagnement du programme du cycle central formule dans les termes suivants :

> Les mathématiques, école de rigueur, sont aussi une discipline qui apprend à se poser des questions. Et répondre ne pourra résulter de pétitions de principe ou d'arguments d'autorité, mais obligera à énoncer ses présupposés, à justifier les traitements entrepris et les résultats atteints. Pour la formation du citoyen, de telles attitudes sont fondamentales.

2.3. La dialectique entre ***questions*** mathématiques ou extramathématiques ***à étudier*** et ***savoirs*** mathématiques construits ou à construire en tant qu'***outils d'étude*** est au cœur de la formation à une telle citoyenneté éclairée (et éclairante). Le programme de 6ᵉ précise ainsi que l'enseignement des mathématiques en classe de sixième vise notamment à « développer la capacité à utiliser les outils mathématiques dans différents domaines (vie courante, autres disciplines) » et ajoute :

> Pour cela, la démarche d'apprentissage vise à bâtir les connaissances mathématiques à partir de problèmes rencontrés dans d'autres disciplines ou issus des mathématiques elles-mêmes. En retour, les savoirs mathématiques doivent être utilisables dans des spécialités diverses, ce qui contribue à faire prendre conscience de la cohérence des savoirs et de leur intérêt mutuel et favorise la prise en compte par les élèves à la fois du caractère d'« outil » des mathématiques et de leur développement comme science autonome.

Cette démarche, y lit-on encore, « renforce également la formation intellectuelle de l'élève, développe ses capacités de travail personnel (individuellement et en équipes) et concourt à la formation du citoyen. »

2.4. Le document d'accompagnement du programme de 3ᵉ reprend autrement ce point, en insistant sur l'effort de ***synthèse*** qui doit aller de pair avec le travail concret sur telle ou telle question étudiée :

> Au terme d'un exercice, amener l'élève à en dégager l'intérêt – le type de problème qui a été résolu, le résultat qui a été établi –, à situer l'exercice dans la progression du cours, et plus généralement dans l'ensemble des connaissances acquises au collège, est particulièrement formateur : cela permet d'avoir une vision globale des questions abordées en mathématiques et dans certains cas de leurs liens avec d'autres disciplines. Ainsi l'enseignement des mathématiques contribue pour une bonne part à la formation générale des collégiens et à leur formation de futur citoyen.

2.5. Les programmes de mathématiques présentent de manière insistante le domaine de l'organisation et de la gestion de données – soit en gros le domaine de la ***statistique***, tel qu'il se met en place au collège –, comme le lieu par excellence de la formation mathématique à la citoyenneté. Un passage du programme de 3ᵉ justifie en partie cette insistance dans les termes suivants :

> L'éducation mathématique rejoint ici l'éducation du citoyen : prendre l'habitude de s'interroger sur la signification des nombres utilisés, sur l'information apportée par un résumé statistique et donc sur la perte d'information, sur les possibilités de généralisation, sur les risques d'erreurs d'interprétation et sur leurs conséquences possibles.

Les programmes des autres classes ne sont pas en reste, comme le montre le florilège d'extraits ci-après, où l'on notera tout particulièrement la référence répétée aux « autres disciplines » :

> 1. « Les trois parties de cette rubrique s'éclairent et se complètent mutuellement. La contribution des mathématiques à l'éducation du citoyen y apparaît clairement. La partie statistique a pour objectif d'initier à la lecture, à l'interprétation, à la réalisation et à l'utilisation de diagrammes, tableaux et graphiques et d'en faire l'analyse critique. » *(Gestion de données & fonctions en 5ᵉ)*
>
> 2. « Les notions essentielles relatives à cette rubrique ont été introduites ou approfondies en 6ᵉ et 5ᵉ. […] Le lien avec les autres disciplines et avec l'éducation à la citoyenneté sera maintenu et renforcé. » *(Gestion de données &*

fonctions en 4^e^)

3. « Le programme du cycle central du collège a pour objectif de permettre […] en “organisation et gestion de données” l'acquisition de quelques outils statistiques utiles dans d'autres disciplines et dans la vie de tout citoyen. » *(Accompagnement du programme de 5^e^ & 4^e^)*

4. « Par ailleurs, la place des statistiques dans la vie courante et leur utilisation dans de nombreuses disciplines demandent que la formation du futur citoyen se poursuive en ce domaine… » (*Accompagnement du programme de 3^e^*)

2.6. L'articulation des mathématiques avec la vie des citoyens s'accomplit par la ***modélisation*** de ***situations*** du monde. Le ***matériau de base*** est ici constitué des ***grandeurs*** en lesquelles se déploie la diversité du monde. L'***outil fondamental***, à ce niveau des études mathématiques, est alors celui de la ***proportionnalité***, lié lui-même à la notion de ***pourcentage*** – ce qu'illustre le choix d'extraits ci-après.

1. « C'est dans des situations mettant en jeu des grandeurs que tous les élèves pourront réinvestir les connaissances acquises en mathématiques. Les mathématiques du citoyen sont celles qui interviennent comme outils pour les grandeurs, celles qui permettent de modéliser efficacement des situations faisant intervenir des grandeurs. »

2. « Les élèves ont eu l'occasion de prendre conscience petit à petit, au long du collège, de la nature de l'activité mathématique et des mathématiques, en particulier avec la construction de modèles de certaines situations, notamment celles de la proportionnalité. Ils acquièrent également des techniques élémentaires de traitement et de résolution, qui ont des utilisations très diverses au quotidien, dans les autres disciplines et dans la vie du citoyen. »

3. « La proportionnalité est un concept capital. Elle est indispensable pour l'étude et la compréhension des relations entre grandeurs physiques ; sous l'aspect des pourcentages, elle joue un rôle essentiel dans la vie du citoyen. »

4. « La proportionnalité, rencontrée dès l'école, est, en particulier, un concept non seulement essentiel dans la vie du citoyen, mais encore fondamental pour l'étude et la compréhension des relations entre les grandeurs physiques. »

3. De l'instruction à l'éducation

3.1. Le citoyen se définit par son rapport à la Cité : il détient une part de la souveraineté politique et doit assumer cette part de pouvoir au sein de la *polis* pour s'assumer effectivement en tant que citoyen. Si l'instruction à laquelle il a droit – et qu'il est de son devoir d'acquérir – doit l'aider à déjouer les tyrannies que peuvent faire peser sur lui les savants et les puissants, cette entreprise est d'emblée collective, collégiale, bref, « citoyenne ». Car le citoyen est le contraire de l'***idiot*** : le mot *idiotès* désigne à l'origine, en grec, l'homme privé, qui se prive (ou se trouve privé) de tout ce qui n'est pas simple vie « privée », par opposition à l'homme public impliqué dans la vie de la Cité, qui est aussi l'homme « libre ». Le problème de l'instruction du citoyen se pose alors autrement qu'il ne se pose pour l'idiot de la Cité : constamment, il faut s'inquiéter de savoir si cette instruction lui permettra d'être à la hauteur des affaires de la Cité. Tel est exemplairement le souci de Condorcet face aux formidables défis que pose aux citoyens la Révolution française lorsque, en octobre 1793, alors qu'il doit se cacher (il a été décrété d'accusation le 3 octobre 1793), il rédige son *Esquisse d'un Tableau historique des progrès de l'esprit humain* (qui sera publiée en 1795, après sa mort) :

> Tout nous dit que nous touchons à l'époque d'une des grandes révolutions de l'espèce humaine. […] L'état actuel des lumières nous garantit qu'elle sera heureuse ; mais n'est-ce pas aussi à condition que nous saurons nous servir de toutes nos forces ? Et pour que le bonheur qu'elle promet soit moins chèrement acheté, pour qu'elle s'étende avec plus de rapidité dans un plus grand espace, pour qu'elle soit plus complète dans ses effets, n'avons-nous pas besoin d'étudier dans l'histoire de l'esprit humain quels obstacles nous restent à craindre, quels moyens nous avons de surmonter ces obstacles ?

3.2. D'une manière générale, l'instruction prodiguée doit répandre les lumières qui permettront de « perfectionner l'espèce humaine » : le programme d'études est immense, même quand on le recentre autour des besoins d'instruction « politique » ! Dans le troisième de ses *Mémoires sur l'instruction publique* (1791), Condorcet écrit ainsi :

> Il faut non seulement que chaque homme soit instruit des nouvelles lois qui s'exécutent ou se préparent dans les diverses branches de l'administration, qu'il soit toujours en quelque sorte au courant de la législation sous laquelle il doit vivre ; il faut de plus que si l'on agite de nouvelles questions politiques, si l'on cherche à fonder l'art social sur de nouveaux principes, il soit averti de l'existence de ces questions, des combats d'opinions qui s'élèvent sur ces principes. Comment, en effet, sans cette instruction pourrait-il connaître et les hommes par qui sa patrie est gouvernée et ce qu'elle en doit attendre, savoir quels biens ou quels maux on lui prépare à lui-même ? Comment

sans cela une nation ne resterait-elle pas divisée en deux classes, dont l'une, servant à l'autre de guide, soit pour l'égarer, soit pour la conduire, en exigerait une obéissance vraiment passive, puisqu'elle serait aveugle ? Et que deviendrait alors le peuple sinon un amas d'instruments dociles que des mains adroites se disputeraient pour les rejeter, les briser, ou les employer à leur gré ?

Mais il ajoute aussitôt ceci [55] :

> Je n'ai point la prétention de vouloir changer en publicistes les vingt-quatre millions de citoyens actifs qui, réunis sous une loi commune, veulent être libres de la même liberté ; mais, dans cette science comme dans toute autre, quelques heures d'attention suffisent souvent pour comprendre ce qui a coûté au génie des années de méditation. D'ailleurs, on aurait soin, dans cette instruction, de rapporter aux droits de l'homme toutes les dispositions des lois, toutes les opérations administratives, tous les moyens comme tous les principes ; la déclaration des droits serait l'échelle commune à laquelle tout serait comparé, par laquelle tout serait mesuré. Dès lors, on n'aurait plus besoin de ces connaissances étendues, de ces réflexions profondes, souvent nécessaires pour reconnaître l'intérêt commun sous mille intérêts opposés qui le déguisent. Ainsi, en ne parlant aux hommes que de ces droits communs à tous, dans l'exercice desquels toute violation de l'égalité est un crime, on ne leur parlera de leurs intérêts qu'en leur montrant leurs devoirs et toute leçon de politique en sera une de justice.

3.3. Mais le citoyen n'a pas besoin seulement d'instruction « politique » au sens restreint du terme. Le troisième mémoire porte *Sur l'instruction commune pour les hommes*, dont Condorcet précise les grandes divisions en ces termes :

> Réglée comme toute autre sur les besoins les plus généraux, elle aura principalement pour objet : 1) les connaissances politiques ; 2) la morale ; 3) l'économie domestique et rurale ; 4) les parties des sciences et des arts qui peuvent être d'une utilité commune ; 5) enfin, l'éducation physique et morale.

Tant ce découpage que le contenu précis des champs de connaissance qu'il distingue mérite d'être indéfiniment repris, réexaminé, réévalué. Mais la problématique générale du choix des matières à étudier est, elle, sans ambiguïté : elle se fonde sur ce que Condorcet nomme l'***utilité*** des connaissances dont l'on doit s'instruire. L'abord préconisé est clairement ***fonctionnel*** : il n'y a pas ici de valorisation ***formelle*** de la connaissance, qui ne saurait être regardée comme un bien précieux indépendamment de ses usages. Cela ne signifie pas – au contraire ! – que la connaissance puisse se réduire à la mise en application d'un corps de doctrine indiscuté. À propos de l'« économie rurale », dans une section intitulée significativement « Utilité et difficulté de substituer dans l'économie rurale à une routine aveugle une pratique éclairée par l'observation », Condorcet observe ainsi :

> L'économie rurale n'est, en général, que l'application de ce que l'expérience a fait connaître de plus certain, de plus profitable […]. Cette expérience se réduit presque partout à d'anciens usages que l'on suit, non parce qu'ils sont les meilleurs, mais parce qu'ils conduisent d'une manière presque sûre à tirer de son exploitation le produit sur lequel on a fait ses arrangements antérieurs.

Or, le problème, souligne Condorcet, est complexe. L'inertie des pratiques et des pensées n'explique pas tout : pour innover, encore faut-il s'être assuré de l'utilité des innovations ! Et c'est en ce point que la question d'une diffusion idoine des lumières appropriées se pose avec acuité :

> Un homme peu éclairé, incapable de distinguer une vérité éprouvée par l'expérience, d'une rêverie annoncée avec une audacieuse importance, doit regarder toute innovation comme un véritable jeu de hasard, dans lequel il ne veut risquer ni sa subsistance ni même une partie de sa fortune. Cette prudence n'est donc point de la stupidité ; car la grande probabilité du succès peut seule justifier des tentatives […]. Le défaut d'instruction est donc la véritable cause du peu de progrès de l'agriculture, et on ne se plaindra plus de cette haine trop commune pour les nouveautés, lorsqu'on aura instruit les hommes à les apprécier ; mais ils aimeront à rester à leur place, tant qu'ils ne pourront marcher que dans les ténèbres.

On notera l'insistance mise à identifier comme un déficit d'instruction ce que d'aucuns pourraient regarder trop vite comme une « stupidité » intrinsèque et, quasiment, native ! Dans un texte plus ancien, la *Lettre d'un laboureur de Picardie à M. N.*** Auteur Prohibitif, à Paris* (1775), réponse à un ouvrage de Jacques Necker (1732-1804) publié la même année, *Sur la législation et le commerce des grains*, Condorcet faisait déjà dire sans détour au laboureur picard :

> Vous exagérez la stupidité du peuple : nous sommes ignorants parce qu'on n'a point daigné nous donner les moyens de nous instruire ; parce qu'il est tout simple qu'une jurisprudence, une législation des finances qu'aucun

55 Un publiciste est « celui qui écrit sur le droit public, qui est versé dans cette science » (Littré) ; et, plus largement, celui qui écrit sur les matières politiques. Le mot, sorti d'usage aujourd'hui, était entré dans le Dictionnaire de l'Académie en 1762.

jurisconsulte, aucun financier ne peuvent se vanter d'avoir entendues en entier, n'offrent qu'un brouillard à des hommes qui n'ont ni le temps ni l'habitude de la réflexion : mais nous savons saisir les idées simples qu'on nous présente clairement, & raisonner avec justesse sur ces idées : nous savons souffrir avec patience les outrages que nous ne pouvons repousser ; mais nous ne sommes pas abrutis au point de ne les plus sentir.

3.4. L'instruction voulue par Condorcet, l'instruction utile au citoyen, porte sur les principes – les « technologies » – autant que sur les connaissances particulières que ces principes permettent de produire. Dans son premier mémoire, intitulé *Nature et objet de l'instruction publique*, où il précise notamment que « la constitution de chaque nation ne doit faire partie de l'instruction que comme un fait », Condorcet écrit ainsi :

Le but de l'instruction n'est pas de faire admirer aux hommes une législation toute faite, mais de les rendre capable de l'apprécier et de la corriger. Il ne s'agit pas de soumettre chaque génération aux opinions comme à la volonté de celle qui précède, mais de les éclairer de plus en plus, afin que chacune devienne de plus en plus digne de se gouverner par sa propre raison.

D'une manière plus générale, l'instruction citoyenne vise à permettre à chacun d'entretenir, à tout objet d'instruction, un rapport critique. « L'instruction politique, note ainsi Condorcet, ne doit pas se borner à la connaissance des lois faites, mais s'étendre à celles des principes et des motifs des lois proposées. »

3.5. Que sont les objets sur lesquels doit porter cette instruction publique ? Faut-il pousser jusqu'à ce qu'on regarde ordinairement comme de simples objets ***d'éducation*** ? Condorcet est, là-dessus, fort réservé. La question est délicate, et polémique. Dans un article du *Moniteur* du 15 août 1793, l'un de ses amis et collègues (il est aussi mathématicien), Gilbert Romme (1750-1795), membre comme lui du Comité d'Instruction publique, écrit [56] :

On a raison de distinguer l'éducation de l'instruction. L'instruction développe les facultés intellectuelles, l'éducation développe le caractère et les facultés morales […]. L'éducation seule donnerait de bonnes mœurs avec des préjugés ; l'instruction seule favoriserait les talents, mais donnerait de la jactance. Réunissez-les, et vous donnerez aux hommes des mœurs pures et des lumières.

L'éducation porterait donc sur le rapport de l'élève à des objets (« discipline », « civilité », etc.) que l'instruction ignorerait de fait, tandis qu'elle-même serait indifférente à nombre d'objets relevant plus proprement de l'instruction (ceux, en gros, dont nous parlent les différentes disciplines de connaissance enseignées à l'École). De fait, le passage, en 1932, à l'initiative d'Édouard Herriot (1872-1957), alors Président du Conseil [57], de la dénomination de ministère « de l'Instruction publique » à celle de ministère « de l'Éducation nationale » marquera tout à la fois la reconnaissance de cet écart entre instruction et éducation et l'élargissement du domaine de « l'éducation scolaire », en écho notamment au développement des mouvements de jeunesse et des associations éducatives visant à promouvoir des aspects toujours plus nombreux – relevant du sport, des loisirs, de la culture populaire, etc. – de la formation.

3.6. La distinction qu'explicitait Romme et que le sens commun continue de valider en grande partie peut cependant être contestée. L'écart de fait renvoie-t-il vraiment à un écart intrinsèque, indépassable ? Répondre positivement reviendrait à confondre le fait et le droit. À contre-fil, on peut soutenir que tout objet d'éducation est, potentiellement, objet d'instruction, parce que tout objet est ou peut être l'objet de savoirs positifs, dont il conviendrait que nous nous instruisions pour former et réformer notre rapport à cet objet. L'éducation marquerait ainsi, en l'occupant parfois indûment, le territoire potentiel d'une instruction qui, dans tout un ensemble de cas, n'aurait pas ***encore*** su conquérir les moyens épistémologiques de sa mission. Allant plus loin, on pourrait dire que toute éducation occupe le lieu d'une instruction déterminée, et l'on pourrait se proposer alors de débusquer, derrière l'éducation prétendue, l'instruction explicite ou, plus souvent, « cachée », et quelquefois hautement critiquable, dont elle procèderait. ***En ce sens***, mais en ce sens seulement, il appartient à l'instruction de se substituer progressivement à l'éducation, sans pour cela entraver le libre choix qu'a chacun de ses façons d'être, de ses manières d'agir, de sa pensée même, selon le principe de la ***laïcité au sens fort*** [58].

3.7. Un autre usage peut être fait du couple instruction-éducation, dont on trouve un écho dans ce passage de

56 Cité *in* Charles Coutel, *Condorcet. Instituer le citoyen*, Michalon, 1999, p. 68.

57 Ce qui équivaut au titre de Premier ministre aujourd'hui.

58 Sur cette notion, voir la notice *Sur la laïcité*, que l'on trouvera sur le site Internet de l'IUFM d'Aix-Marseille, sous la rubrique *L'encyclopédie du professeur* / *Notices*.

la 24e leçon du *Cours de philosophie positive* d'Auguste Comte (1798-1857) [59] :

> Quoiqu'il soit, sans doute, infiniment plus aisé d'apprendre que d'inventer, il faut enfin que le public, pour n'être point livré aux sophistes et aux trafiquants de science, soit profondément convaincu que, comme le simple bon sens l'indique clairement, ce qui a été découvert par le long et pénible travail du génie, la raison commune ne saurait se l'approprier réellement que par une méditation persévérante, précédée d'études convenables. […] Car les hommes ont encore plus besoin de méthode que de doctrine, d'éducation que d'instruction.

« Les hommes ont encore plus besoin d'éducation que d'instruction » : ici, l'instruction tend à être regardée – négativement – comme n'apportant au citoyen qu'un stock de recettes, tours de main ne renvoyant qu'à eux-mêmes car non articulés en une organisation de savoir qui en vivifie et en contrôle le sens. Par contraste, l'éducation, refusant l'imposition de « doctrines » toutes faites et indiscutées, fournit des méthodes pour observer, analyser, évaluer. Nul doute que Condorcet ne s'opposerait pas à l'éducation en ce sens, même s'il reste vrai que les objets « d'éducation » (au sens usuel) qui peuvent être regardés, à un moment historique donné et à un niveau scolaire donné, comme des objets « d'instruction » (au même sens) dépendent tout à la fois et de l'état de développement de la société (qui désigne ce dont elle accepte que ses jeunes générations s'instruisent), et du développement des sciences susceptibles d'outiller cette instruction.

À suivre

4. Jury des enseignements

Dans quelle mesure doit-on utiliser le corpus B pour notre oral du jury d'enseignement ? (EM, 2de, 20)
On doit présenter l'analyse et,l'évaluation du corpus A devant le jury d'enseignement. Faut-il remettre une trace écrite ? (CS, 5e, 21)

Le corpus B est le support principal de l'entretien avec le jury d'enseignement.
On rappelle l'*objectif* de l'entretien : l'appréciation de la maîtrise par le candidat des connaissances étudiées dans la formation 2009-2010, ces connaissances étant « cadrées » par une liste de questions d'entretien (sur laquelle nous allons revenir). Le support de l'entretien est *au service* de la réalisation de cet objectif : sa présentation doit donc être concise, tout en faisant parcourir l'ensemble des rubriques usuelles, y compris celles relatives à l'organisation mathématique, à l'organisation didactique et à la gestion du travail *sur l'ensemble de la séquence* retenue par le candidat dans son corpus B.

Il appartient au candidat de faire un *choix* de présentation, qui lui permette de mettre en avant ce qui, *de son point de vue*, apparaît le mériter le plus – *par exemple* le fait que, en telle séance de la séquence, l'organisation de l'étude intégrait la conception et la réalisation d'une expérimentation conduite par les élèves réunis en binômes avec telles ou telles ressources de milieu (ordinateurs, Internet, calculatrice, épures, théories déductives, etc.), ou au contraire être particulièrement défaillant. C'est à cet égard que le corpus A peut s'avérer utile, ou encore pour mettre l'accent sur telle technique de réalisation d'un moment de l'étude, voire sur tel aspect de l'organisation mathématique.

Cela noté, les membres de la commission d'examen ne sont nullement tenus de faire porter leurs questions *uniquement* sur les points ainsi mis en relief. Mais ils devront dans tous les cas :
1) demeurer dans le cadre fixé par la liste susmentionnée ;
2) se référer au support d'entretien, le corpus B augmenté du corpus A, dont ils n'auront pu prendre connaissance par avance et qu'ils ne pourront donc que parcourir de façon volontairement non systématique.

59 Cité *in* Bernadette Bensaude-Vincent, *L'opinion publique et la science*, Sanofi-Synthélabo, 2000, pp. 115-116.

Ce qu'on attend finalement du candidat c'est que, et dans la présentation du support d'entretien et dans les réponses aux questions qui lui seront proposées ensuite, il montre de façon raisonnablement convaincante sa connaissance des contenus de la formation. On aura noté que le support d'entretien doit contenir le « mémoire interdisciplinaire » éventuellement réalisé par ailleurs par le candidat (CAFEP notamment) : des questions pourront en ce cas porter sur cette composante du matériel présenté.

Il n'est pas demandé de remettre une trace écrite mais, comme pour le TER, l'utilisation d'un support vidéoprojeté s'avère généralement pertinent.

Voici la liste des questions d'entretien 2008-2009, légèrement modifiée.

Questions d'entretien

① ***Structure et contenu de la séquence observée***

❶ Que sont les systèmes didactiques auxiliaires (SDA) et les dispositifs didactiques internes au système didactique principal (SDP) mobilisés lors de la réalisation de la séquence ? Comment la séquence exploite-t-elle l'espace didactique offert par le SDP et ses SDA ?

❷ Quelle est la place du thème mathématique parmi les secteurs et domaines d'études en lesquels se structure le programme de mathématiques de la classe ? Que sont les principaux sujets d'étude participant de ce thème ? Comment ce thème est-il situé dans la programmation annuelle adoptée ?

② ***L'organisation mathématique***

❶ Que sont les types de tâches travaillés dans la séquence ? Y sont-ils clairement dégagés et bien identifiés ?

❷ Quelles sont les raisons d'être des types de tâches travaillés ? Sont-elles explicitées ? Comment ?

❸ Quelle pertinence ont les types de tâches travaillés en tant qu'outils d'études pour l'année en cours ? Pour les années à venir ? Pour d'autres disciplines ?

❹ Que sont les techniques associées aux types de tâches travaillés ? Sont-elles faciles à utiliser ? Quelle est leur portée ? Sont-elles fiables ? Qu'en est-il de leur intelligibilité ? Quel est leur avenir ? Quelles évolutions devront-elles subir pour perdurer ?

❺ Comment les techniques travaillées sont-elles justifiées ? Y a-t-il des énoncés technologiques ou théoriques qui soient considérés comme “ évidents ” ou “ bien connus ” ? Les formes de justification utilisées sont-elles proches des formes canoniques en mathématiques ? Ont-elles valeur d'explication pour les élèves ? Les résultats technologiques rendus disponibles sont-ils effectivement exploités ?
❻ L'organisation mathématique apparaît-elle suffisamment amalgamée ?

③ ***L'organisation didactique***

❶ Comment se réalisent dans les temps et les lieux alloués, et selon quelles modalités (place du manuel, travail en classe et hors classe, etc.), les différents moments de l'étude – première rencontre avec les types de problèmes associés au thème, travail exploratoire visant à l'émergence d'une technique, travail d'élaboration technologique et théorique, travail de la technique et, plus largement, de l'organisation mathématique, institutionnalisation, évaluation ? Comment ces moments didactiques sont-ils articulés ? Jusqu'à quel point leurs modalités de réalisation apparaissent-elles installées dans la culture de la classe ?

❷ Qu'en est-il de la chronogenèse ? Quelle avancée de l'étude la séquence a-t-elle permis ?

– Comment cette avancée de l'étude se manifeste-t-elle dans l'organisation mathématique (par la création de nouveaux types de tâches, de nouvelles techniques, de nouveaux éléments technologiques, par une réorganisation partielle du déjà construit, etc.) ?
– S'est-elle faite au détriment de certains des moments de l'étude ? Lesquels ?
– Comment la mémoire didactique de la classe est-elle assurée ?

❸ Qu'en est-il de la topogénèse ?

– Quel est le *topos* de l'élève dans l'organisation de l'étude ? Les élèves l'occupent-ils franchement, ou seulement d'une manière indécise ou aléatoire ?

– Quel est le *topos* du professeur dans la séquence ? Lui permet-il d'assurer adéquatement ses différents rôles (directeur d'étude, aide à l'étude, enseignant, etc.) ?
– Comment le *topos* du professeur s'articule-t-il avec le *topos* de l'élève ?

❹ Qu'en est-il de la mésogénèse ?

– De quelles ressources didactiques et notamment de quelles ressources mathématiques, de quels moyens déductifs et de quels moyens expérimentaux (calculatrices, logiciels, etc.) les élèves disposent-ils pour accomplir le travail d'étude et de recherche qui leur est demandé ?
– Ces ressources leur permettent-elles de résoudre en quasi-autonomie didactique les problèmes qu'ils ont à affronter ?

④ ***La gestion de la séquence et de la séance***

❶ La gestion du temps didactique permet-elle d'impulser une dynamique de l'étude adéquate ? La gestion de l'espace didactique conduit-elle à une exploitation satisfaisante des divers systèmes didactiques mobilisables et des dispositifs didactiques qu'ils proposent, notamment en ce qui concerne la mémoire didactique de la classe et de chacun des élèves ?

❷ La gestion par le professeur de son propre *topos* et du *topos* de l'élève, et en particulier des ressources que celui-ci peut mobiliser, lui permet-elle une prise de décision effective et une action efficace devant les difficultés rencontrées au cours de la séquence ?

⑤ ***Les " passages imposés "***

❶ Quel " jeu " la séquence montre-t-elle entre travail individuel ou en équipe et travail de la classe en tant que collectif d'étude et de recherche ?

❷ Quelles formes d'aide ou de différenciation réalistes propose la séquence (ou pourrait-on proposer à partir de cette séquence) pour gérer la diversité des élèves ?

❸Quel est le dispositif d'évaluation utilisé ? Quels sont les critères d'évaluation ? Quels sont leurs rôles ?

❹ Quelle serait la contribution possible de la séquence à l'éducation à la citoyenneté ?

5. Recherches dans les archives

a) Une première recherche dans les *Archives* tentera de répondre à la question suivante :

Que nous disent les Archives du Séminaire sur la question de **la gestion de l'hétérogénéité et de la diversité** ?

• Le compte rendu de la recherche s'efforcera de présenter (en les choisissant adéquatement) des matériaux pour une réponse aux questions de la semaine ci-après éventuellement présents dans les *Archives*.

1. J'ai une poignée d'élèves que je dois motiver constamment et pour qui les maths sont diaboliques. Le problème c'est que si je leur consacre du temps, certains de mes élèves intéressés s'ennuient et réciproquement, si j'essaie de faire des choses un peu évoluées, certains décrochent. Comment gérer cette hétérogénéité à travers les exercices, les activités ? (RB, 7)
2. Au cours d'un chapitre, vient un moment où seule une partie des élèves a compris le cours (disons la moitié de la classe). Comment gérer l'hétérogénéité du groupe ? (SB, 2)
3. Comment gérer l'hétérogénéité de la classe lorsque l'on fait une séance d'exercices ? (SC, 2)
4. Comment gérer l'hétérogénéité d'une classe ? Certains comprennent vite et finissent les planches d'exercices alors que d'autres ne maîtrisent toujours pas les notions. Faut-il donner des exercices supplémentaires à ceux qui ont fini avant les autres ou prendront-ils ça comme une injustice d'avoir des exercices en plus ? Faut-il passer moins de temps à expliquer à ceux qui ne comprennent toujours pas ? (FD, 3)
5. Quels moyens peut-on mettre en place au moment de l'OM lorsqu'on a une classe hautement hétérogène

pour que les meilleurs ne s'ennuient pas et ne pas « lâcher » les plus faibles .
Dernier DS : étendue : 0 → 19,5
répartition 14 élèves : note < 7
11 élèves : note >= 12
9 élèves : 7 <= note < 12 (JLH, 14)

6. Comment gérer l'hétérogénéité des niveaux dans une classe au cours d'une activité ou d'une séance d'exercices d'application ? (PR, 4)

7. Dans une classe, j'ai de très bons élèves qui terminent les activités et les exercices très rapidement. Dois-je leur donner des exercices supplémentaires pour qu'ils attendent sachant que les autres n'auront pas le temps de les faire ? (TL, 2)

• Cette recherche est exposé par le trinôme formé de SDM, AL et PR

b) La deuxième recherche dans les *Archives* aura trait à la question suivante :

Que nous disent les Archives du Séminaire suer la manière de terminer l'année et en particulier de **finir le programme** ?

• Le compte rendu de la recherche s'efforcera de présenter (en les choisissant adéquatement) des matériaux pour une réponse aux questions de la semaine ci-après éventuellement présents dans les *Archives*.

1. Est-ce "mal vu" de finir le programme de quatrième par les thèmes Statistique et Volume, sachant qu'ils sont considérés comme "moins importants" que les autres par les collègues ? (GS, 11)

2. D'après ma progression et ce que j'ai fait comme chapitre depuis septembre, je pense que je ne vais pas finir le programme car il me manque une semaine à peu près. Quels sont les moyens pour y remédier ? (AB, 13)

3. Le programme de quatrième me semble énorme et je crains déjà de ne pas pouvoir le finir (alors que je ne m'estime pas en retard par rapport à mon PCP ni aux autres collègues). Est-il judicieux de choisir un chapitre (avec les collègues) que l'on ne traitera pas afin que les élèves arrivent en troisième avec les mêmes bases ? (AM, 15)

4. Lorsqu'on sent qu'on est en retard dans le programme, faut-il privilégier certains chapitres ? (ME, 13)

• Cette recherche est exposé par le binôme formé de MPA & NB.

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2009-2010

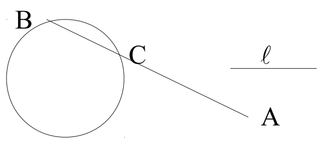
Travaux dirigés de didactique des mathématiques
Utiliser les TICE

➔ Séance 6 : mardi 4 mai 2010 (17 h 20 – 18 h 50)

Se mettre en binôme et créer un fichier traitement de texte : x&y_td6.odt ou x&y_td6.doc

1. Expérimenter pour explorer et réaliser un moment technologico-théorique

1. On se donne un cercle de rayon r; une longueur $\ell < 2r$ et un point A extérieur au cercle. Produire à partir d'expérimentations effectuées avec le logiciel Geogebra une technique de construction à la règle et au compas d'une corde [BC] du cercle telle que (BC) passe par A et BC = ℓ. On gardera la trace du processus de production de la technique, y compris les étapes qui n'ont pas abouties.



2. Préparer un milieu expérimental

Un professeur de mathématiques cherche un dispositif expérimental pour l'étude de la géométrie dans l'espace. Il a vu sur un forum qu'on trouvait sur l'Internet un fichier servant de générateur de figures 3D pour Geogebra.

a. Se procurer ce fichier et l'utiliser pour faire la figure correspondant au problème suivant.

ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle : on donne AE = 2 cm ; EF = 5 cm et FG = 2,5 cm. I est le point de [AB] tel que AI = 1,5 cm. J est le point de [EF] tel que FJ = 0,5 cm. Ce solide est coupé par le plan qui passe par I et J et qui est parallèle à l'arête [AD]. Indiquer la nature de la section puis la construire en vraie grandeur.

On donnera la technique de construction de la figure dans le fichier texte ainsi qu'une copie de la figure obtenue.

b. Peut-on l'utiliser pour mettre en place une dialectique expérimentation/théorisation à propos du problème suivant ? Si oui, expliquer comment et donner la ou les figures utilisées. Si non, expliquer pourquoi.

ABCDEFGH est un cube d'arête 5 cm. J est le point de [AB] tel que AJ = 3 cm, K est le point de [AB] tel que AK = 4 cm. IJKL est la section de ce cube par un plan parallèle à [AE]. Quelle est la nature de cette section ?

Éléments pour un corrigé : à venir...